

AFDELINGEN FOR  
BÆRENDE KONSTRUKTIONER  
DANMARKS TEKNISKE HØJSKOLE



STRUCTURAL RESEARCH LABORATORY  
TECHNICAL UNIVERSITY OF DENMARK

Steen Krenk

SINGULÆR INTEGRALFORMULERING AF NOGLE  
PLANE FRIKTIONSFRI KONTAKTPROBLEMER

RAPPORT NR. R 36 1973

AFDELINGEN FOR  
BÆRENDE KONSTRUKTIONER  
DANMARKS TEKNISKE HØJSKOLE



STRUCTURAL RESEARCH LABORATORY  
TECHNICAL UNIVERSITY OF DENMARK

Steen Krenk

SINGULÆR INTEGRALFORMULERING AF NOGLE  
PLANE FRIKTIONSFRI KONTAKTPROBLEMER

RAPPORT NR. R 36 1973

## RESUME

Det plane friktionsfri kontaktproblem i forbindelse med en uendelig elastisk stribe behandles. Problemet reduceres ved hjælp af integraltransformationer til to singulære integralligninger til bestemmelse af kontaktpændingerne. I forbindelse hermed afklares et spørgsmål vedrørende kernefunktionernes integrabilitet, der blev bemærket af Ratwani og Erdogan [1973] for det symmetriske tilfælde. Som et specialtilfælde betragtes halvplanet, og det demonstreres, hvordan visse plane kontaktproblemer, der involverer kontakt mellem flere elastiske legemer, kan formuleres. Til slut gives en kort diskussion af de elastiske konstanterets betydning.

## SUMMARY

The plane problem of contact in connection with an infinite elastic strip without friction is considered. The problem is reduced to two singular integral equations in the contact stresses by means of integral transforms. A problem concerning the integrability of the kernels which was noticed by Ratwani and Erdogan [1973] for the symmetrical case is solved. The half-plane is treated as a special case and it is demonstrated how certain problems involving contact between several elastic bodies can be formulated. Finally, a brief discussion on the influence of the elastic constants is given.

## INDLEDNING

Til løsning af plane elastiske kontaktproblemer har to metoder vist sig effektive. Den ene betjener sig af to komplekse potentialfunktioner og er udførligt beskrevet af Muskhelishvili, [1953] og [1958]. Den anden benytter integraltransformationer, hvorved randbetingelserne får form af integral-ligninger. Sneddon [1951].

Den første metode synes især velegnet til beregninger i forbindelse med elastiske halvrum, da dette tilfælde simplificeres væsentligt ved analytisk fortsættelse af den ene potentialfunktion. Er geometrien mere kompliceret, har det kun i få tilfælde været muligt at etablere analytiske løsninger, og anvendelse af integraltransformationer synes mere hensigtsmæssig. På grund af løsningens singulære karakter i kontaktintervallernes endepunkter er det ikke muligt på tilfredsstillende måde at gennemføre en direkte numerisk integration. Det er dog muligt at eliminere disse singulariteter ved at anvende superposition af kendte analytiske løsninger for halvplanen. Problemet reduceres derved til løsning af én eller flere integralligninger med Fredholm-kerner. Wu og Chiu [1967]. En mere direkte fremgangsmåde består i at formulere randbetingelserne som singulære integralligninger. Ved at udnytte kendskabet til singulariteternes form kan ligningerne integreres numerisk ved brug af metoder, der er beskrevet af Erdogan m.fl. [1969], [1972] og [1973].

I det følgende opstilles singulære integralligninger til løsning af friktionsfri kontaktproblemer i forbindelse med en elastisk strimmel af uendelig længde. Specialtilfælde heraf er det elastiske halvrum og store cylindriske legemers kontakt gennem svagt krumme flader, Hertz' problem.

### FOURIER TRANSFORMATION

Det betragtede grundproblem er skitseret på Fig. 1. En strimmel af uendelig længde påføres foreskrevne normalflytninger på en del af overfladen og foreskrevne normalspændinger på den resterende. Tangentielle flytninger og spændinger er endnu uspecificerede. Materialet forudsættes lineært elastisk og upåvirket af massekræfter.

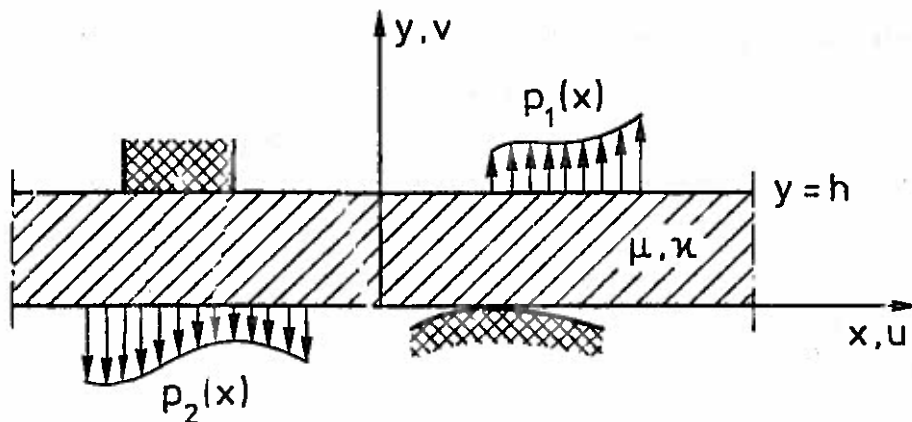


Fig. 1

Med disse forudsætninger bliver flytningerne ikke nødvendigvis begrænsede, og det er hensigtsmæssigt at basere formuleringen på spændingerne. I legemets indre haves de to ligevægtsligninger

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} = 0$$

samt kompatibilitetsligningen

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) (\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) = 0 \quad (2)$$

Spændingerne antages absolut integrable med hensyn til  $x$ . Dette vil eksempelvis være tilfældet, når overfladespændingerne er nul uden for et endeligt antal intervaller af endelig længde. De fouriertransformerede defineres da ved

$$\begin{aligned}\bar{\sigma}_{xx}(\alpha, y) &= \int_{-\infty}^{\infty} \sigma_{xx}(x, y) e^{i\alpha x} dx \\ \bar{\sigma}_{yy}(\alpha, y) &= \int_{-\infty}^{\infty} \sigma_{yy}(x, y) e^{i\alpha x} dx \\ \bar{\sigma}_{xy}(\alpha, y) &= \int_{-\infty}^{\infty} \sigma_{xy}(x, y) e^{i\alpha x} dx\end{aligned}\quad (3)$$

Som følge af Fourier's integralsætning inverteres transformationsformlerne (3) ved

$$\begin{aligned}\sigma_{xx}(x, y) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \bar{\sigma}_{xx}(\alpha, y) e^{-i\alpha x} d\alpha \\ \sigma_{yy}(x, y) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \bar{\sigma}_{yy}(\alpha, y) e^{-i\alpha x} d\alpha \\ \sigma_{xy}(x, y) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \bar{\sigma}_{xy}(\alpha, y) e^{-i\alpha x} d\alpha\end{aligned}\quad (4)$$

Ved at anvende transformationen (3) på ligevægtsligningen (1) fås de transformerede ligevægtsligninger

$$\begin{aligned}-i\alpha \bar{\sigma}_{xx} + \frac{\partial}{\partial y} \bar{\sigma}_{xy} &= 0 \\ -i\alpha \bar{\sigma}_{xy} + \frac{\partial}{\partial y} \bar{\sigma}_{yy} &= 0\end{aligned}\quad (5)$$

Kompatibilitetsligningen (2) transformeres analogt.

$$(-\alpha^2 + \frac{\partial^2}{\partial y^2})(\bar{\sigma}_{xx} + \bar{\sigma}_{yy}) = 0 \quad .$$

Ved benyttelse af (5) opnås heraf

$$\frac{\partial^4}{\partial y^4} \bar{\sigma}_{yy} - 2\alpha^2 \frac{\partial^2}{\partial y^2} \bar{\sigma}_{yy} + \alpha^4 \bar{\sigma}_{yy} = 0 \quad . \quad (6)$$

Ved at løse (6) og substituere løsningen i (5) opnås udtryk for  $\bar{\sigma}_{yy}$ ,  $\bar{\sigma}_{xy}$  og  $\bar{\sigma}_{xx}$  indeholdende fire ukendte funktioner af  $\alpha$ .

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_{xx}(\alpha, y) = & [-A_1(\alpha) + (2-\alpha y)A_2(\alpha)]e^{-\alpha y} \\ & - [A_3(\alpha) + (2+\alpha y)A_4(\alpha)]e^{\alpha y} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_{yy}(\alpha, y) = & [A_1(\alpha) + \alpha y A_2(\alpha)]e^{-\alpha y} \\ & + [A_3(\alpha) + \alpha y A_4(\alpha)]e^{\alpha y} \end{aligned} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_{xy}(\alpha, y) = & i[A_1(\alpha) - (1-\alpha y)A_2(\alpha)]e^{-\alpha y} \\ & - i[A_3(\alpha) + (1+\alpha y)A_4(\alpha)]e^{\alpha y} \quad . \end{aligned}$$

Til formuleringen af de geometriske randbetingelser indføres Hooke's lov for plan deformationstilstand.

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= (\lambda+2\mu)\frac{\partial u}{\partial x} + \lambda\frac{\partial v}{\partial y} \\ \sigma_{yy} &= \lambda\frac{\partial u}{\partial x} + (\lambda+2\mu)\frac{\partial v}{\partial y} \\ \sigma_{xy} &= \mu\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) \end{aligned} \quad (8)$$

hvor  $\lambda$  og  $\mu$  er de elastiske Lamé-konstanter. Ligningerne (8) gælder også for generaliseret plan spændingstilstand, når  $\lambda$  erstattes med  $2\mu\lambda/(\lambda+2\mu)$ .

Af (8) fås ved elimination

$$4\mu \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = 4 \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + 2 \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} - \frac{\lambda+2\mu}{\lambda+\mu} \frac{\partial}{\partial y} (\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) .$$

Ved brug af ligevægtsligningen (1b) fås heraf

$$4\mu \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = - \frac{\lambda+2\mu}{\lambda+\mu} \frac{\partial}{\partial y} (\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) + 2 \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} . \quad (9)$$

Ved denne type problemer er det almindeligt at anvende den dimensionsløse elastiske konstant  $\kappa$ , der benyttes i forbindelse med komplekse spændingspotentialer. Den defineres ved  $\kappa = (3-4\nu)$  for plan deformationstilstand og  $\kappa = (3-\nu)/(1+\nu)$  for generaliseret plan spændingstilstand. For den på højresiden af (9) stående dimensionsløse elasticitetskonstant gælder

$$\frac{\lambda+2\mu}{\lambda+\mu} = \frac{\kappa+1}{2} . \quad (10)$$

Ved at indføre transformationerne (4a,b) i (9) og integrere med hensyn til  $x$  fås:

$$\frac{16\pi\mu}{\kappa+1} \frac{\partial v}{\partial x} = -i \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\alpha} \frac{\partial}{\partial y} (\bar{\sigma}_{xx} + \bar{\sigma}_{yy}) e^{-i\alpha x} d\alpha + \frac{8\pi}{\kappa+1} \sigma_{xy} + C(y) . \quad (11)$$

Ved at integrere (11) og et tilsvarende udtryk for  $\frac{\partial u}{\partial x}$  bestemmes flytningerne på nær tre arbitrære funktioner. Indsættelse af disse flytninger i (8) og sammenligning med (7) viser, at de arbitrære flytninger kan gives på formen

$$\begin{aligned} u_0(x,y) &= B - Cy \\ v_0(x,y) &= D + Cy \end{aligned} ,$$



hvor  $B$ ,  $C$  og  $D$  er konstanter. Disse flytninger repræsenterer en stiftlegemebevægelse og sættes i det følgende lig nul. Herved reduceres (11) under anvendelse af (7a, b) til

$$\frac{8\pi\mu}{\kappa+1} \frac{\partial v}{\partial x} = i \int_{-\infty}^{\infty} [A_2(\alpha)e^{-\alpha y} + A_4(\alpha)e^{\alpha y}] e^{-i\alpha x} d\alpha + \frac{4\pi}{\kappa+1} \sigma_{xy} \quad (12)$$

Flytningerne bestemmes ved

$$4\pi\mu u = i \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ [-A_1(\alpha) + \left(\frac{\kappa+1}{2} - \alpha y\right) A_2(\alpha)] e^{-\alpha y} - [A_3(\alpha) + \left(\frac{\kappa+1}{2} + \alpha y\right) A_4(\alpha)] e^{\alpha y} \right\} \frac{1}{\alpha} e^{-i\alpha x} d\alpha$$

$$4\pi\mu v = \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ [-A_1(\alpha) + \left(\frac{1-\kappa}{2} - \alpha y\right) A_2(\alpha)] e^{-\alpha y} + [A_3(\alpha) + \left(\frac{1-\kappa}{2} + \alpha y\right) A_4(\alpha)] e^{\alpha y} \right\} \frac{1}{\alpha} e^{-\alpha x} d\alpha \quad .$$

### FRIKTIONSFRI KONTAKT

I det følgende refererer index 1 til overfladen  $y=h$  og index 2 til  $y=0$ . Begge typer overfladebelastning regnes overført uden forskydningspåvirkning, dvs.

$$\begin{aligned} \sigma_{xy}(x, h) &= 0 & -\infty < x < \infty \\ \sigma_{xy}(x, 0) &= 0 & -\infty < x < \infty \end{aligned} \quad (14)$$

Flytningernes normalkomponenter er foreskrevet på  $L_1$  og  $L_2$ , der hver består af ét eller flere intervaller. Normal-spændingerne er foreskrevet på den øvrige del af overfladen, se Fig. 2.

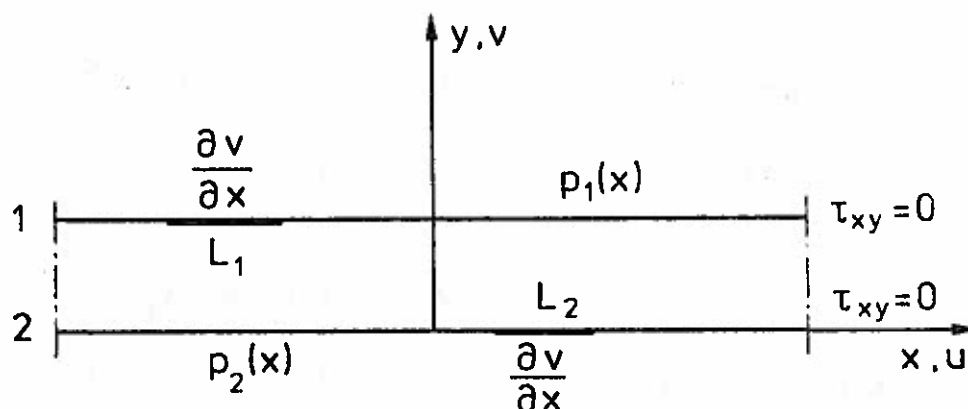


Fig. 2

Det viser sig hensigtsmæssigt ved formulering af de geometriske randbetingelser at benytte normalflytningernes afledede, der er dimensionsløse funktioner.

$$\frac{\partial}{\partial x} v(x, h) = g_1(x) \quad x \in L_1 \quad (15)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} v(x, 0) = g_2(x) \quad x \in L_2$$

For overfladenormalspændingerne indføres betegnelserne

$$\sigma_{yy}(x, h) = p_1(x) \quad -\infty < x < \infty \quad (16)$$

$$\sigma_{yy}(x, 0) = p_2(x) \quad -\infty < x < \infty$$

$p_1(x)$  og  $p_2(x)$  er altså kendte funktioner for henholdsvis  $x \in L_1$  og  $x \in L_2$ .

$\bar{p}_1(\alpha)$  og  $\bar{p}_2(\alpha)$  betegner overfladenormalspændingernes fouriertransformerede. Disse funktioner er ubekendte, da  $p_1(x)$  og  $p_2(x)$  ikke er kendt for  $x \in L_1$  henholdsvis  $x \in L_2$ . Transformation af (16) og (14) i forbindelse med (7) giver følgende ligningssystem

$$\begin{aligned}
 [A_1(\alpha) + \alpha h A_2(\alpha)]e^{-\alpha h} + [A_3(\alpha) + \alpha h A_4(\alpha)]e^{\alpha h} &= \bar{p}_1(\alpha) \\
 A_1(\alpha) + A_3(\alpha) &= \bar{p}_2(\alpha)
 \end{aligned}
 \tag{17}$$

$$\begin{aligned}
 [A_1(\alpha) - (1-\alpha h)A_2(\alpha)]e^{-\alpha h} - [A_3(\alpha) + (1+\alpha h)A_4(\alpha)]e^{\alpha h} &= 0 \\
 A_1(\alpha) - A_2(\alpha) - A_3(\alpha) - A_4(\alpha) &= 0
 \end{aligned}$$

Dette ligningssystem omformes til

$$\begin{aligned}
 2 A_1(\alpha) &= A_2(\alpha) + A_4(\alpha) + \bar{p}_2(\alpha) \\
 2 A_3(\alpha) &= -A_2(\alpha) - A_4(\alpha) + \bar{p}_2(\alpha)
 \end{aligned}
 \tag{18}$$

og

$$\begin{aligned}
 2\alpha h e^{-\alpha h} A_2(\alpha) - (e^{\alpha h} - e^{-\alpha h}) A_4(\alpha) &= \bar{p}_1(\alpha) - e^{-\alpha h} \bar{p}_2(\alpha) \\
 (e^{\alpha h} - e^{-\alpha h}) A_2(\alpha) - 2\alpha h e^{\alpha h} A_4(\alpha) &= -\bar{p}_1(\alpha) + e^{\alpha h} \bar{p}_2(\alpha)
 \end{aligned}
 \tag{19}$$

For  $\alpha=0$  er ligningssystemet (19) singulært og lader sig ikke løse, uden at der lægges visse bånd på  $\bar{p}_1(\alpha)$  og  $\bar{p}_2(\alpha)$ . Til dette formål indføres betegnelserne

$$\begin{aligned}
 r_1(x) &= p_1(x) + p_2(x) \\
 r_2(x) &= p_1(x) - p_2(x)
 \end{aligned}
 \tag{20}$$

$\bar{r}_1(\alpha)$  og  $\bar{r}_2(\alpha)$  betegner som sædvanlig de fouriertransformerede. Ud fra problemets fysiske baggrund er det klart, at løsning af (19) kun er mulig, når de samlede ydre kraftpåvirkninger er i ligevægt. Lodret projektionsligevægt udtrykkes ved

$$\bar{r}_2(0) = \int_{-\infty}^{\infty} [p_1(t) - p_2(t)] dt = 0, \tag{21}$$

medens momentlige vægt om begyndelsespunktet giver

$$\frac{\partial \bar{r}_2}{\partial \alpha} \Big|_{\alpha=0} = i \int_{-\infty}^{\infty} t [p_1(t) - p_2(t)] dt = 0 \quad (22)$$

For problemets egentlige løsning gælder altså  $\bar{r}_2(\alpha) = O(\alpha^2)$ . Herved får (19) den veldefinerede løsning

$$2A_2(\alpha) = \frac{e^{\alpha h} - 1}{e^{\alpha h} - e^{-\alpha h} + 2\alpha h} \bar{r}_1(\alpha) - \frac{e^{\alpha h} + 1}{e^{\alpha h} - e^{-\alpha h} - 2\alpha h} \bar{r}_2(\alpha) \quad (23)$$

$$2A_4(\alpha) = \frac{e^{-\alpha h} - 1}{e^{\alpha h} - e^{-\alpha h} + 2\alpha h} \bar{r}_1(\alpha) + \frac{e^{-\alpha h} + 1}{e^{\alpha h} - e^{-\alpha h} - 2\alpha h} \bar{r}_2(\alpha)$$

Til bestemmelse af  $p_1(x)$  og  $p_2(x)$  på henholdsvis  $L_1$  og  $L_2$  bruges ligning (12) for henholdsvis  $y = h$  og  $y = c$ . I begge tilfælde falder det sidste led bort på grund af (14).

Da integralligningerne indeholder singulariteter, er det vigtigt at opløse argumentfunktionerne på en sådan måde, at singulariteterne indeholdes i nogle få led af simpel opbygning. Til bestemmelse af disse led er det nødvendigt at betragte punkter umiddelbart inden for overfladen og derefter foretage en grænseovergang, hvorunder punkterne nærmer sig til overfladen. Dette vises nedenfor for overfladen  $y = h$ .

$$\begin{aligned} \frac{\partial \pi_1}{\partial x} g_1(x) &= \lim_{y \rightarrow h} i \int_{-\infty}^{\infty} [A_2(\alpha) e^{-\alpha y} + A_2(\alpha) e^{\alpha y}] e^{-i\alpha x} d\alpha = \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} i \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \frac{1 - e^{-\alpha h}}{e^{\alpha h} - e^{-\alpha h} + 2\alpha h} e^{\alpha \epsilon} \bar{r}_1(\alpha) - \frac{1 + e^{\alpha h}}{e^{\alpha h} - e^{-\alpha h} - 2\alpha h} e^{\alpha \epsilon} \bar{r}_2(\alpha) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1 - e^{\alpha h}}{e^{\alpha h} - e^{-\alpha h} + 2\alpha h} e^{-\alpha \epsilon} \bar{r}_1(\alpha) - \frac{1 + e^{\alpha h}}{e^{\alpha h} - e^{-\alpha h} - 2\alpha h} e^{-\alpha \epsilon} \bar{r}_2(\alpha) \right] e^{-i\alpha x} d\alpha \end{aligned}$$

For  $\epsilon = 0$  ses det, at integranden bliver ubegrænset for både  $\alpha \rightarrow \infty$  og  $\alpha \rightarrow -\infty$ . Det er imidlertid ikke de samme led, der bliver ubegrænsede. Derfor opdeles integrationsintervallet ved  $\alpha = 0$ . I de derved fremkomne integraler isoleres de omtalte singulariteter i led af simplest mulig opbygning. Dette fører til

$$\begin{aligned} \frac{8\pi\mu}{\kappa+1}g_1(x) &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} i \left[ \int_{-\infty}^0 \bar{p}_1(\alpha) e^{\epsilon\alpha} e^{-i\alpha x} d\alpha - \int_0^{\infty} \bar{p}_1(\alpha) e^{-\epsilon\alpha} e^{-i\alpha x} d\alpha \right] + \\ &+ i \int_{-\infty}^0 \left[ \frac{1 - \alpha h - e^{\alpha h}}{e^{\alpha h} - e^{-\alpha h} + 2\alpha h} \bar{r}_1(\alpha) - \frac{1 - \alpha h + e^{\alpha h}}{e^{\alpha h} - e^{-\alpha h} - 2\alpha h} \bar{r}_2(\alpha) \right] e^{-i\alpha x} d\alpha + \\ &+ i \int_0^{\infty} \left[ \frac{1 + \alpha h - e^{-\alpha h}}{e^{\alpha h} - e^{-\alpha h} + 2\alpha h} \bar{r}_1(\alpha) - \frac{1 + \alpha h + e^{-\alpha h}}{e^{\alpha h} - e^{-\alpha h} - 2\alpha h} \bar{r}_2(\alpha) \right] e^{-i\alpha x} d\alpha . \end{aligned}$$

I integrationsintervallet  $[-\infty; 0]$  erstattes  $\alpha$  med  $-\alpha$ , hvorved udtrykket bliver

$$\begin{aligned} \frac{8\pi\mu}{\kappa+1}g_1(x) &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} i \int_0^{\infty} [-\bar{p}_1(\alpha) e^{-i\alpha x} + p_1(-\alpha) e^{i\alpha x}] e^{-\epsilon\alpha} d\alpha + \\ &+ i \int_0^{\infty} \frac{1 + \alpha h - e^{-\alpha h}}{e^{\alpha h} - e^{-\alpha h} + 2\alpha h} [\bar{r}_1(\alpha) e^{-i\alpha x} - r_1(-\alpha) e^{i\alpha x}] d\alpha + \quad (24) \\ &+ i \int_0^{\infty} \frac{1 + \alpha h + e^{-\alpha h}}{e^{\alpha h} - e^{-\alpha h} - 2\alpha h} [-\bar{r}_2(\alpha) e^{-i\alpha x} + \bar{r}_2(-\alpha) e^{i\alpha x}] d\alpha . \end{aligned}$$

I (24) indføres de fouriertransformerede ved udtryk af samme form som (3). Derefter ombyttes integrationsrækkefølgen. Herunder er det nødvendigt at tage hensyn til, at den

sidste integrands første faktor har en pol af tredje orden for  $\alpha = 0$ . Den anden faktor må da have et nulpunkt af mindst tredje orden for  $\alpha = 0$ . For fastholdt  $x$  indføres

$$\begin{aligned} Q(\alpha) &= -\bar{r}_2(\alpha)e^{-i\alpha x} + \bar{r}_2(\alpha)e^{i\alpha x} \\ &= -2i \int_{-\infty}^{\infty} r_2(t) \sin(t-x)\alpha dt \end{aligned} \quad (25)$$

Rækkeudvikling af  $Q(\alpha)$  ud fra  $\alpha = 0$  giver,

$$\begin{aligned} Q(\alpha) &= Q(0) + \alpha \left. \frac{dQ}{d\alpha} \right|_{\alpha=0} + \frac{1}{2} \alpha^2 \left. \frac{d^2 Q}{d\alpha^2} \right|_{\alpha=0} + O(\alpha^3) \\ &= -2i\alpha \int_{-\infty}^{\infty} (t-x)r_2(t)dt + O(\alpha^3) \end{aligned} \quad (26)$$

Integralet i (26) forsvinder for enhver værdi af  $x$ , når de globale ligevægtsbetingelser er opfyldt; se (21) og (22). Problemets løsning opfylder altså  $Q(\alpha) = O(\alpha^3)$ . For at kunne ombytte integrationsrækkefølgen i (24) er det imidlertid nødvendigt, at  $Q(\alpha)$  har et nulpunkt af mindst tredje orden for  $\alpha = 0$  uanset forløbet af funktionen  $r_2(t)$ . Dette opnås ved at erstatte  $Q(\alpha)$  med en funktion  $Q^*(\alpha)$ , der defineres ved

$$Q^*(\alpha) = Q(\alpha) - Q(0) - \alpha \left. \frac{dQ}{d\alpha} \right|_{\alpha=0} - \frac{1}{2} \alpha^2 \left. \frac{d^2 Q}{d\alpha^2} \right|_{\alpha=0} = O(\alpha^3) \quad (27)$$

Herved ændres problemets løsning ikke, da denne kræver  $Q^*(\alpha) = Q(\alpha)$ . Brug af (26) giver

$$Q^*(\alpha) = -2i \int_{-\infty}^{\infty} r_2(t) [\sin(t-x)\alpha - (t-x)\alpha] dt \quad (28)$$

Ved indsættelse af  $Q^*(\alpha)$  fra (27) og ombytning af integrationsrækkefølgen bliver (24)

$$\begin{aligned} \frac{4\pi\mu}{\kappa+1} g_1(x) &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0+} \int_{-\infty}^{\infty} p_1(t) \left\{ \int_0^{\infty} e^{-\epsilon\alpha} \sin(t-x)\alpha \, d\alpha \right\} dt + \\ &+ \int_{-\infty}^{\infty} r_1(t) \left\{ \int_0^{\infty} \frac{1 + \alpha h - e^{-\alpha h}}{e^{\alpha h} - e^{-\alpha h} + 2\alpha h} \sin(t-x)\alpha \, d\alpha \right\} dt + \\ &+ \int_{-\infty}^{\infty} r_2(t) \left\{ \int_0^{\infty} \frac{1 + \alpha h + e^{-\alpha h}}{e^{\alpha h} - e^{-\alpha h} - 2\alpha h} [\sin(t-x)\alpha - (t-x)\alpha] d\alpha \right\} dt . \end{aligned}$$

Ved brug af (20) samt det simple resultat

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0+} \int_0^{\infty} e^{-\epsilon\alpha} \sin(t-x)\alpha \, d\alpha = \frac{1}{t-x}$$

opnås sluttelig integralligningen

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{p_1(t)}{t-x} dt + \int_{-\infty}^{\infty} K_{11}(x,t) p_1(t) dt + \int_{-\infty}^{\infty} K_{12}(x,t) p_2(t) dt = \frac{4\pi\mu}{\kappa+1} g_1(x)$$

$$x \in L_1, \quad (29)$$

hvor kærnefunktionerne  $K_{11}(x,t)$  og  $K_{12}(x,t)$  er bestemt ved

$$K_{11}(x, t) = \int_0^{\infty} \left\{ -\frac{1 + \alpha h - e^{-\alpha h}}{e^{\alpha h} - e^{-\alpha h} + 2\alpha h} \sin(t-x)\alpha + \frac{1 + \alpha h + e^{-\alpha h}}{e^{\alpha h} - e^{-\alpha h} - 2\alpha h} [\sin(t-x)\alpha - (t-x)\alpha] \right\} d\alpha \quad (30)$$

$$K_{12}(x, t) = \int_0^{\infty} \left\{ -\frac{1 + \alpha h - e^{-\alpha h}}{e^{\alpha h} - e^{-\alpha h} + 2\alpha h} \sin(t-x)\alpha - \frac{1 + \alpha h + e^{-\alpha h}}{e^{\alpha h} - e^{-\alpha h} - 2\alpha h} [\sin(t-x)\alpha - (t-x)\alpha] \right\} d\alpha .$$

For  $y = 0$  opnås ved analoge regninger

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{p_2(t)}{t-x} dt + \int_{-\infty}^{\infty} K_{21}(x, t) p_1(t) dt + \int_{-\infty}^{\infty} K_{22}(x, t) p_2(t) dt = -\frac{4\pi\mu}{\kappa+1} g_2(x) \quad x \in L_2, \quad (31)$$

hvor kærnefunktionerne  $K_{21}(x, t)$  og  $K_{22}(x, t)$  bestemmes ved

$$K_{21}(x, t) = K_{12}(x, t) \quad (32)$$

$$K_{22}(x, t) = K_{11}(x, t) .$$

For det tilsvarende symmetriske problem angiver Ratwani og Erdogan [1973] kærnefunktioner, der svarer til (30) og (32) bortset fra det lineære led i  $(t-x)$ . Kærnerne er da ikke integrable.



ELASTISK HALVRUM

Et væsentligt specialtilfælde af det ovenfor behandlede problem er friktionsfri kontakt i forbindelse med et elastisk halvrum. Koordinatsystemet indlægges som vist på Fig. 3.

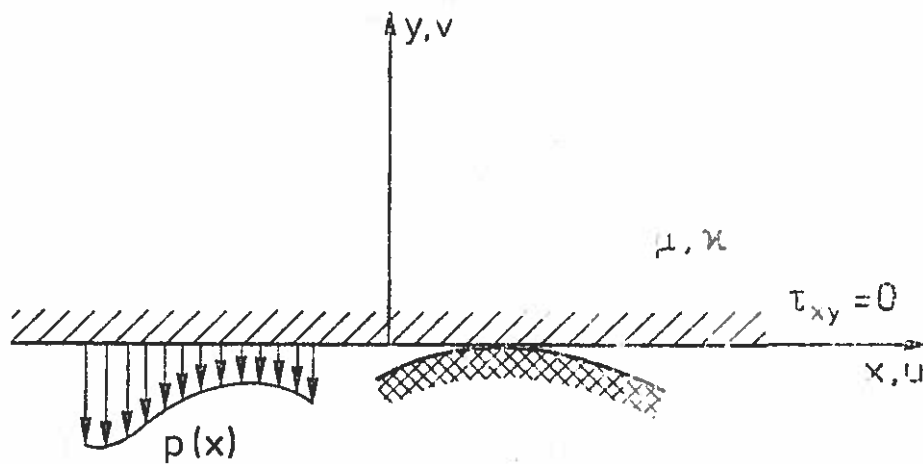


Fig. 3

Regningerne forløber som ovenfor, bortset fra at det ene sæt randbetingelser erstattes med krav om, at spændingerne forsvinder for  $y \rightarrow \infty$ . Løsningen til differentialligningen (6) og de deraf afledede løsninger til (5) kan i denne forbindelse mest hensigtsmæssigt angives ved

$$\begin{aligned}\bar{\sigma}_{xx}(\alpha, y) &= [-A_1(\alpha) + (2 - |\alpha|y)A_2(\alpha)]e^{-|\alpha|y} \\ \bar{\sigma}_{yy}(\alpha, y) &= [A_1(\alpha) + |\alpha|y A_2(\alpha)]e^{-|\alpha|y} \\ \bar{\sigma}_{xy}(\alpha, y) &= \text{sign} \alpha i [A_1(\alpha) - (1 - |\alpha|y)A_2(\alpha)]e^{-|\alpha|y} .\end{aligned}\tag{33}$$

Randbetingelserne er analoge med (14b), (15b) og (16b) .

$$\sigma_{xy}(x,0) = 0 \quad -\infty < x < \infty \quad (34)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} v(x,0) = g(x) \quad x \in L \quad (35)$$

$$\sigma_{yy}(x,0) = p(x) \quad -\infty < x < \infty \quad (36)$$

hvor  $p(x)$  er ukendt for  $x \in L$  .

Transformation af (36) og (34) giver i forbindelse med (33)

$$A_1(\alpha) = A_2(\alpha) = \bar{p}(\alpha) \quad (37)$$

Integralligningen, der bestemmer  $p(x)$  for  $x \in L$  , findes ved brug af (11) med  $\sigma_{xy} = 0$  .

$$\begin{aligned} \frac{8\pi\mu}{\kappa+1} g(x) &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} i \int_{-\infty}^{\infty} \text{sign}\alpha \bar{p}(\alpha) e^{-|\alpha|\epsilon} e^{-i\alpha x} d\alpha = \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} i \int_0^{\infty} [\bar{p}(\alpha) e^{-i\alpha x} - p(-\alpha) e^{i\alpha x}] e^{-\epsilon\alpha} d\alpha \quad . \end{aligned}$$

Heraf opnås den med (31) ækvivalente integralligning

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{p(t)}{t-x} dt = -\frac{4\pi\mu}{\kappa+1} g(x) \quad x \in L \quad (38)$$

Den analytiske løsning af (38) er velkendt og findes resumeret af Muskhelishvili [1958], § 88. Det er denne analytiske løsning, der danner grundlaget for numeriske metoder til løsning af integralligningssystemet (29)-(32) .

HERTZ' PROBLEM

Ovenfor er opstillet singulære integralligninger for tilfælde, hvor et elastisk legeme påvirkes gennem friktionsfri kontakt med ét eller flere stive legemer. Det er imidlertid muligt med simple midler at udvide problemkredsen til også at omfatte friktionsfri kontakt mellem elastiske legemer, når det om disse forudsættes, at de er af stor udstrækning i forhold til kontaktarealet, og at kontaktarealet tillige med et omgivende areal af samme størrelsesorden oprindeligt var tilnærmelsesvis plant. Herved fremkommer en plan generalisation af Hertz' problem.

Indledningsvis betragtes kontakt mellem to elastiske legemer som vist på Fig.4. Ved begyndende kontakt beskrives de to overflader ved kurverne  $y = G_1(x)$  henholdsvis  $y = G_2(x)$ . Ud fra disse dannes funktionen

$$g(x) = \frac{d}{dx} [ G_1(x) - G_2(x) ] \quad (39)$$

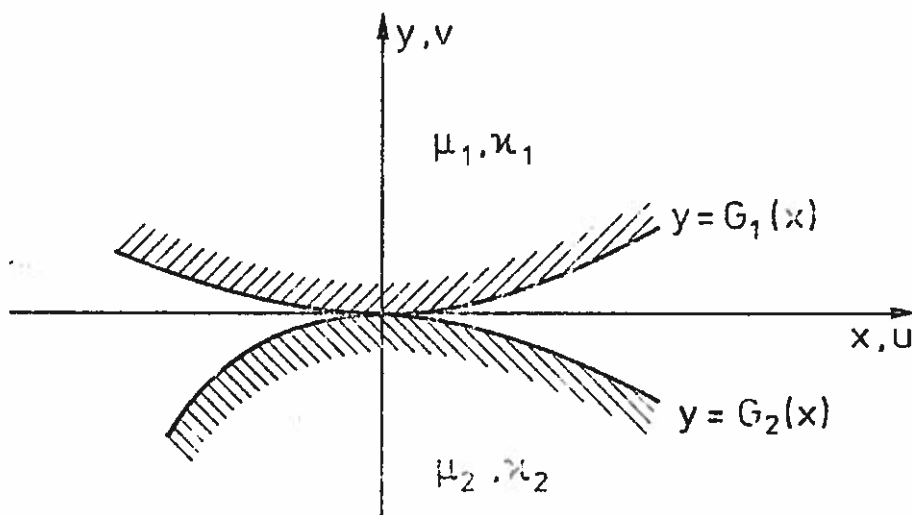


Fig. 4

Idet randene regnes ubelastede uden for kontaktintervallet  $L$ , og deres krumninger er små, fås følgende randbetingelser

$$\sigma_{xy}^1(x,0) = \sigma_{xy}^2(x,0) = 0 \quad -\infty < x < \infty \quad (40)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} [v_1(x,0) - v_2(x,0)] = -g(x) \quad x \in L \quad (41)$$

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{yy}^1(x,0) = \sigma_{yy}^2(x,0) = p(x) & \quad x \in L \\ \sigma_{yy}^1(x,0) = \sigma_{yy}^2(x,0) = 0 & \quad x \notin L \end{aligned} \right\} \quad (42)$$

Ved brug af løsningen for halvplanen fører randbetingelsen (41) til, at  $p(x)$  bestemmes ved

$$\left( \frac{\kappa_1 + 1}{4\mu_1} + \frac{\kappa_2 + 1}{4\mu_2} \right) \int_L \frac{p(t)}{t-x} dt = \pi g(x) \quad (43)$$

Det bemærkes, at (43) har samme form som (38); der er blot tale om en ændring af de elastiske konstanter. Som det umiddelbart ses, kan dette generaliseres til også at omfatte friktionsfri kontakt mellem en uendelig elastisk strimmel og elastiske legemer med næsten plan overflade.

Som eksempel betragtes situationen på Fig. 5, hvor en uendelig strimmel på oversiden belastes med et elastisk stempel, medens undersiden påføres givne normalspændinger,  $p_2(x)$ .

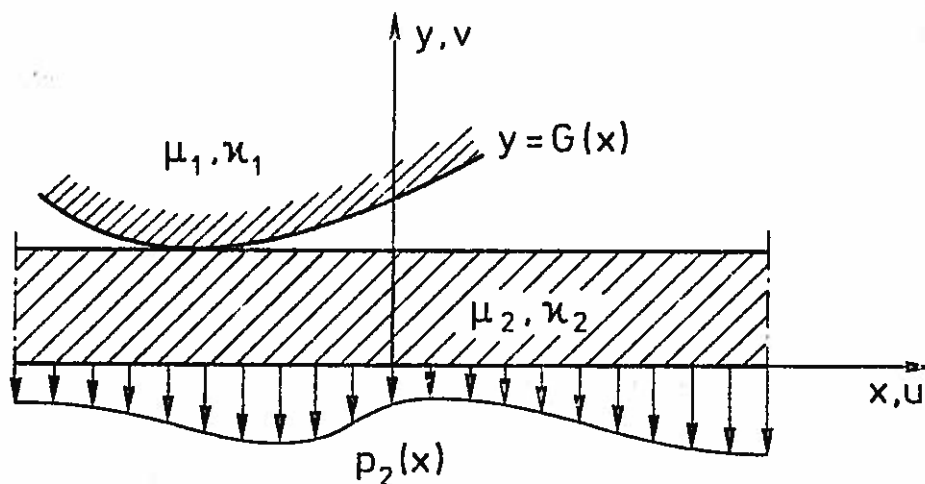


Fig. 5

Den ukendte kontaktspænding  $p_1(x)$  bestemmes da ved en randbetingelse af formen

$$\frac{\partial}{\partial x}[v_1(x,0) - v_2(x,0)] = -\frac{\partial}{\partial x} G(x) = -g(x) \quad . \quad (44)$$

Randbetingelsen (44) fører til en kombination af (29) og (38), hvorved  $p_1(x)$  bestemmes af:

$$\begin{aligned} & \left( \frac{\kappa_1 + 1}{4\mu_1} + \frac{\kappa_2 + 1}{4\mu_2} \right) \int_L \frac{p_1(t)}{t-x} dt + \frac{\kappa_2 + 1}{4\mu_2} \int_L K_{11}(x,t)p_1(t)dt = \\ & = \pi g(x) - \frac{\kappa_2 + 1}{4\mu_2} \int_{-\infty}^{\infty} K_{12}(x,t)p_2(t)dt \quad x \in L \quad . \end{aligned} \quad (45)$$

#### DE ELASTISKE KONSTANTERS INDFLYDELSE

De ovenfor behandlede problemer resulterer i singulære integralligninger til bestemmelse af ukendte kontaktspændinger. I en del tilfælde vil kontaktintervallerne tillige være ukendte. Disse bestemmes i så fald ud fra kendskab til de ved kontakten overførte kræfter. De hertil opstillede ligevægtsligninger indeholder ikke de elastiske konstanter, når de formuleres i kontaktspændingerne.

Det fremgår af (23), (18) og (7), at spændingerne i vilkårlige punkter af de elastiske legemer bestemmes ud fra kontaktspændingerne gennem relationer, der ikke indeholder de elastiske konstanter. Løsningens spændinger kan da kun afhænge af de elastiske konstanter gennem de kombinationer, hvori de indgår i integralligningerne. For hvert legeme indgår kun forholdet  $\mu/(\kappa + 1)$ , for hvilket det gælder at

$$\frac{8\mu}{\kappa + 1} = \begin{cases} \frac{E}{1-\nu^2} & \text{plan deformationstilstand} \\ E & \text{generaliseret plan spændingstilstand} \end{cases}$$

I forbindelse med modellforsøg kan det være af interesse at bemærke, at f.eks. ligning (43) åbner mulighed for på simpel måde at arbejde med ændrede elasticitetskonstanter eller ændret geometri i situationen på Fig.4. Der betragtes to situationer, a og b . Ud over almindelig geometrisk lighedannedhed med uændrede elasticitetskonstanter opnås for samme kontaktinterval følgende to simple sammenhænge,

$$\left( \frac{\kappa_1 + 1}{\mu_1} + \frac{\kappa_2 + 1}{\mu_2} \right)_a p_a(x) = \left( \frac{\kappa_1 + 1}{\mu_1} + \frac{\kappa_2 + 1}{\mu_2} \right)_b p_b(x) \quad (46)$$

$$g_a(x) = g_b(x)$$

eller

$$\left( \frac{\kappa_1 + 1}{\mu_1} + \frac{\kappa_2 + 1}{\mu_2} \right)_b g_a(x) = \left( \frac{\kappa_1 + 1}{\mu_1} + \frac{\kappa_2 + 1}{\mu_2} \right)_a g_b(x) \quad (47)$$

$$p_a(x) = p_b(x)$$

I (46) er geometrien bibeholdt, og alle spændinger ændret proportionalt, medens man i (47) opnår uændrede spændinger ved at ændre geometrien.

Et særligt tilfælde opstår i forbindelse med (43) , når  $g(x) \equiv 0$  . Kontaktarealet vil da ikke øges ud over det, der findes ved den første spændingsfri berøring. I så fald er spændingerne uafhængige af elasticitetskonstanterne.

En diskussion af tilsvarende forhold i forbindelse med formulering af kontaktproblemer ved komplekse potentialer er givet af Dundurs og Stippes [1970].

LITTERATUR

- Dundurs, J. and Stippes, M. [1970],  
 "Role of Elastic Constants in Certain Contact Problems",  
 J. Appl. Mech., Trans. ASME, 37: 965-970.
- Erdogan, F. [1969],  
 "Approximate Solution of Systems of Singular Integral  
 Equations",  
 SIAM J. Appl. Math. 17: 1044-1059.
- Erdogan, F. and Gupta, G.D., [1972],  
 "On the Numerical Solution of Singular Integral Equations",  
 Quarterly Appl. Math. 29: 525-534.
- Erdogan, F., Gupta, D.G. and Cook, T.S., [1973],  
 "Numerical Solution of Singular Integral Equations",  
Methods of Analysis and Solutions of Crack Problems,  
 G.C.Sih, Editor, Noordhoff International Publishing, Leyden,  
 The Netherlands.
- Muskhelishvili, N.I., [1953],  
Some Basic Problems of the Mathematical Theory of Elasticity.  
 P. Noordhoff, Groningen, The Netherlands.
- Muskhelishvili, N.I., [1958],  
Singular Integral Equations,  
 Wolters-Noordhoff, Groningen, The Netherlands.
- Ratwani, M. and Erdogan, F., [1973],  
 "On the Plane Contact Problem for a Frictionless Elastic  
 Layer",  
 bliver publiceret i Int. J. Solids, Structures.
- Sneddon, I.N., [1951],  
Fourier Transforms,  
 McGraw-Hill, New York.
- Wu, Ting-Shu and Chin, Y.P., [1967],  
 "On the Contact Problem of Layered Elastic Bodies",  
 Quarterly Appl. Math. 25: 233-242.

Structural Research Laboratory

Technical University of Copenhagen, Denmark

REPORTS

- |       |   |            |
|-------|---|------------|
| R 1.  | Askegaard, Vagn and P. Thoft-Christensen: Spændingsoptiske lag og tøjningsmålere. 1967.                                 | Out<br>pri |
| R 2.  | Møllmann, H.: The Principle of Virtual Work for Continuous Systems Derived by a Direct Method. 1968.                    |            |
| R 3.  | Askegaard, Vagn: Production and Application of Model Materials with Desired Physical Constants. 1968.                   |            |
| R 4.  | Møllmann, H.: The Analysis of Shallow Cables. 1968.   |            |
| R 5.  | Dyrbye, Claës: Damped Vibrations of Slender Beams. 1968.  | Out<br>pri |
| R 6.  | Møllmann, H.: Analysis of Plane Prestressed Cable Structures. 1969.   |            |
| R 7.  | Nielsen, Leif Otto: Beregning af bjælker og rammer dynamisk påvirket ud over det elastiske område. 1968.                | Out<br>pri |
| R 8.  | Bræstrup, Mikael W.: On the Theory of Plastic Plates. 1969.   | Out<br>pri |
| R 9.  | Nielsen, Leif Otto: Uniqueness Problems and Minimum Principles in the Dynamic Theory of Plasticity. 1969                | Out<br>pri |
| R 10. | Byskov, Esben: Two Nearly Polygonal Holes. Mathematical Crack Problems. 1969.   |            |
| R 11. | Bræstrup, Mikael W.: The Cosserat Surface and Shell Theory. 1970.   | Out<br>pri |
| R 12. | Askegaard, Vagn: Anvendelse af modelanalyse. 1970.  |            |
| R 13. | Solnes, Julius: The Spectral Character of Earthquake Motions. 1970.   | Out<br>pri |
| R 14. | Bræstrup, Mikael W.: Yield Lines in Discs, Plates and Shells. 1970.   | Out<br>pri |
| R 15. | Møllmann, J.: Beregning af hængekonstruktioner ved hjælp af deformationsmetoden. 1970.                                  | Out<br>pri |
| R 16. | Byskov, Esben: The Calculation of Stress Intensity Factors Using the Finite Element Method with Cracked Elements. 1970. |            |
| R 17. | Askegaard, V.: Grundlaget for adhæsion. 1970.   |            |
| R 18. | Summaries of Lecture Notes on Experimental Stress Analysis. 1970.   | Out<br>pri |
| R 19. | Sørensen, Hans Christian: Forskydning i jernbetonbjælker. 1970.   |            |
| R 20. | Sørensen, Hans Christian: Forskydningsforsøg med 12 jernbetonbjælker med T-tværsnit. 1971.                              |            |
| R 21. | Møllmann, H.: Analysis of Hanging Roofs Using the Displacement Method. 1971.  | Out<br>pri |
| R 22. | Haurbæk, Poul E.: Dæmpede svingninger i spændbetonbjælker. Svingningsforsøg med simpelt understøttede bjælker.          | Pul<br>per |



- R 23. Bræstrup, M.W.: Yield-line Theory and Limit Analysis of Plates and Slabs. 1971.
- R 24. Dyrbye, Claës: Pendulum Vibrations. 1971. Out of pri
- R 25. Møllmann, H.: Analytical Solution for a Cable Net over a Rectangular Plan. 1971.
- R 26. Nielsen, J.: Silotryk. 1972.
- R 27. Askegaard, V., M. Bergholdt and J. Nielsen: Problems in connection with pressure cell measurements in silos. 1972.
- R 28. Ramirez, H. Daniel: Buckling of plates by the Ritz methods using piecewise-defined functions. 1972.
- R 29. Thomsen, Kjeld & Henning Agerskov: Behaviour of butt plate joints in rolled beams assembled with prestressed high tensile bolts. 1972.
- R 30. Julius Solnes and Ragnar Sigbjörnsson: Structural response to stochastic wind loading. 1972.
- R 31. H.J. Larsen og H. Riberholt: Forsøg med uklassificeret konstruktionstræ. 1972.
- R 32. Vagn Askegaard: Programme and methods of teaching of experimental mechanics. 1972. Out of print
- R 33. Julius Solnes and Ole Holst: Weight optimization of framed structures under earthquake loads. 1972.
- R 34. Rostam, Steen and Esben Byskov: Cracks in Concrete Structures. A Fracture Mechanics Approach. 1973.
- R 35. Sørensen, Hans Chr.: Efficiency of Bent-up Bars as Shear Reinforcement. 1973.
- R 36. Krenk, Steen: Singulær integralformulering af nogle plane friktionsfri kontaktproblemer. 1973.