

AFDELINGEN FOR  
BÆRENDE KONSTRUKTIONER  
DANMARKS TEKNISKE HØJSKOLE



STRUCTURAL RESEARCH LABORATORY  
TECHNICAL UNIVERSITY OF DENMARK

Esko Theilgaard

INTEGRALLIGNINGSMETODER ANVENDT PÅ  
PROBLEMER INDEN FOR BYGNINGSSTATIKKEN

RAPPORT NR. R 38 1973

Esko Theilgaard

Integralligningsmetoder anvendt på problemer inden for bygningsstatikken.



Forord.

Denne afhandling er udarbejdet som led i betingelserne for erhvervelsen af den tekniske licentiatgrad.

Studiet er udført hos lektor lic. techn. H. Møllmann ved Afdelingen for Bærende Konstruktioner, Danmarks tekniske Højskole. I forbindelse med udarbejdelsen af afhandlingen har jeg herudover modtaget værdifuld bistand fra en lang række af afdelingens medarbejdere, især ingeniørassistent B. Leisten og fru Inge Sørensen.

København, februar 1973.

Esko Theilgaard.

Indholdsfortegnelse

	Forord	Side	1
	Indholdsfortegnelse	"	2
1.	Afhandlingens omfang.	"	3
2.0	Definitioner	"	5
2.1	Bogstav- og symbolliste	"	7
3.	En kort omtale af integralligninger	"	11
4.0	Benyttelse af integralligningsmetoder til løsning af Laplace's ligning	"	12
4.1	Harmoniske funktioner	"	12
4.2.0	Problemer, der fører til Laplace's ligning, og de dertil svarende randbetingelser	"	28
4.2.1	Fri vridning af prizmer	"	29
4.2.2	Bøjning med forskydning af bjælker belastet på endefladerne	"	33
4.2.3	Elliptiske paraboloideskaller beregnet ved hjælp af membranteorien	"	39
4.3	Forsøg med allerede kendte metoder	"	48
4.4	Den anbefalede metode	"	57
4.5	Forslag til yderligere undersøgelser	"	70
4.6	Konklusion	"	71
5.0	Benyttelse af integralligningsmetoder til løsning af den biharmoniske ligning	"	73
5.1	Den biharmoniske ligning	"	73
5.2.0	Problemer der fører til den biharmoniske ligning	"	74
5.2.1	Det plane elasticitetsproblem - skiver	"	75
5.2.2	Bøjning af plader	"	81
5.3	Forsøg med allerede kendte metoder	"	82
5.4	Den anbefalede metode	"	89
5.5	Forslag til yderligere undersøgelser	"	110
5.6	Konklusion	"	111
6.	Sammenfattende konklusion	"	112
	Dansk og engelsk resumé	"	113+114
	Litteratur	"	115

## 1. Afhandlingens omfang.

Denne afhandling omhandler benyttelsen af reelle integralligninger til løsning af en række problemer inden for elasticitetsteorien og statikken, hvis matematiske behandling fører til Laplace's ligning eller den biharmoniske ligning.

Afhandlingen er i hovedtrækkene delt op i 3 afsnit:

- I. Indførelse af de nødvendige definitioner og en kort omtale af integralligninger.
- II. En omtale af problemer, der fører til Laplace's ligning, samt integralligningsmetoder til løsning af denne.
- III. En omtale af problemer, hvis matematiske behandling fører til den biharmoniske ligning, samt de tilsvarende løsningsmetoder.

Integralligningsmetoder har i forhold til de mere almindeligt anvendte finite difference og finite element metoder fordelene af, at det kun er på randen af området og ikke, som ved de sidstnævnte metoder, også inde i området, at man kræver visse betingelser opfyldt. Det nødvendige antal ligninger, der skal løses, begrænses derved ganske betydeligt. På den anden side bliver matricen fuld, asymmetrisk og i visse tilfælde ill-conditioned. Ved integralligningsmetoder kan man desuden håbe på bedre nøjagtighed og sidst, men ikke mindst, store lettelser i den nødvendige beskrivelse af uregelmæssigt formede områder.

Om hovedafsnittene kan siges følgende:

ad I. Afsnittet om integralligninger skal blot betragtes som en introduktion. Under den senere anvendelse benyttes integralligningsbegrebet langt fra ortodokst, idet tæthedskurven ikke absolut kræves at ligge på områdets rand, og idet man tillader, at tæthedsfunktionen degenererer til koncentrerede tætheder virkende i punkter på tæthedskurven.

ad II. Af de problemer, der munder ud i løsningen af Laplace's

ligning, må beregningen af elliptiske paraboloideskaller betragtes som det vanskeligste, da det kræver kendskab til de dobbelte afledede af spændingsfunktionen for at finde spændingerne i skallen. Der omtales flere metoder til løsning af Laplace's ligning. Overvejelserne munder ud i anbefalingen af en metode af delvis egen opfindelse.

ad III. Ved den biharmoniske ligning er det specielt beregningen af skiver, der er behandlet, idet pladeberegning kan formuleres nogenlunde tilsvarende beregningen af skiver. Der foreslås også her en ny metode, som har mange træk fælles med den anbefalede metode under pkt. II, og som er af samme type, som den af Oliveira foreslåede [0-1].

Det er specielt reelle integralligninger, der behandles. Den russiske skole, der som sine fornemste repræsentanter har Mikhlin, Muskhelishvili og Sherman, og som benytter kompleks funktionsteori i vid udstrækning, berøres kun perifert.

Hovedsigtet med arbejdet har været at finde frem til et hjælpemiddel, der også kan benyttes af den praktiserende ingeniør, hvorfor sophistikated matematik bevidst er søgt undgået, og den yderste grad af enkelhed er tilstræbt. Målet med dette arbejde er at søge praktisk anvendelige løsningsmetoder, hvorfor opgaven har været at finde 'gode' metoder, a) der kan behandle nogenlunde generelle områdeformer, b) der giver mulighed for frembringelse af generelle regnemaskineprogrammer, og c) som er så simple som overhovedet muligt. Som en første betingelse for, at en metode er 'god', kræves, at den giver gode resultater ved simple problemer. Samme slags tanker har dog ikke helt gjort sig gældende ved udarbejdelsen af selve afhandlingen.

## 2.0 Definitioner.

Ved et område forstås et areal, der er begrænset af en eller flere lukkede kurver. Hvis et område kun er begrænset af én lukket kurve, taler man om et enkelt sammenhængende område. Hvis begrænsningen består af flere lukkede kurver, kaldes området sammensat. I dette arbejde betragtes udelukkende begrænsede områder.

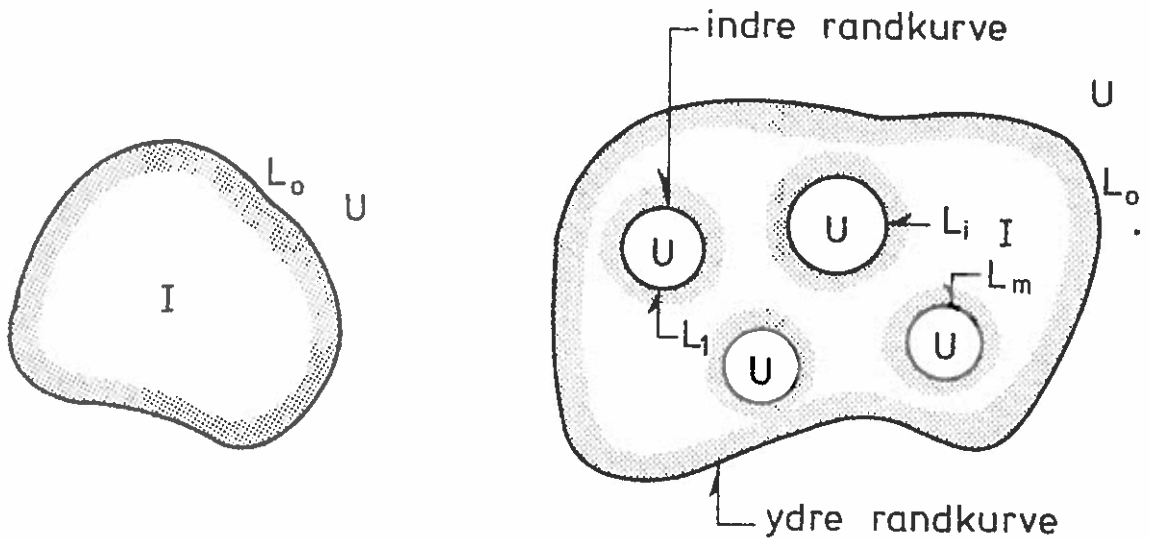


fig. 2.1 Et enkelt sammenhængende område.

fig. 2.2 Et  $(m+1)$ -gange sammensat område.

Det  $(m+1)$ -gange sammensatte områdes rand  $L$  består af  $m+1$  lukkede kurver  $L_0, L_1 \dots L_i \dots L_m$ , hvor  $L_0$  er den yderste. Selve området, der ikke indbefatter randen, benævnes  $I$ , og hvad der ligger uden for  $I + L$ , kaldes  $U$ . Et område betegnes som indre med hensyn til en lukket kurve, hvis det ligger inden for kurven, og ydre, hvis det ligger uden for kurven. Et område kan altså både være indre eller ydre, afhængig af hvilken randkurve der omtales.

Indenfor eller på hver indre randkurve  $L_i$  er der en tæthedskurve  $l_i$ . Tæthedskurven udenfor eller på den ydre randkurve  $L_0$  kaldes  $l_0$ , og den samlede tæthedskurve kaldes  $l = l_0 + l_1 \dots + l_m$ .

På nedenstående figur vises de størrelser, der benyttes mest i afhandlingen. Der opereres overalt med højredrejede koordinatsystemer, og vinkler regnes altid positive målt mod uret.



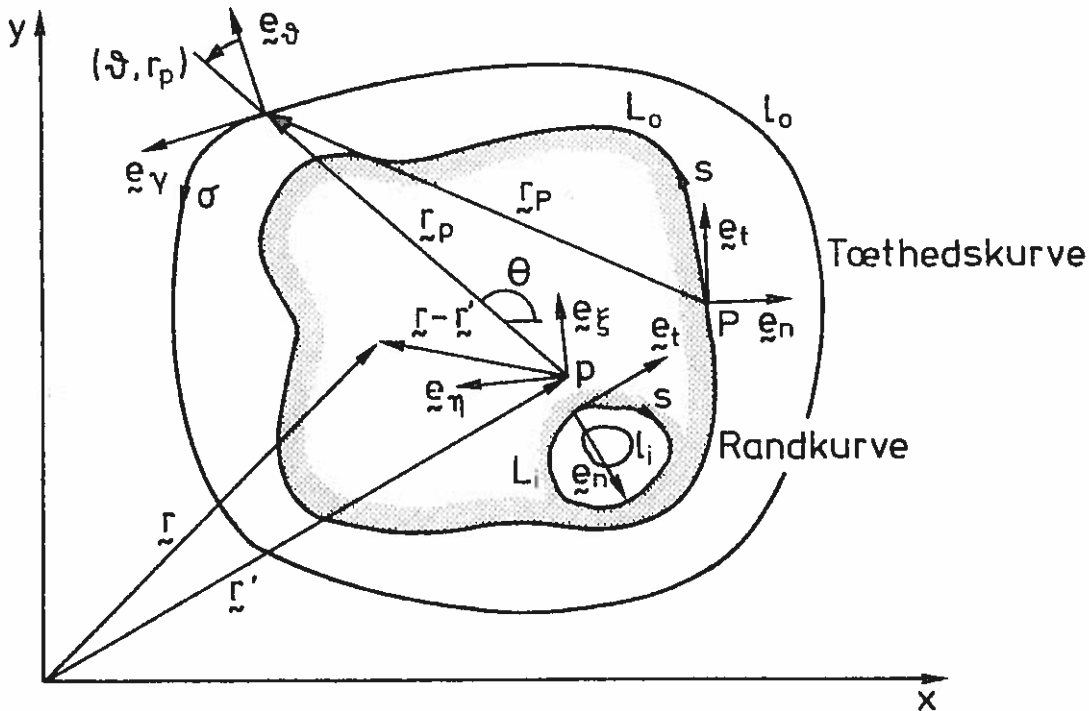


fig. 2.3 Signaturforklaring.

Vektorer angives ved hjælp af tegnet  $\sim$  (eks.  $\underline{r}$ ). Størrelsen af vektorer angives, hvor forveksling ikke er mulig, uden  $\sim$  og ellers således  $|\sim|$  (eks.  $r'$  eller  $|\underline{r}'|$ ). Det pkt. hvori funktionsværdien søges - her og i det følgende kaldet funktionsværdipunkt - har stedvektoren  $\underline{r}'$  og benævnes  $p$ , hvis det ligger inde i området, og  $P$ , hvis det ligger ude på randen. Inde i området tilknyttes funktionsværdipunktet to på hinanden vinkelrette basisvektorer  $\underline{e}_\xi$  og  $\underline{e}_\eta$ , der angiver et lokalt koordinatsystem  $[\xi, \eta]$ . På randen tilknyttes punktet det lokale koordinatsystem  $[n, t]$ , hvor  $\underline{e}_n$ , der er normal til randkurven, peger bort fra området. Punktets placering måles på randen med buelængden  $s$ , der regnes voksende i  $\underline{e}_t$ 's retning.

Et vilkårligt punkt har stedvektoren  $\underline{r}$ ; hvis punktet ligger på tæthedskurven, tilknyttes det et lokalt kartesisk koordinatsystem  $[v, \gamma]$ , hvor basisvektoren  $\underline{e}_v$  er normal til tæthedskurven og peger bort fra området. Punktets placering på tæthedskurven måles ved buelængden  $\sigma$ , der regnes voksende i  $\underline{e}_\gamma$ 's retning. Vektoren  $\underline{r} - \underline{r}'$ , fra funktionsværdipunktet til punktet på tæthedskurven, benævnes  $\underline{r}_p$ ,

hvis funktionsværdipunktet ligger inde i området, og  $r_p$  hvis dette ligger på randkurven. Disse vektorers vinkel med en vilkårlig retning kaldes  $\theta$ , hvor den vilkårlige retning afhænger af det vilkårlige punkts beliggenhed.

Vinklen fra retning  $v$  til retning  $k$  målt positivt mod uret kaldes  $(v,k)$  (eks.  $(v,r_p)$ ).

### 2.1 Bogstav- og symbolliste.

$A, A_p$	Airy's spændingsfunktion
$A_i, A_{ij}$	Konstant
$B, B_j^i$	Biharmonisk funktion
$C, C_{ij}$	Konstant
$D$	$\frac{E \cdot (\text{tykkelse})^3}{12(1-\nu^2)}$ - Bøjningsstivheden for plader.
$E$	Elasticitetsmodulen
$\underline{E}$	Enhedsmatricen
$E_i$	Funktion af 2 variable
$F$	Areal
$G$	Forskydningsmodulen
$G_i$	Greensk funktion
$H, H_i$	Harmonisk funktion
$H^k, H_i^k$	Harmonisk konjugeret funktion
$I$	Indre område
$I_p$	$\int_I (x^2+y^2)dF$ - Det polære inertimoment.
$I_v$	$\frac{M_v}{G_v}$ - Vridningsinertimomentet
$I_x$	$\int_I y^2 dF$ - Bøjningsinertimomentet omkring x-aksen
$I_y$	$\int_I x^2 dF$ - Bøjningsinertimomentet omkring y-aksen
$I_{xy}$	$\int_I xy dF$ - Centrifugalmomentet
$K$	$K(s, \sigma)$ - Kerne
$K_{ij}$	$K(s_i, \sigma_j)$
$L$	Hele randkurven

$L_i$	Indre randkurve
$L_o$	Den ydre randkurve
$L^1$	Infinitesimal del af randkurven
$L_i(\sigma)$	Lagrange's polynomium
$M_v$	Vridende moment på prismatiske legemer
$M_i$	Bøjende moment i plade
$M_{ij}$	Vridende moment i plade
$M_b, M_b^p$	Moment i z-aksens retning om b af kræfter på et snit a-b
$N_{ij}^*$	Snitkræfter i skal
$N_{ij}, N_{ij}^p$	Snitkræfter i skal nedprojiceret på xy-planen
$P$	Funktionsværdipunkt på randen
$P_i$	Kraftresultant på et snit eller en enkelkraft
$Q_i$	Forskydningskraft
$R$	Radius
$T, T_i$	Løsning til Poissons ligning
$U$	Ydre område
$V_i$	Vægt
$X, Y, Z$	Belastning på skal pr. nedprojiceret fladeenhed
$X, Y$	Belastning på en skive pr. tykkelsen
$W$	Diskretiseret kerne
$c, c_i$	Funktion kun afhængig af stedet på tæthedskurven
$e_i$	Enhedsvektor
$f, f_i$	Funktion af 1 variabel
$g$	Funktion af 2 variable
$h_i$	Funktion af 1 variabel
$l$	Hele tæthedskurven
$l_i$	Indre tæthedskurve
$l_o$	Den ydre tæthedskurve

$n$	Koordinat på normalen til randkurven
$p$	Funktionsværdipkt. inde i området
$p_i$	Komponent af belastning pr. nedprojiceret længdeenhed af et snit
$q$	Fiktiv belastning
$q_i$	Tæthedsfunktion ved det biharmoniske tilfælde
$\underline{r}, \underline{r}_i$	Stedvektor til et vilkårligt punkt
$\underline{r}_h$	Radiusvektor i et $(r_h, \theta_h)$ koordinatsystem med udgangspunkt i et hjørne
$\underline{r}'$	Stedvektor til et funktionsværdipkt.
$\underline{r}_p$	$\underline{r} - \underline{r}'$ , hvor $\underline{r}$ ligger på tæthedskurven og $\underline{r}'$ i området.
$\underline{r}_P$	$\underline{r} - \underline{r}'$ , hvor $\underline{r}$ ligger på tæthedskurven og $\underline{r}'$ på randen
$s, s_i$	Buemål langs randkurven
$t$	Koordinat på tangenten til randkurven
$t_j$	$\frac{j\pi}{\alpha}$
$u_i$	Flytning i $i$ -aksens retning
$v$	Vinkeldrejning pr. længdeenhed
$\underline{w}$	Vektorfunktion
$x, y, z$	Koordinater
$x_f, y_f$	Koordinater til forskydningscentret
$x^*, y^*$	Koordinater i et lokalt retvinklet koordinatsystem
$x_h, y_h$	Koordinater i et retvinklet koordinatsystem med udgangspunkt i et hjørne
$z, z_i$	$z_i = x_i + iy_i$ , variable i den komplekse plan
$z', z'_i$	Funktionsværdipkt. i den komplekse plan
$\alpha, \beta$	Vinkel
$\gamma$	Koordinat på tangent til tæthedskurven
$\epsilon$	Infinitesimal strækning
$\epsilon_{ij}$	Tøjningskomponent
$\eta$	Koordinat i det lokale koordinatsystem $[\xi, \eta]$
$v$	Koordinat på normal til tæthedskurven

$\lambda_1$	Konstant, der i visse tilfælde kan betragtes som egenværdi
$\mu$	Tæthedsfunktion ved det harmoniske tilfælde
$\nu$	Poissons forhold
$\xi$	Koordinat i det lokale koordinatsystem $[\xi, \eta]$
$\rho$	Krumningsradius
$\sigma$	Buemål langs tæthedskurven
$\sigma_{ij}$	Spændingskomposant
$\tau$	3-4 $\nu$
$\varphi$	Analytisk funktion
$\varphi^*$	Entydig analytisk funktion
$\varphi_x, \varphi_y$	Vinkler
$\varphi_{ij}$	Vinkelændring mellem i- og j-aksen
$\omega$	Rotation
$\theta, \theta_i$	Vinkel
$\theta_h$	Vinkel i et $[r_h, \theta_h]$ koordinatsystem med udgangspkt. i et hjørne
$(v, w)$	Vinkel mellem vektorerne $\underline{v}$ og $\underline{w}$ målt positivt fra $\underline{v}$ til $\underline{w}$
$\Delta \sigma_i$	Delinterval
$\mathbb{M}$	Stort bogstav angiver, at der er tale om en matrice
$\underline{m}$	Lille bogstav angiver, at der er tale om en vektor
$m,  \underline{m} $	Længde af vektor $\underline{m}$
$\text{Re}(\phi)$	Realdelen af $\phi$
$\text{Im}(\phi)$	Imaginærdelen af $\phi$
$\ln$	Naturlig logaritme
$\log$	Logaritme til komplekse tal
[B-5]	Litteraturhenvisning
$t, \overset{t}{t}$	Index, der angiver størrelser i det transformerede rum
$p, \overset{p}{p}$	Index, der angiver partikulærløsning
H	Index, der angiver homogen løsning

### 3. En kort omtale af integralligninger.

De integralligninger, man oftest benytter inden for elasticitets-teorien og statikken, er de såkaldte Fredholm integralligninger af første og anden art.

En integralligning af første art har formen

$$\int_a^b K(s, \sigma) \mu(\sigma) d\sigma = f(s). \quad (3.1)$$

En integralligning af anden art har formen

$$\mu(s) - \lambda \int_a^b K(s, \sigma) \mu(\sigma) d\sigma = f(s). \quad (3.2)$$

I ovenstående ligninger er  $s$ ,  $\sigma$ ,  $a$  og  $b$  reelle, medens  $\lambda$ ,  $\mu$ ,  $f$  og  $K$  enten er reelle eller komplekse.  $s$  og  $\sigma$  er variable,  $a$ ,  $b$  og  $\lambda$  er konstanter,  $K$  og  $f$  er kendte funktioner, medens  $\mu$  er den ubekendte funktion, der søges.

Hvis  $K$  er kvadratisk integrabel, kaldes ligningerne for Fredholm integralligninger af henholdsvis første og anden art. At  $K$  er kvadratisk integrabel, vil sige, at nedenstående integrale har endelige værdier.

$$\int_a^b \int_a^b |K(s, \sigma)|^2 d\sigma ds. \quad (3.3)$$

$K$  vil fremover blive kaldt kernen, medens  $\mu$  vil blive benævnt tæthedsfunktionen.

En analytisk løsning af ligningerne (3.1) og (3.2) vil som regel være umulig, hvorfor numeriske metoder må bringes i anvendelse.

Numerisk kan man f.eks. tænke sig at løse ligningerne ved at ændre integralerne til en summation over  $m$  delintervaller og kræve ligningerne opfyldt i de  $m$  delintervallers midtpunkter. Man får ved at benytte den simpleste kvadraturformel (rektangelformlen) nedenstående ligningssystemer.

$$\sum_{i=1}^m K(s_j, \sigma_i) \mu(\sigma_i) \Delta\sigma_i = f(s_j) \quad j = 1, 2, \dots, m \quad (3.4)$$

$$\mu(s_j) - \lambda \sum_{i=1}^m K(s_j, \sigma_i) \mu(\sigma_i) \Delta\sigma_i = f(s_j) \quad j = 1, 2, \dots, m \quad (3.5)$$

$\Delta\sigma_1$  er intervalllængderne, og  $\sigma_1$  er intervalmidpunkterne. Punkterne  $s_j$ , hvor ligningerne kræves opfyldt, kaldes 'nodal points', og vil i ovenstående udtryk være identiske med  $\sigma_j$ . Man kunne også tænke sig at benytte andre kvadraturformler som f.eks. Simpsons formel eller Gauss kvadraturformler - i øvrigt henvises til [F-4] og [V-1].

Ovenstående ligninger (3, 4-5) kan på matrixform skrives

$$\underline{K} \underline{\mu} = \underline{f} \quad (3.6)$$

$$\underline{\mu} - \lambda \underline{K} \underline{\mu} = (\underline{E} - \lambda \underline{K}) \underline{\mu} = \underline{f}, \quad (3.7)$$

hvor  $\underline{E}$  er enhedsmatricen.

For at ligningerne (3.1-2) skal have entydige løsninger, er det nødvendigt, at de tilsvarende homogene ligninger ikke har nogen egentlige løsninger, altså at

$$\int_a^b K(s, \sigma) \mu(\sigma) d\sigma = 0 \quad (3.8)$$

$$\mu(s) - \lambda \int_a^b K(s, \sigma) \mu(\sigma) d\sigma = 0 \quad (3.9)$$

ikke har andre løsninger end  $\mu(s) \equiv 0$ . De værdier af  $\lambda$  i ligning (3.9), for hvilke der findes egentlige løsninger, kaldes egenverdier. Hvis der er nogen egentlige løsninger, må man indføre ekstra betingelser.

For ligningerne (3.6) og (3.7) gælder det tilsvarende, at de kun har entydige løsninger, hvis de tilsvarende homogene ligninger (3.10) og 3.11) kun har løsningen  $\underline{\mu} = \underline{0}$ .

$$\underline{K} \underline{\mu} = \underline{0} \quad (3.10)$$

$$(\underline{E} - \lambda \underline{K}) \underline{\mu} = \underline{0} \quad (3.11)$$

Man bemærker ligheden med integralligningerne. Integralligningerne, der omtales i det følgende, fremkommer således:

Den harmoniske eller biharmoniske funktion, der ønskes fundet, søges dannet som en sum af harmoniske henholdsvis biharmoniske funktioner, frembragt ved hjælp af kildefunktionen  $\mu(\sigma) \cdot K(\sigma, s)$ , hvor  $\sigma$  er punkter på tæthedskurven. Tæthedsfunktionen  $\mu(\sigma)$  søges

fundet, således at visse randbetingelser er opfyldt. Tæthedskurven er traditionelt lig områdets randkurve, og i det tilfælde er der for flere problemer angivet beviser for den entydige eksistens af løsninger.

Ved den numeriske behandling tvinges man til at foretage en diskretisering af sit system. Det diskretiserede system vil som oftest komme til at indeholde singulariteter, der ikke findes i det reelle system. F.eks. tillader Jaswon og Ponter [J-1] ved fri vridning af prismatiske legemer, at tæthedsfunktionen kan variere diskontinuert i intervaldelepunkterne. Da tæthedsfunktionen, bortset fra en faktor og et lineært led, er lig flytningen i frembringerretningen, vil det sige, at denne flytning i et vist antal punkter langs randen forudsættes at variere diskontinuert. Virkningen af sådanne singulariteter kan formindskes ved at lægge tæthedskurven uden for randen, hvilket imidlertid også indebærer visse ulemper. Endelig kan tæthedskurven bestå af et endeligt antal kurvestykker eller et begrænset antal punkter. Herved har man fjernet sig temmelig langt fra begrebet integralligninger og er kommet mere over i begrebet kollokationsmetoder. Imidlertid fremkommer der ved diskretiseringen af integralligningerne en slags kollokationsmetode, og hvor grænsen ligger mellem de 2 slags metoder, må være en definitionssag. Undertegnede regner alt det ovenstående som hørende med til integralligningsmetoderne.

Denne omtale af integralligninger er kun ment som en introduktion til emnet. Yderligere interesserede henvises til [L-3] og [Y-1].



#### 4.0 Benyttelse af integralligningsmetoder til løsning af Laplace's ligning.

I det følgende introduceres de funktioner, der opfylder Laplace's ligning - de harmoniske funktioner. Det vises, hvorledes disse søges dannet ud fra en sum af harmoniske funktioner, der ved en grænseovergang går over i et integrale. De væsentligste randbetingelser omtales, og den harmoniske funktions egenskaber i et hjørne belyses. Derefter gennemgås de statiske og elasticitets-teoretiske problemer, der fører til Laplace's ligning, samt de forsøg der er gjort med allerede kendte metoder - hvorefter en ny og (efter forfatterens mening) meget lovende metode udvikles. Til slut omtales de undersøgelser, som forfatteren synes burde foretages med den sidstnævnte metode.

#### 4.1 Harmoniske funktioner.

I dette kapital introduceres harmoniske funktioner, og det vises, hvorledes de 2 vigtigste problemer i forbindelse med dem - Dirichlets problem og Neumann's problem - kan formuleres ved hjælp af integralligninger.

Laplace's ligning lyder i henholdsvis retvinklede og polære koordinater

$$\Delta H = \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H}{\partial y^2} = 0 \quad (4.1)$$

$$\Delta H = \frac{\partial^2 H}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial H}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 H}{\partial \theta^2} = 0. \quad (4.2)$$

En funktion  $H$ , der opfylder Laplace's ligning, siges at være harmonisk.

Ofte ønsker man at løse Poissons ligning:

$$\Delta T = g(x,y), \quad (4.3)$$

hvor  $g$  er en kendt funktion. Den principielle løsning af dette problem er

$$\Delta T = \Delta(H + T_p) = g, \quad (4.3a)$$

hvor  $\Delta H = 0$ , og  $\Delta T_p = g$ .  $T_p$ , den partikulære løsning, vælges således, at Poissons ligning tilfredsstilles i området, hvorefter  $H$ , den homogene løsning, bestemmes således, at randbetingelserne bliver tilfredsstillet. Generelt kan man som partikulærløsning vælge

$$T_p(z') = \frac{1}{2\pi} \int_I g(z) \cdot \ln |z - z'| dF \quad (4.4)$$

$\frac{1}{2\pi} \ln |z - z'|$  er den Greenske funktion for Laplace's ligning. Som oftest vil man være i stand til at gætte en partikulær løsning, hvorved man slipper for at udregne det ikke særligt behagelige fladeintegral.

For en analytisk kompleks funktion  $H(x, y) + i H^k(x, y)$  gælder de såkaldte Cauchy-Riemanske differentiaalligninger [A-1]:

$$\frac{\partial H}{\partial x} = \frac{\partial H^k}{\partial y} \quad (4.5)$$

$$\frac{\partial H}{\partial y} = - \frac{\partial H^k}{\partial x} \quad (4.6)$$

og følgende

$$\Delta H = 0 \quad (4.7)$$

$$\Delta H^k = 0 \quad (4.8)$$

Det ses, at både real og imaginærdelen er harmoniske.  $H^k$  er den såkaldte harmonisk konjugerede til  $H$  og kan på entydig måde dannes ud fra kendskabet til  $H$  bortset fra en konstant  $C$ .

$$H^k = \int \frac{\partial H^k}{\partial x} dx + \int \frac{\partial H^k}{\partial y} dy + C = \int - \frac{\partial H}{\partial y} dx + \int \frac{\partial H}{\partial x} dy + C \quad (4.9)$$

Da der er tale om totale differentiale, er integrationsvejen ligegyldig.

Ud fra punkterne  $z$  og  $z'$  i den komplekse  $(x, y)$ -plan, der svarer til  $z$  og  $z'$ , kan man danne følgende analytiske udtryk:

$$z - z' = (x - x') + i(y - y') = r_p e^{i\theta} \quad (4.10)$$

$$\log \left( \frac{1}{r_p} e^{-i\theta_0} (z - z') \right) = \ln \frac{r_p}{r_p} + i(\theta - \theta_0) \quad (4.11)$$

$$\frac{e^{i\theta_0}}{(z - z')} = \frac{1}{r_p} e^{-i(\theta - \theta_0)} = \frac{\cos(\theta - \theta_0)}{r_p} - i \frac{\sin(\theta - \theta_0)}{r_p} \quad (4.12)$$

hvor  $C$  og  $\theta_0$  er reelle konstanter.

Den førømtalte harmoniske funktion kan søges opbygget som en sum af harmoniske funktioner, der fremkommer ved at inddle tæthedskurven i  $m$  delintervaller og regne  $\theta$  og  $r_p$  fra midten af disse - f.eks. ved at bruge de harmoniske funktioner fra ligningerne (4.11) og (4.12).

$$H_1 = \sum_{i=1}^m V_i \ln \frac{r_{pi}}{C_i} \quad (4.13)$$

$$H_2 = \sum_{i=1}^m V_i (\theta_i - \theta_{oi}) \quad (4.14)$$

$$H_3 = \sum_{i=1}^m V_i \frac{\cos(\theta_i - \theta_{oi})}{r_{pi}} \quad (4.15)$$

$$H_4 = \sum_{i=1}^m V_i \frac{-\sin(\theta_i - \theta_{oi})}{r_{pi}} \quad (4.16)$$

Erstatter man vægtene  $V_i$ , der er reelle tal, med  $\mu_i(\sigma_i)\Delta\sigma_i$ , hvor  $\Delta\sigma_i$  er intervalllængden, og lader man  $m$  gå imod  $\infty$ , således at  $\Delta\sigma_i$  går imod nul, fås

$$H_1(p) = \int_1 \mu(\sigma) \ln \frac{r_p(p, \sigma)}{c(\sigma)} d\sigma = \int_1 \mu(\sigma) \ln r_p(p, \sigma) d\sigma + C_1 \quad (4.17)$$

$$H_2(p) = \int_1 \mu(\sigma) (\theta(p, \sigma) - \theta_0(\sigma)) d\sigma = \int_1 \mu(\sigma) \theta(p, \sigma) d\sigma + C_2 \quad (4.18)$$

$$H_3(p) = \int_1 \mu(\sigma) \frac{\cos(\theta(p, \sigma) - \theta_0(\sigma))}{r_p(p, \sigma)} d\sigma \quad (4.19)$$

$$H_4(p) = -\int_1 \mu(\sigma) \frac{\sin(\theta(p, \sigma) - \theta_0(\sigma))}{r_p(p, \sigma)} d\sigma, \quad (4.20)$$

hvor  $C_1$  og  $C_2$  er konstanter. Man bemærker, at  $H_1$  og  $H_2$ , henholdsvis  $H_3$  og  $H_4$  er konjugerede harmoniske funktioner, og at 'konstanterne'  $\theta_0$  og  $c$  udelukkende er funktioner af  $\sigma$ .  $\theta_0$  kan derfor vælges således, at  $(\theta - \theta_0)$  bliver det samme som vinklen  $(v, r_p)$  (se fig. 2.3). Eftersom  $\ln r_p + i\theta$  er analytisk, er

$$\frac{\partial \ln r_p}{\partial v} = \frac{\partial \theta}{\partial \sigma}, \quad (4.21)$$

og da

$$\frac{\partial \ln r_p}{\partial v} = \frac{\partial \ln r_p}{\partial r_p} \frac{\partial r_p}{\partial v} = \frac{1}{r_p} \cos(v, r_p) \quad (4.22)$$

fås

$$\begin{aligned} H_3 &= \int_1 \mu(\sigma) \frac{\cos(v, r_p)}{r_p} d\sigma = \int_1 \mu(\sigma) \frac{\partial \theta}{\partial \sigma} d\sigma = \int_1 \mu(\sigma) d\theta \\ &= \operatorname{Im} \left( \int_1 \mu(\sigma) d \log(z-z') \right) = \operatorname{Im} \left( \int_1 \frac{\mu(z)}{(z-z')} dz \right) \end{aligned} \quad (4.23)$$

$$\begin{aligned} H_4 &= -\int_1 \mu(\sigma) \frac{\sin(v, r_p)}{r_p} d\sigma = -\int_1 \mu(\sigma) \frac{\partial \ln r_p}{\partial \sigma} d\sigma = -\int_1 \mu(\sigma) d \ln r_p \\ &= -\operatorname{Re} \left( \int_1 \mu(\sigma) d \log(z-z') \right) = -\operatorname{Re} \left( \int_1 \frac{\mu(z)}{(z-z')} dz \right) \end{aligned} \quad (4.24)$$

$$H_3(z') + i H_4(z') = \frac{1}{i} \int_1 \frac{\mu(z)}{(z-z')} dz \quad (4.25)$$

I det følgende antages tæthedskurven at være sammenfaldende med områdets randkurve. Den klassiske teori behandler specielt 2 problemer - Dirichlet's problem og Neumann's problem. Dirichlet's problem lyder således: "Find en funktion, der er harmonisk i et enkeltstående område, som antager givne værdier på randen L, der er en lukket kurve uden dobbeltpunkter bestående af et endeligt antal glatte buer, og hvis værdier inde i området går kontinuert over i værdierne på randen". Om Dirichlet's problem vides, at der er en éntydig løsning.

Den klassiske måde at løse Dirichlet's problem er at søge den harmoniske funktion på formen lign. (4.25).

$$H = \int_L \mu(\sigma) d\theta \quad (4.26)$$

Dette kaldes også potentialet af et dobbeltlag, da udtrykket svarer til det potentiale, en elektrisk dipolmomentbelægning på en cylinder med konstant tæthed i frembringerretningen ville frembringe.

I et punkt på randen, hvor randkurven er glat, bliver udtrykket lign. (4.25) ifølge Plemelj's formel [M-4]:

$$H_3 + iH_4 = \pi\mu(z') + \frac{1}{i} \int_L \frac{\mu(z)}{(z-z')} dz. \quad (4.27)$$

Og følgelig fås:

$$H(s) = \pi\mu(s) + \int_L \mu(\sigma) d\theta \quad (4.28)$$

Dette udtryk gælder ikke i hjørner, hvorfor værdien på randen udledes på følgende måde, uden brug af kompleks funktionsteori:

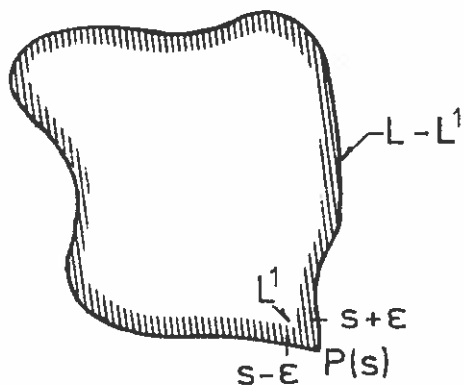


fig. 4.1 Opdeling af randkurve.

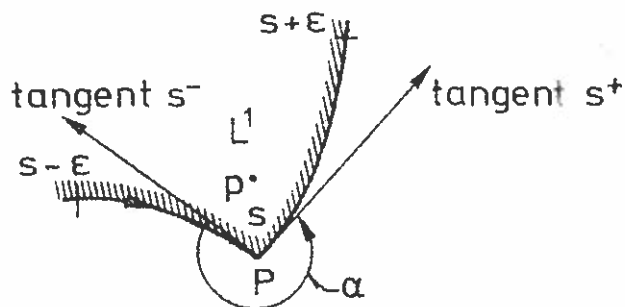


fig. 4.2

Randen deles op i 2 dele.

1)  $L^1$ , der indeholder det punkt på randen, hvori grænseværdien søges, og hvis infinitesimale udstrækning er fra  $s-\epsilon$  til  $s+\epsilon$ .

2)  $L-L^1$ , som består af resten af randen.  
Man finder

$$H(s) = (\alpha(s) + O(\epsilon))(\mu(s) + O(\epsilon)) + \int_{L-L^1} \mu(\sigma) d\theta \quad (4.29)$$

$$\Rightarrow \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \alpha(s)\mu(s) + \int_{L-L^1} \mu(\sigma) d\theta,$$

hvor  $\alpha$  fremgår af fig. 4.2.

Ved en grænseovergang, hvor  $\sigma$  nærmer sig  $s$ , kan randkurven tilnærmes en cirkel med krumningsradius  $\rho$  regnet positiv ind i området, og benytter man buelængden som parameter, ses kernen jvnf. fig. 4.3 at blive:

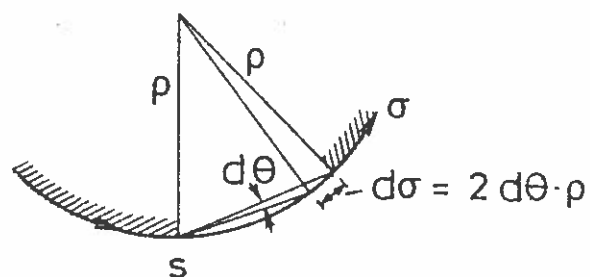


fig. 4.3

$$\frac{\lambda \theta}{\lambda \sigma} = \frac{1}{2\rho} \quad (4.30)$$

Heraf fremgår det, at kernen er diskontinuert i punktet  $s$ , hvis krumningsradius er det.

Søger man den harmoniske funktion på ovennævnte form, skal man løse en Fredholmintegralligning af anden art. På grund af den valgte omløbsretning (se fig. 2.3) har integralligningen samme udseende, uanset om der er tale om et ydre eller et indre område. Det gælder, at der er entydige løsninger ved enkeltsammenhængende indre områder. For hvert hul i området kan tæthedsfunktionen på hulranden sættes lig en konstant, uden at frembringe funktionsværdier  $\neq 0$  i området, hvorfor  $\mu = C_j$  (en konstant), på det  $j$ 'te hul, er en egentlig løsning til den homogene ligning. Man må altså frit kunne vælge  $\mu$  et sted på hver indre randkurve. Som det fremgår senere, vil lign. (4.26) imidlertid ikke kunne beskrive en vilkårlig harmonisk funktion fuldstændigt - der må tilføjes en ekstra funktion for hver indre randkurve.

En anden måde at løse Dirichlets problem på er at søge den harmoniske funktion på formen lign. (4.17)

$$H = \int_L \mu(\sigma) \ln \frac{r_p}{c} d\sigma = \int_L \mu(\sigma) (\ln r_p + c_1) d\sigma \quad (4.31)$$

På randen fås næsten samme udtryk

$$H(s) = \int_L \mu(\sigma) \ln \frac{r_p}{c} d\sigma = \int_L \mu(\sigma) (\ln r_p + c_1) d\sigma \quad (4.32)$$

Man skal løse en Fredholmintegralligning af første art. Da det i de videre undersøgelser ikke udnyttes, at  $c$  eller  $c_1$  kan vælges som en vilkårlig funktion af  $\sigma$ , skrives lign. (4.32) fremover

$$H(s) = \int_L \mu(\sigma) \ln \frac{r_p}{C} d\sigma = \int_L \mu(\sigma) (\ln r_p + C_1) d\sigma, \quad (4.33)$$

hvor  $C$  og  $C_1$  er konstanter, og hvor  $C$  jvnf.  $[L-2]$  bør vælges af samme størrelsesorden som den største værdi af  $r_p$ .

For at diskutere eksistens og entydighed af løsninger til lign. (4.33) benyttes nogle resultater udledt af Jaswon [J-2]. For et givet enkeltsammenhængende område begrænset af en randkurve  $L$  viser Jaswon, at enten har ligningen

$$\int_L \mu(\sigma) \ln r_p d\sigma = 1 \quad (4.34)$$

en entydig løsning, eller også har den tilsvarende homogene ligning

$$\int_L \mu(\sigma) \ln r_p \, d\sigma = 0 \quad (4.35)$$

en egentlig løsning, der er bestemt på nær en vilkårlig proportionalitetsfaktor. Det vises også, at i begge tilfælde er  $\int_L \mu(\sigma) \, d\sigma \neq 0$ .

Heraf følger, at man altid kan bestemme en værdi af konstanten C i lign. (4.33), således at den tilsvarende homogene ligning

$$\int_L \mu(\sigma) \ln \frac{r_p}{C} \, d\sigma = 0 \quad (4.36)$$

har en egentlig løsning. Hvis nemlig (4.35) har en egentlig løsning, kan man sætte den omtalte værdi af C lig med 1. Hvis derimod (4.34) har en løsning  $\mu_1(\sigma)$ , betragtes udtrykket

$$\begin{aligned} \int_L \mu_1(\sigma) \ln \left( \frac{r_p}{C} \right) \, d\sigma &= \int_L \mu_1(\sigma) \ln r_p \, d\sigma - \int_L \mu_1(\sigma) \ln C \, d\sigma \\ &= 1 - \ln C \int_L \mu_1(\sigma) \, d\sigma = 0 \quad \text{for } \ln C = 1 / \int_L \mu_1(\sigma) \, d\sigma \end{aligned} \quad (4.37)$$

Med denne specielle værdi af C har den homogene ligning (4.36) altså den egentlige løsning  $\mu_1(\sigma)$ .

Ifølge Jaswon's artikel gælder det, at når C er forskellig fra ovennævnte specielle værdi, har den inhomogene ligning (4.33) en entydig løsning.

Ved numerisk løsning af lign. (4.33) vælger man en værdi af konstanten C. Hvis denne værdi er nær ved eller sammenfaldende med den specielle C-værdi svarende til, at den homogene ligning (4.36) har en egentlig løsning, kan der ventes numeriske vanskeligheder under beregningen af løsningen. En forbedring kan imidlertid opnås ved simpelthen at ændre værdien af C.

Neumann's problem har følgende formulering: "Find en funktion H, der er harmonisk i et enkeltsammenhængende område, og som har givne kontinuerte værdier af de førsteafledede  $\frac{\partial H}{\partial n}$  med hensyn til normalen på randen L, der er en lukket glat kurve med kontinuert varierende tangent". Ved dette problem er den klassiske metode at benytte potentialet af en enkeltlag:

$$H = \int_L \mu(\sigma) (\ln r_p + C_1) \, d\sigma \quad (4.38)$$

Differentierer man i retning af normalen fås:

$$\frac{\partial H}{\partial n} = \int_L \mu(\sigma) \frac{\partial \ln r_p}{\partial r_p} \frac{\partial r_p}{\partial n} \, d\sigma = \int_L \mu(\sigma) \frac{(-\cos(r_p, n))}{r_p} \, d\sigma \quad (4.39)$$

I et punkt på randen, hvor randkurven er glat, fås ved en grænseovergang

$$\frac{\partial H(s)}{\partial n} = -\pi\mu(s) - \int_L \mu(\sigma) \frac{\cos(r_{P,n})}{r_P} d\sigma \quad (4.40)$$

Lign. (4.40) gælder for både indre og ydre områder. I begrænsede enkeltsammenhængende områder og i begrænsede sammensatte områder vil der være en enkeltuendelighed af løsning, hvis

$$\int_L \frac{\partial H(s)}{\partial n} ds = 0. \quad (4.41)$$

Hvis lign. (4.41) ikke er opfyldt, findes der ingen løsninger. Idet  $\sigma$  nærmer sig punktet  $s$ , vil kernen nærme sig grænseværdien:

$$\frac{\cos(r_{P,n})}{r_P} \rightarrow -\frac{1}{2\rho} \quad \sigma \rightarrow s \quad (4.42)$$

En sammenhæng mellem de to potentialudtryk kan udledes således [L-1]:

Udgangspunkt tages i Gauss' formel

$$\int_I \operatorname{div} \underline{w} dF = \int_L \underline{w} \cdot \underline{e}_v d\sigma, \quad (4.43)$$

hvor  $\underline{w}$  er en vilkårlig vektorfunktion

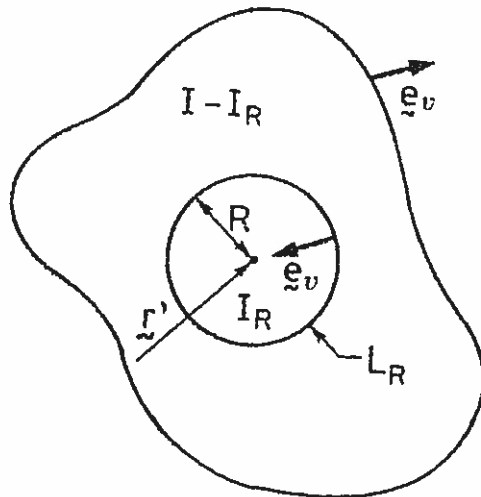


fig. 4.4.

Indsættes  $\underline{w} = H \cdot \operatorname{grad} G - G \cdot \operatorname{grad} H$  i lign. (4.43) hvor  $H$  og  $G$  har følgende egenskaber

$$\Delta H(\underline{z}) = 0 \text{ i } I \quad (4.44)$$

$$G(\underline{z}, \underline{z}') = \frac{1}{2\pi} (\ln|\underline{z} - \underline{z}'| + C_1), \quad (4.45)$$



medfører:

$$(z, z') = 0 \text{ i } I \text{ undtagen for } z = z', \quad (4.46)$$

ogtes områder  $I - I_R$  mellem  $L$  og cirklen  $L_R$  med radius centrum i  $z'$  fås

$$\begin{aligned} -\int_{I_R} (H\Delta G - G\Delta H)dF = 0 &= \int_L (H \frac{\partial G}{\partial v} - G \frac{\partial H}{\partial v})d\sigma + \int_{L_R} (H \frac{\partial G}{\partial v} - G \frac{\partial H}{\partial v})d\sigma = \\ &= \int_L (H \frac{\partial G}{\partial v} - G \frac{\partial H}{\partial v})d\sigma - \int_0^{2\pi} \frac{H}{2\pi} \frac{\partial}{\partial R}(\ln R) + \frac{\partial H}{\partial v} \frac{1}{2\pi} (\ln R + C_1) R d\theta. \end{aligned} \quad (4.47)$$

seovergangen  $R \rightarrow 0$  fås

$$\begin{aligned} (z') &= -\frac{1}{2\pi} \int_L (\frac{\partial H}{\partial v} (\ln r_p + C_1) - H \frac{\partial}{\partial v} (\ln r_p + C_1))d\sigma \\ &= -\frac{1}{2\pi} (\int_L \frac{\partial H}{\partial v} (\ln r_p + C_1)d\sigma - \int_L H d\theta). \end{aligned} \quad (4.48)$$

er et punkt på randen, får man

$$(z) = -\frac{1}{2\pi-\alpha} (\int_L \frac{\partial H(\sigma)}{\partial v} (\ln r_p + C_1)d\sigma - \int_L H(\sigma)d\theta), \quad (4.49)$$

oklen  $\alpha$  fremgår af fig. 4.2. Dette udtryk giver en Fredholm-løsning af anden art til løsning af Neumann's problem. Ligningen har ikke entydige løsninger, da en konstant tæthed på randkurve  $L_0$  er en løsning til den homogene ligning. Hvis man vælger  $H$  et vilkårligt sted i området eller på en af randene, er løsningen af problemet entydigt. Da man ved Neumann's problem kræver, at  $\frac{\partial H}{\partial v} = 0$ , for at der skal være løsninger, får  $C_1$  ingen indflydelse på lign. (4.49), hvorfor den i det tilfælde lige så godt kan sættes lig 0.

Ligning (4.49) frembringer en Fredholm-integralligning af første art til løsning af Dirichlet's problem med  $\frac{\partial H}{\partial v}$  som den ubekendte funktion. Jaswon [J-2] foreslår endvidere at bruge lign. (4.49) til løsning af blandede randværdiproblemer.

En mere generel formulering af Dirichlet's og Neumann's problem angår flere sammenhængende områder. Nedenstående behandling af disse områder er hovedsageligt taget fra [M-4]. For at undersøge analytiske funktioners egenskaber i et  $m+1$  gange sammensat område med randen  $L = L_0 + L_1 + \dots + L_m$ , betragtes funktionen:

$$\varphi(z') = H(z') + iH^k(z'), \quad (4.50)$$

dereranalytisk i den komplekse  $z = x + iy$  plan, og hvis realdel  $H$  antages entydig i området. Med

$$A_k = -\frac{1}{2\pi} \int_{L_k} \frac{\partial H}{\partial v} d\sigma, \quad k = 1, 2, \dots, m \quad (4.51)$$

som almindeligvis er forskellig fra nul, fås

$$\int_{L_k} \frac{\partial H^k}{\partial \sigma} d\sigma = -2\pi A_k; \quad (4.52)$$

hvilket viser, at  $H^k$  har ændret sig  $-2\pi A_k$  ved gennemløb af en kurve omkring hullet  $L_k$ . Følgelig må  $\varphi(z')$  kunne skrives både på formen:

$$\varphi(z') = \sum_{k=1}^m A_k \log(z' - z_k) + \varphi^*(z'), \quad (4.53)$$

hvor  $\varphi^*$  er en entydig analytisk funktion, og  $z_k$  er et vilkårligt valgt punkt  $z_k^k$ , i det  $k$ 'te hul, og på formen

$$\varphi(z') = \sum_{k=1}^m \int_{L_k} \mu(\sigma) \log(z' - z(\sigma)) d\sigma + \varphi^*(z'), \quad (4.54)$$

hvor  $z(\sigma)$  er punkter på randen, og

$$\int_{L_k} \mu(\sigma) d\sigma = A_k \quad (4.55)$$

Man kan altså ikke skrive en vilkårlig entydig harmonisk funktion på formen  $H = \int \mu(\sigma) d\theta$ , da dennes harmonisk konjugerede jvnf. ligningerne (4.23-24) er entydig. Det er nødvendigt at tilføje ekstra led:

$$H(z') = \int_L \mu(\sigma) d\theta + \sum_{k=1}^m A_k \ln|z' - z_k^k|, \quad (4.56)$$

idet der atter mindes om, at  $L = L_0 + L_1 + \dots + L_m$ .

Noget tilsvarende gør sig ikke gældende, når den harmoniske funktion søges på formen:

$$H = \int_L \mu(\sigma) (\ln r_p + C_1) d\sigma \quad (4.57)$$

Hvis dennes harmonisk konjugerede skal være entydig, må jvnf. ligningerne (4.54-55)

$$A_k = 0 \quad k = 1, 2, \dots, m \quad (4.58)$$

Ved begrænsede sammensatte områder har Dirichlets problem en entydig løsning, medens Neumann's problem har den enkeltuendelighed af løsninger, der svarer til, at den harmoniske funktion vælges et vilkårligt sted i området eller på randen.

På randen bliver lign. (4.56) til

$$H(s) = \alpha\mu(s) + \int_L \mu(\sigma)d\theta + \sum_{k=1}^m A_k \ln|z' - z^k|. \quad (4.59)$$

For hver indre rand er  $\mu =$  konstant en løsning til den homogene ligning, hvorfor værdien af  $\mu$  kan vælges et sted på hver indre rand.

Til slut foretages en undersøgelse af en harmonisk funktion ved et hjørne med rette sider, hvor randværdierne er givet som potenser af afstanden fra hjørnet. Der indlægges følgende koordinatsystemer:

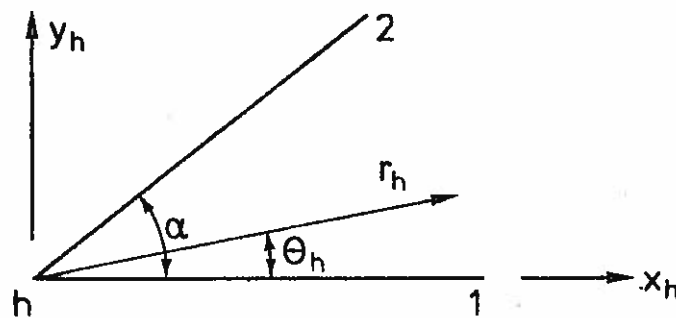


fig. 4.5.

Den harmoniske funktion ønskes på formen

$$H = \sum_j r_h^{\lambda_j} (C_{1j} \cos(\lambda_j \theta_h) + C_{2j} \sin(\lambda_j \theta_h)), \quad (4.60)$$

hvor  $C_{1j}$ ,  $C_{2j}$  og  $\lambda_j$  er konstanter. Er randværdierne af den harmoniske funktion givet ved

$$H_1 = A_{1p} r_h^{\lambda_p} \quad (4.61)$$

$$H_2 = A_{2p} r_h^{\lambda_p}, \quad (4.62)$$

hvor  $A_{1p}$ ,  $A_{2p}$  og  $\lambda_p$  er konstanter, søges den harmoniske funktion dannet ved

$$H = C_{1p} r_h^{\lambda_p} \cos(\lambda_p \theta_h) + C_{2p} r_h^{\lambda_p} \sin(\lambda_p \theta_h). \quad (4.63)$$

Lign. (4.63) indsat i ligningerne (4.61-62) giver følgende ligningssystem til bestemmelse af  $C_{1p}$  og  $C_{2p}$ :

$$C_{1p} r_h^{\lambda_p} = A_{1p} r_h^{\lambda_p} \quad (4.64)$$

$$C_{1p} r_h^{\lambda_p} \cos(\lambda_p \alpha) + C_{2p} r_h^{\lambda_p} \sin(\lambda_p \alpha) = A_{2p} r_h^{\lambda_p} \quad (4.65)$$

Hvis  $\sin \lambda_p \alpha \neq 0$  fås:

$$C_{1p} = A_{1p} \quad (4.66)$$

$$C_{2p} = \frac{A_{2p} - A_{1p} \cos(\lambda_p \alpha)}{\sin(\lambda_p \alpha)}. \quad (4.67)$$

Lign (4.63) beskriver ikke den harmoniske funktion fuldstændigt. Til denne partikulære løsning må tilføjes løsningen til det homogene ligningssystem, altså løsninger til ligningerne (4.64-65), hvor  $A_{1p} = A_{2p} = 0$ . Dette har løsninger for

$$\sin \lambda_j \alpha = 0 \Rightarrow \lambda_j = \frac{j\pi}{\alpha} \quad j = 1, 2, \dots \quad (4.68)$$

Den fuldstændige løsning kan skrives

$$H = A_{1p} r_h^{\lambda_p} \cos(\lambda_p \theta_h) + \frac{A_{2p} - A_{1p} \cos(\lambda_p \alpha)}{\sin(\lambda_p \alpha)} r_h^{\lambda_p} \sin(\lambda_p \theta_h) + \sum_{j=1}^{\infty} C_j r_h^{\frac{j\pi}{\alpha}} \sin(\frac{j\pi}{\alpha} \theta_h). \quad (4.69)$$

Hvis  $\lambda_p$  er en af egenværdierne, altså hvis  $\sin \lambda_p \alpha = 0$ , kan den partikulære løsning ikke findes ved ovennævnte metode. Som partikulær løsning bruges i stedet

$$H = C_{1p} r_h^{\lambda_p} \cos(\lambda_p \theta_h) + C_{2p} \operatorname{Im}(z_h^{\lambda_p} \log z_h) = C_{1p} r_h^{\lambda_p} \cos(\lambda_p \theta_h) + C_{2p} (\theta_h r_h^{\lambda_p} \cos(\lambda_p \theta_h) + \ln r_h r_h^{\lambda_p} \sin(\lambda_p \theta_h)). \quad (4.70)$$

Ligningssystemet til bestemmelse af konstanterne bliver

$$C_{1p} r_h^{\lambda_p} = A_{1p} r_h^{\lambda_p} \quad (4.71)$$

$$C_{1p} r_h^{\lambda_p} \cos(\lambda_p \alpha) + C_{2p} r_h^{\lambda_p} \alpha \cos(\lambda_p \alpha) = A_{2p} r_h^{\lambda_p} \quad (4.72)$$

med løsningen

$$C_{1p} = A_{1p} \quad (4.73)$$

$$C_{2p} = \frac{A_{2p} - A_{1p} \cos(\lambda_p \alpha)}{\alpha \cos(\lambda_p \alpha)}, \quad (4.74)$$

og den fuldstændige løsning bliver

$$H = A_{1p} r_h^{\lambda_p} \cos(\lambda_p \theta_h) + \frac{A_{2p} - A_{1p} \cos(\lambda_p \alpha)}{\alpha \cos(\lambda_p \alpha)} (\theta_h r_h^{\lambda_p} \cos(\lambda_p \theta_h) + \ln r_h r_h^{\lambda_p} \sin(\lambda_p \theta_h)) + \sum_{j=1}^{\infty} C_j r_h^{\frac{j\pi}{\alpha}} \sin(\frac{j\pi}{\alpha} \theta_h) \quad (4.75)$$

Hvis det er et Neumann problem, der behandles, med randværdierne

$$\frac{\partial H}{\partial n_1} = A_{1p} r_h^{\lambda_p - 1} \quad (4.76)$$

$$\frac{\partial H}{\partial n_2} = A_{2p} r_h^{\lambda_p - 1}, \quad (4.77)$$

søges den harmoniske funktion på samme form som lign. (4.63).

De normalafledede ved randen bliver, idet det øverste fortegn gælder for rand 1 og det nederste for rand 2

$$\frac{\partial H}{\partial n} = \mp \lambda_p r_h^{\lambda_p - 1} (-C_{1p} \sin(\lambda_p \theta_h) + C_{2p} \cos(\lambda_p \theta_h)) \quad (4.78)$$

Man får samme egenværdier som før, og den fuldstændige løsning, hvor  $\sin \lambda_p \alpha \neq 0$  bliver

$$H = - \frac{A_{1p} \cos(\lambda_p \alpha) + A_{2p}}{\lambda_p \sin(\lambda_p \alpha)} r_h^{\lambda_p} \cos(\lambda_p \theta_h) - \frac{A_{1p}}{\lambda_p} r_h^{\lambda_p} \sin(\lambda_p \theta_h) + \sum_{j=0}^{\infty} C_j r_h^{\frac{j\pi}{\alpha}} \cos(\frac{j\pi}{\alpha} \theta_h) \quad (4.79)$$

Hvis  $\sin(\lambda_p \alpha) = 0$  søges den partikulære løsning på formen:

$$H = C_{1p} \operatorname{Re}(z_h^{\lambda_p} \log z_h) + C_{2p} r_h^{\lambda_p} \sin(\lambda_p \theta_h) = C_{1p} (\ln r_h r_h^{\lambda_p} \cos(\lambda_p \theta_h) - \theta_h r_h^{\lambda_p} \sin(\lambda_p \theta_h)) + C_{2p} r_h^{\lambda_p} \sin(\lambda_p \theta_h) \quad (4.80)$$

$$\frac{\partial H}{\partial n} = \mp (C_{1p} (-(\lambda_p \ln r_h + 1) r_h^{\lambda_p - 1} \sin(\lambda_p \theta_h) - \lambda_p \theta_h r_h^{\lambda_p - 1} \cos(\lambda_p \theta_h)) + C_{2p} \lambda_p r_h^{\lambda_p - 1} \cos(\lambda_p \theta_h)), \quad (4.81)$$

med den fuldstændige løsning

$$H = \frac{A_{1p} \cos(\lambda_p \alpha) + A_{2p}}{\alpha \lambda_p \cos(\lambda_p \alpha)} (\ln r_h r_h^{\lambda_p} \cos(\lambda_p \theta_h) - \theta_h r_h^{\lambda_p} \sin(\lambda_p \theta_h)) - \frac{A_{1p}}{\lambda_p} r_h^{\lambda_p} \cos(\lambda_p \theta_h) + \sum_{j=0}^{\infty} C_j r_h^{\frac{j\pi}{\alpha}} \cos(\frac{j\pi}{\alpha} \theta_h) \quad (4.82)$$

Ved nedennævnte blandede randbetingelser skal egenværdierne findes af

$$\cos(\lambda_j \alpha) = 0 \Rightarrow \lambda_j = \frac{\pi(j \cdot 2 - 1)}{2\alpha} \quad j = 1, 2 \dots \quad (4.83)$$

Ved blandede randbetingelser, hvor  $H$  er givet på rand 1 og  $\frac{\partial H}{\partial n}$  på rand 2, skal man benytte  $I_{\lambda_p}(z_h^p \log z_h)$  - hvis det omvendte er tilfældet, benyttes  $\text{Re}(z_h^p \log z_h)$ .

Man kan ud fra de udledte udtryk se, hvilke singulariteter den harmoniske funktion kan få ved hjørner. Det fremgår af det ovenstående, at der kan være singulariteter i den partikulære løsning, der imidlertid direkte kan udregnes. En metode til bestemmelse af koefficienterne til de homogene løsninger foreslås længere fremme i afhandlingen. Skrives den harmoniske funktion som en sum af 2 harmoniske funktioner:

$$H = H_{\text{part.}} + H_{\text{homog.}} \quad (4.84)$$

kan problemet formuleres således, at man søger  $H_{\text{homog.}}$  med randværdierne  $H - H_{\text{part.}}$ , hvorved singulariteten i den partikulære løsning fjernes. Som eksempel på en singularitet fra den partikulære løsning, kan nævnes singulariteter i spændingerne ved et retvinklet hjørne i en elliptisk paraboloideskal (se afsnit 4.2.3). Regnes denne at være belastet med en konstant lodret last, fås følgende ligning at løse

$$\Delta T = C, \quad (4.85)$$

hvor  $C$  er konstant. En partikulær løsning til lign. (4.85) er  $T_p = \frac{1}{2} C y^2$ . Da randbetingelserne som oftest er  $T \equiv 0$ , skal man finde en harmonisk funktion med randværdierne  $-\frac{1}{2} C y^2$ , hvorved man ved indsættelse af  $\lambda_p = 2$ ,  $A_{22} = -\frac{1}{2} C$  og  $A_{12} = 0$  i lign. (4.75) finder

$$H_{\text{part.}} = \frac{C}{\pi} (\theta_h r_h^2 \cos 2\theta_h + \ln r_h r_h^2 \sin 2\theta_h) \quad (4.86)$$

#### 4.2.0. Problemer, der fører til Laplace's ligning, og de dertil svarende randbetingelser.

I det følgende omtales 3 problemer: fri vridning af prismatiske legemer, bøjning med forskydning af bjælker belastede på endefladerne, samt beregning af elliptiske paraboloideskaller ved hjælp af membranteorien.

Behandlingen af Dirichlets og Neumann's problem ved hjælp af integralligninger har inden for elasticitetsteorien og statikken hovedsageligt været knyttet til Saint-Venant's vridningsproblem. Løsningen af den fremkomne integralligning er som oftest foreslået foretaget, enten ved en udvikling af tæthedsfunktionen i egenfunktioner (løsninger til den homogene ligning ved bestemte værdier af  $\lambda$ , se lign. (3.2)), udvikling af kernen som  $\sum f_i(s)h_i(\sigma)$ , ved approximationsmetoder eller ved diskretisering af integralligningen, som omtalt i kap. 3, og løsning af det derved fremkomne ligningssystem [L-3]. Før fremkomsten af den elektroniske regnemaskine var det i praksis så godt som umuligt at løse de store ligningssystemer, der fremkommer ved diskretiseringen, hvorfor de andre metoder må have syntes mest tillokkende. I dag vil man som regel foretrække en direkte løsning af de store ligningssystemer.

Mikhlin [M-4] anbefaler i 1957 brugen af lign. (4.56) til dannelsen af den harmoniske funktion. Det samme gør Massonet [M-2] i 1965, idet han dog kun betragter enkeltsammenhængende områder.

Udviklingen synes først at tage fart i 1963, med Jaswon og Ponters [J-1] forslag at benytte lign. (4.48) til løsning af vridningsproblemet. Jaswon [J-2] og Symm [S-3] undersøger samme år egen-skaberne ved en harmonisk funktion dannet ud fra ligningerne (4.38) og (4.48). Kandler [K-1] og Windisch [W-4] i 1967 benytter lign. (4.48) - Windisch dog med en lille omskrivning af leddet  $\frac{1}{2\pi} \int_L \frac{\partial H}{\partial v} \ln r_p d\sigma$ .

Endelig foreslår Lo og Niefenfuhr [L-2] i 1970 at benytte (4.38), idet integralligningen dannes ud fra en membranalogi.

#### 4.2.1. Fri vridning af prizmer.

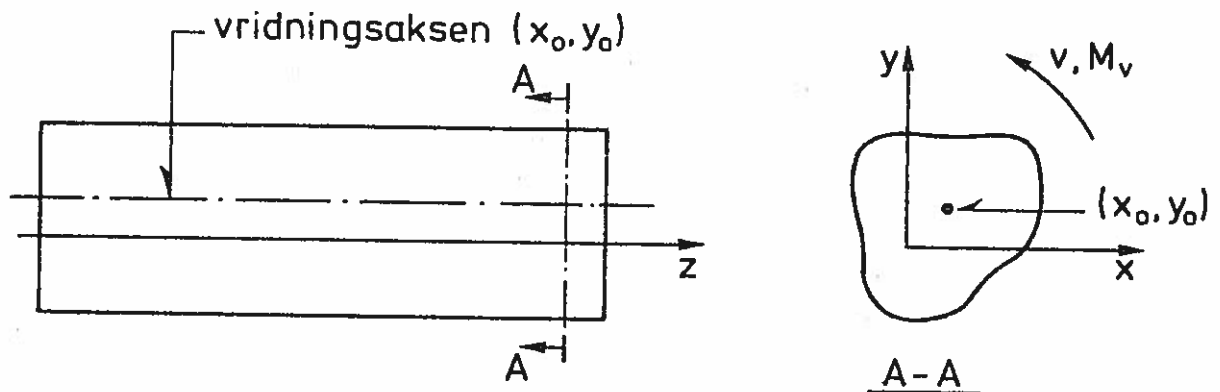


fig. 4.6.

Nedenstående behandling følger i det væsentlige den tilsvarende i [T-1], idet vridningsaksens beliggenhed dog ikke i denne fremstilling forudsættes bekendt. Det vridende moment  $M_v$  tænkes påsat endefladerne, sidefladerne forudsættes ubelastede, og der ses bort fra massekræfter. Der benyttes her og fremover de sædvanlige betegnelser for:

- $u_j$  flytningen i  $j$ -aksens retning,
- $\epsilon_{ij}$  tøjninger,
- $\sigma_{ij}$  spændinger (normalspændinger regnes positive som træk)
- $\varphi_{ij}$  vinkelændringen mellem  $i$ - og  $j$ -aksen,
- $G$  forskydningsmodulen,

idet  $i$  og  $j$  kan stå for henholdsvis  $x$ ,  $y$  og  $z$ .

Selv om den matematiske behandling af fri vridning nærmest må føles som en forlængelse af det, der står i kap. 4.2.2, er det fundet ønskeligt at give en selvstændig behandling af emnet - dels på grund af problemets betydning - dels som en introduktion til ovennævnte kapitel.

Der benyttes Saint-Venant's semi-inverse metode, der går ud på først at gøre visse antagelser, og derefter ved hjælp af ligevægtsligningerne, randbetingelserne og kompatibilitetsbetingelserne at bevise, at antagelserne er korrekte. Da det kun er randbetingelserne på sidefladerne, man ved fri vridning kræver opfyldt, er det klart,



at fuldstændig fri vridning forudsætter en bestemt spændingsfordeling. Afvigelser fra denne spændingsfordeling vil ifølge Saint Venants princip blive ubetydelige ikke langt fra endefladerne.

Flytningerne antages at være

a) en rotation omkring linien ( $x = x_0$ ,  $y = y_0$ ) proportional med  $z$ :

$$u_x = - vz(y-y_0) \quad (4.87)$$

$$u_y = vz(x-x_0), \quad (4.88)$$

hvor  $v$  er den konstante vridningsvinkel pr. længdeenhed,

b) en hvælving af tværsnittet, der forudsættes ens for alle tværsnit, og som skrives på formen

$$u_z = v(H_v(x,y) - y_0x + x_0y). \quad (4.89)$$

$H_v$  kaldes hvælvingfunktionen. Ved disse flytninger er kompatibiliteten i orden - man mangler kun at sikre, at ligevægts- og randbetingelserne er opfyldte.

Ovennævnte flytninger frembringer følgende tøjninger og spændinger

$$\epsilon_{xx} = \epsilon_{yy} = \epsilon_{zz} = \varphi_{xy} = 0 \quad (4.90)$$

$$\sigma_{xx} = \sigma_{yy} = \sigma_{zz} = \sigma_{xy} = 0. \quad (4.91)$$

Ligevægtsligningerne

$$\frac{\partial \sigma_{jx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{jy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{jz}}{\partial z} + q_j = 0, \quad j = x, y \text{ og } z \quad (4.92)$$

giver, idet massekræfterne  $q_j = 0$ ,

$$\frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} = 0 \quad (4.93)$$

$$\frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial z} = 0 \quad (4.94)$$

$$\frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{zy}}{\partial y} = 0 \quad (4.95)$$

Ligningerne (4.93 - 94), der viser, at  $\sigma_{xz}$  og  $\sigma_{yz}$  er uafhængige af  $z$ , sikrer sammen med lign. (4.95) eksistensen af en funktion  $T_v(x,y)$ , defineret således

$$\sigma_{xz} = \frac{\partial T_v}{\partial y} \quad (4.96)$$

$$\sigma_{yz} = - \frac{\partial T_v}{\partial x} \quad (4.97)$$

Randbetingelserne, der kræves opfyldt, er

$$\sigma_{zn} = \sigma_{zx} \cos(x,n) + \sigma_{zy} \cos(y,n) = \frac{\partial T_v}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial s} - \frac{\partial T_v}{\partial x} \left( -\frac{\partial x}{\partial s} \right) = \frac{\partial T_v}{\partial s} = 0 \quad (4.98)$$

Desuden ses at

$$\sigma_{zs} = \sigma_{zx} \cos(x,s) + \sigma_{zy} \cos(y,s) = \frac{\partial T_v}{\partial y} \left( \frac{\partial y}{\partial n} \right) - \frac{\partial T_v}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial n} = -\frac{\partial T_v}{\partial n} \quad (4.99)$$

Det fremgår af lign. (4.98), at  $T_v$  må være konstant på randene, og da det kun er afledede af  $T_v$ , der har fysisk betydning, vil man f.eks. kunne sætte  $T_v \equiv 0$  på den ydre rand, hvorved vridningsmomentet  $M_v$  vil kunne skrives

$$M_v = \iint_I \left( x \left( -\frac{\partial T_v}{\partial x} \right) - y \frac{\partial T_v}{\partial y} \right) dx dy = 2 \int_F T_v dF, \quad (4.100)$$

hvor det sidste integral også udstrækkes over eventuelle huller. Der er benyttet delvis integration. Dannes

$$\frac{\partial \varphi_{yz}}{\partial x} - \frac{\partial \varphi_{xz}}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial u_z}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial z} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial u_z}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial z} \right) = 2v, \quad (4.101)$$

og indsætter man heri

$$\frac{\partial T_v}{\partial y} = \sigma_{xz} = G\varphi_{xz} \quad (4.102)$$

$$\frac{\partial T_v}{\partial x} = -\sigma_{yz} = -G\varphi_{yz}, \quad (4.103)$$

fås

$$\Delta T_v = \frac{\partial^2 T_v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T_v}{\partial y^2} = -2Gv \quad (\text{Poissons ligning}). \quad (4.104)$$

Denne ligning har den ulempe at indeholde  $v$ , der ikke kendes på forhånd. Nu indføres en ny spændingsfunktion  $H_v^k(x,y)$ :

$$H_v^k = \frac{1}{Gv} T_v + \frac{1}{2} (x^2 + y^2), \quad (4.105)$$

der ved hjælp af lign. (4.104) ses at være harmonisk, og som jvnf. lign. (4.98) har randværdierne

$$H_V^k = \frac{1}{2}(x^2 + y^2) + \text{konst.}, \quad (4.106)$$

hvor konstanten kan være forskellig for hver randkurve.

Ved hjælp af ligningerne (4.87-89) og (4.102-103) fås

$$\frac{\partial H_V}{\partial x} = \frac{1}{v} \frac{\partial u_z}{\partial x} + \frac{1}{v} \frac{\partial u_x}{\partial z} - \frac{1}{v} \frac{\partial u_x}{\partial z} + y_0 = \frac{1}{Gv} \frac{\partial T_V}{\partial y} + y = \frac{\partial H_V^k}{\partial y} \quad (4.107)$$

$$\frac{\partial H_V}{\partial y} = \frac{1}{Gv} \frac{\partial T_V}{\partial x} - x = - \frac{\partial H_V^k}{\partial x}, \quad (4.108)$$

hvoraf ses, at  $H_V + iH_V^k$  er analytisk, og at  $H_V$  og  $H_V^k$  er harmonisk konjugerede. Ønsker man at finde  $H_V$  i stedet for  $H_V^k$ , skal man søge en harmonisk funktion med randbetingelserne

$$\frac{\partial H_V}{\partial n} = \frac{\partial H_V^k}{\partial s} = \frac{\partial}{\partial s} (\frac{1}{2}r^2 + \text{konst.}) = r \cos(r, s) \quad (4.109)$$

Det at søge  $H_V^k$  er altså et Dirichlet problem ved enkeltsammenhængende områder, medens det at søge  $H_V$  er et Neumann problem. For at finde spændinger og flytninger er det imidlertid nødvendigt at kende  $v$ . En forbindelse mellem det vridende moment og  $v$  kan findes således:

$$\begin{aligned} \int_L H_V \frac{\partial H_V}{\partial n} ds &= \int_L (H_V x \frac{\partial x}{\partial s} + H_V y \frac{\partial y}{\partial s}) ds = \iint_I (\frac{\partial(xH_V)}{\partial y} + \frac{\partial(yH_V)}{\partial x}) dx dy \\ &= \int_I [x(\frac{1}{Gv} \frac{\partial T_V}{\partial x} + x) + y(\frac{1}{Gv} \frac{\partial T_V}{\partial y} + y)] dF = I_p - M_V / Gv \end{aligned} \quad (4.110)$$

Vridningsinertimomentet findes derfor til

$$I_V = \frac{M_V}{vG} = I_p - \int_L H_V r \cos(r, s) ds \quad (4.111)$$

4.2.2. Bøjning med forskydning af bjælke påvirket på endefladerne.

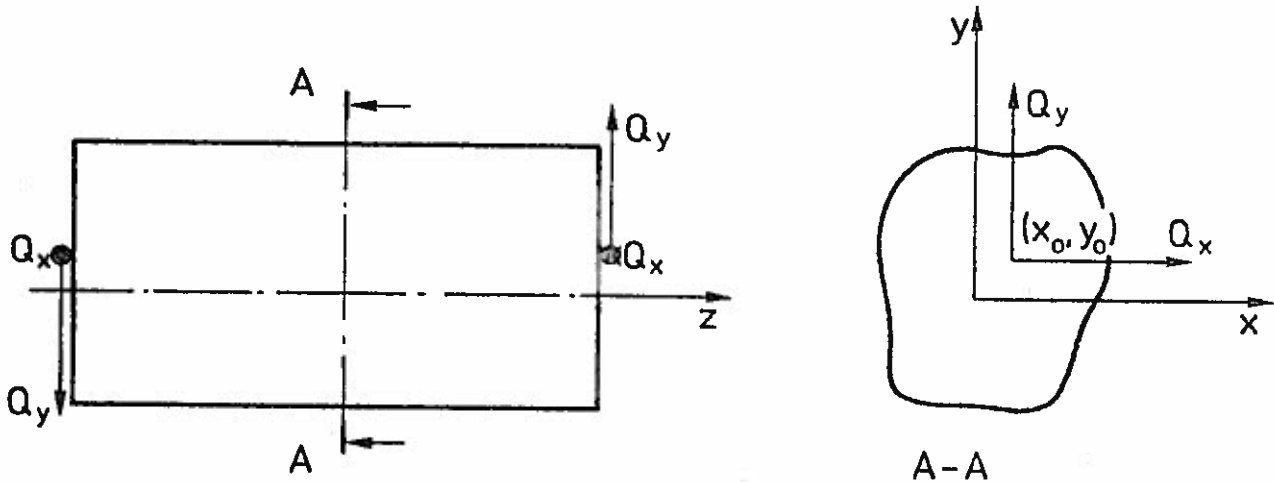


fig. 4.7.

Bjælken, der er prismatisk og ubelastet på siderne, regnes på endefladerne at have en snitkraftsfordeling, hvis resultanter i x- og y-aksens retning er henholdsvis  $Q_x$  og  $Q_y$ , angribende i pkt.  $(x_0, y_0)$ . Der ses bort fra massekræfter, og den resulterende normalkraft på hele tværsnittet forudsættes lig 0. Med z-aksen lagt i tværsnittets tyngdepunkt og normalspændingsfordelingen  $\sigma_{zz}$  forudsat lineær i x og y kan  $\sigma_{zz}$  skrives

$$\sigma_{zz} = -E(z_0 - z)(C_x x + C_y y) \quad (4.112)$$

hvor E er elasticitetsmodulen, og hvor  $z_0$ ,  $C_x$  og  $C_y$  er konstanter. Momentligevægten for et infinitesimalt stykke af bjælken kræver

$$Q_x = \frac{\partial}{\partial z} \left( \int_I x \sigma_{zz} dF \right) = EC_x \int_I x^2 dF + EC_y \int_I xy dF \quad (4.113)$$

$$Q_y = \frac{\partial}{\partial z} \left( \int_I y \sigma_{zz} dF \right) = EC_x \int_I xy dF + EC_y \int_I y^2 dF \quad (4.114)$$

Af ligningerne (4.113-114) fås

$$EC_x = \frac{Q_x I_x - Q_y I_{xy}}{I_x I_y - I_{xy}^2} \quad (4.115)$$

$$EC_y = \frac{Q_y I_y - Q_x I_{xy}}{I_x I_y - I_{xy}^2} \quad (4.116)$$

$$I_x = \int_I y^2 dF \quad (4.117)$$

$$I_y = \int_I x^2 dF \quad (4.118)$$

$$I_{xy} = \int_I xy dF. \quad (4.119)$$

Igen benyttes Saint Venants semi-inverse metode, idet det antages at

$$\sigma_{xx} = \sigma_{xy} = \sigma_{yy} = 0 \quad (4.120)$$

Af ligevægtsbetingelserne fås

$$\frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial z} = 0 \quad (4.121)$$

$$\frac{\partial \sigma_{zy}}{\partial z} = 0 \quad (4.122)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{zy}}{\partial y} + E(C_x x + C_y y) = \\ \frac{\partial}{\partial x} (\sigma_{zx} + \frac{1}{2} E C_x x^2) + \frac{\partial}{\partial y} (\sigma_{zy} + \frac{1}{2} E C_y y^2) = 0 \end{aligned} \quad (4.123)$$

Ligningerne (4.120-123) sikrer eksistensen af en funktion  $T(x,y)$ , således defineret

$$\sigma_{zx} = \frac{\partial T}{\partial y} - \frac{1}{2} E C_x x^2 \quad (4.124)$$

$$\sigma_{zy} = -\frac{\partial T}{\partial x} - \frac{1}{2} E C_y y^2 \quad (4.125)$$

Da der ikke er forudsat noget angående flytningerne, må Beltrami-Michell kompatibilitetsbetingelserne, med massekraftbidragene sat lig nul, kræves opfyldt:

$$\Delta \sigma_{ij} + \frac{1}{1+\nu} \frac{\partial^2 (\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz})}{\partial i \partial j} = 0, \quad (4.126)$$

hvor  $\nu$  er Poissons forhold. Med ligningerne (4.112) og (4.120) indsat i lign. (4.126) kræves

$$\Delta \sigma_{zx} + \frac{E}{1+\nu} C_x = 0 \quad (4.127)$$

$$\Delta \sigma_{zy} + \frac{E}{1+\nu} C_y = 0, \quad (4.128)$$

der sammen med ligningerne (4.124-125) medfører

$$\frac{\partial}{\partial y} (\Delta T) = 2G\nu C_x \quad (4.129)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} (\Delta T) = -2G\nu C_y, \quad (4.130)$$

hvorfor

$$\Delta T = -2G\nu C_y x + 2G\nu C_x y - 2G\nu \text{ (Poissons ligning)}. \quad (4.131)$$

$\nu$  i integrationskonstanten  $-2G\nu$  er vridningen pr. længdeenhed

jvnf. kap. 4.2.1. Rotationen pr. længdeenhed  $\frac{\partial \omega}{\partial z}$  af et vilkårligt punkt  $(x,y)$  findes således

$$\begin{aligned} \frac{\partial \omega}{\partial z} &= \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_y}{\partial x} - \frac{\partial u_x}{\partial y} \right) \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y} \right) \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} \right) \right) \\ &= \frac{\partial \epsilon_{yz}}{\partial x} - \frac{\partial \epsilon_{xz}}{\partial y} = \frac{1}{2G} \left( \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial x} - \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial y} \right) = - \frac{1}{2G} \Delta T = v + \nu(C_y x - C_x y) \end{aligned} \quad (4.132)$$

Vridningen pr. længdeenhed, der er lig tværsnittets gennemsnitlige rotation pr. længdeenhed  $(\int_I \frac{\partial \omega}{\partial z} dF/F)$ , bliver altså lig  $v$ .

Da der er tale om lineære ligninger, må  $T(x,y)$  jvnf. lign. (4.131) kunne skrives som en sum af 3 funktioner

$$T(x,y) = T_x(x,y) + T_y(x,y) + T_v(x,y) \quad (4.133)$$

hvor

$$\Delta T_x = 2G\nu C_x y \quad (4.134)$$

$$\Delta T_y = -2G\nu C_y x \quad (4.135)$$

$$\Delta T_v = -2Gv \quad (4.136)$$

Ved randen kræves

$$\sigma_{zn} = \sigma_{zx} \frac{\partial x}{\partial n} + \sigma_{zy} \frac{\partial y}{\partial n} = \sigma_{zx} \frac{\partial y}{\partial s} - \sigma_{zy} \frac{\partial x}{\partial s} = 0, \quad (4.137)$$

hvorfor randbetingelserne for  $T_x$  bliver

$$\left( \frac{\partial T_x}{\partial y} - \frac{1}{2} EC_x x^2 \right) \frac{\partial y}{\partial s} + \frac{\partial T_x}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial s} = 0 \Rightarrow$$

$$T_x = \int \frac{1}{2} EC_x x^2 \frac{\partial y}{\partial s} ds + \text{konst.}, \quad (4.138)$$

og tilsvarende for  $T_y$  og  $T_v$

$$T_y = - \int \frac{1}{2} EC_y y^2 \frac{\partial x}{\partial s} ds + \text{konst.} \quad (4.139)$$

$$T_v = \text{konst.} \quad (4.140)$$

Indføres harmoniske funktioner svarende til dem i kap. 4.2.1 fås, idet udtrykkene fra kap. 4.2.1 er medtaget for overblikkets skyld

$$H_x^k = \frac{1}{GC_x} T_x - \frac{1}{3} \nu y^3 \quad (4.141)$$

$$H_y^k = \frac{1}{GC_y} T_y + \frac{1}{3} \nu x^3 \quad (4.142)$$

$$H_v^k = \frac{1}{Gv} T_v + \frac{1}{2}(x^2+y^2). \quad (4.143)$$

Randbetingelserne findes ud fra randbetingelserne for T:

$$H_x^k = (1+\nu) \int x^2 \frac{\partial y}{\partial s} ds - \frac{1}{3} \nu y^3 + \text{konst.} \quad (4.144)$$

$$H_y^k = \frac{1}{3} \nu x^3 - (1+\nu) \int y^2 \frac{\partial x}{\partial s} ds + \text{konst.} \quad (4.145)$$

$$H_v^k = \frac{1}{2} (x^2+y^2) + \text{konst.} \quad (4.146)$$

Og de dertil svarende harmonisk konjugerede i det analytiske udtryk  $H_i + iH_i^k$  findes af

$$\frac{\partial H_i}{\partial x} = \frac{\partial H_i^k}{\partial y} ; \quad \frac{\partial H_i}{\partial y} = - \frac{\partial H_i^k}{\partial x} \quad (4.147)$$

Randbetingelserne bliver

$$\frac{\partial H_x}{\partial n} = \frac{\partial H_x^k}{\partial s} = ((1+\nu)x^2 - \nu y^2) \cos(y,s) \quad (4.148)$$

$$\frac{\partial H_y}{\partial n} = \frac{\partial H_y^k}{\partial s} = (\nu x^2 - (1+\nu)y^2) \cos(x,s) \quad (4.149)$$

$$\frac{\partial H_v}{\partial n} = \frac{\partial H_v^k}{\partial s} = r \cos(r,s) \quad (4.150)$$

Spændingerne kan på nedenstående måde findes ud fra de 3 forskellige funktioner

$$\sigma_{zx} = \left( \frac{\partial T_x}{\partial y} - \frac{1}{2} EC_x x^2 \right) + \frac{\partial T_y}{\partial y} + \frac{\partial T_v}{\partial y} \quad (4.151)$$

$$\sigma_{zy} = - \frac{\partial T_x}{\partial x} - \left( \frac{\partial T_y}{\partial x} + \frac{1}{2} EC_y y^2 \right) - \frac{\partial T_v}{\partial x} \quad (4.152)$$

$$\sigma_{zx} = GC_x \frac{\partial H_x^k}{\partial y} - x^2 - \nu(x^2 - y^2) + GC_y \frac{\partial H_y^k}{\partial y} + Gv \left( \frac{\partial H_v^k}{\partial y} - y \right) \quad (4.153)$$

$$\sigma_{zy} = -GC_x \frac{\partial H_x^k}{\partial x} - GC_y \left( \frac{\partial H_y^k}{\partial x} + y^2 + \nu(y^2 - x^2) \right) - Gv \left( \frac{\partial H_v^k}{\partial x} - x \right) \quad (4.154)$$

$$\sigma_{zx} = GC_x \left( \frac{\partial H_x}{\partial x} - x^2 - \nu(x^2 - y^2) \right) + GC_y \frac{\partial H_y}{\partial x} + Gv \left( \frac{\partial H_v}{\partial x} - y \right) \quad (4.155)$$

$$\sigma_{zy} = GC_x \frac{\partial H_x}{\partial y} + GC_y \left( \frac{\partial H_y}{\partial y} - y^2 - \nu(y^2 - x^2) \right) + Gv \left( \frac{\partial H_v}{\partial y} + x \right) \quad (4.156)$$

Forskydningscentret  $(x_f, y_f)$  findes af

$$\int_I (x\sigma_{zy}^* - y\sigma_{zx}^*) dF = x_f Q_y - y_f Q_x, \quad (4.157)$$

som skal gælde for vilkårlige værdier af  $Q_x$  og  $Q_y$ , og hvor \* antyder, at vridningsbidraget ikke er medtaget i spændingen. Indsættes ligningerne (4.155 - 156), idet leddet helt til højre bortfalder, og ligningerne (4.115 - 116) i lign. (4.157) findes

$$x_f = \frac{I_y A_y - I_{xy} A_x}{2(1+\nu)(I_x I_y - I_{xy}^2)} \quad (4.158)$$

$$y_f = \frac{I_{xy} A_y - I_x A_x}{2(1+\nu)(I_x I_y - I_{xy}^2)}, \quad (4.159)$$

idet

$$\begin{aligned} A_x &= \iint_I \left( x \frac{\partial H_x}{\partial y} - y \frac{\partial H_x}{\partial x} + (1+\nu)x^2 y - \nu y^3 \right) dx dy \\ &= \int_L \left( -x H_x \cos(x, s) - \left( y H_x - \frac{1}{3}(1+\nu)x^3 y + \nu y^3 x \right) \cos(y, s) \right) ds \end{aligned} \quad (4.160)$$

$$\begin{aligned} A_y &= \iint_I \left( x \frac{\partial H_y}{\partial y} - y \frac{\partial H_y}{\partial x} - (1+\nu)xy^2 + \nu x^3 \right) dx dy \\ &= \int_L \left( -(x H_y - \frac{1}{3}(1+\nu)xy^3 + \nu x^3 y) \cos(x, s) - y H_y \cos(y, s) \right) ds \end{aligned} \quad (4.161)$$

Den helt generelle fremgangsmåde ved behandlingen af sådanne problemer må være følgende:

- a) Med kendskab til  $Q_x$  og  $Q_y$  findes  $EC_x$  og  $EC_y$  af ligningerne (4.115 - 119).
- b)  $T_i$ 'erne,  $H_i$ 'erne eller  $H_i^k$ 'erne findes ud fra ligningerne (4.133 - 4.150). ( $\nu$  sættes lig 1).
- c)  $x_f$  og  $y_f$  findes ved hjælp af ligningerne (4.158 - 161), hvorefter det vridende moment kan udregnes som  $M_v = (x_o - x_f)Q_y - (y_o - y_f)Q_x$ . Lign. (4.111) giver da  $Gv$ .



d) Til slut udregnes spændingerne ved hjælp af ligningerne (4.151 - 4.156).

Ved simple tværsnit kan man ofte gætte sig til forskydningscentrets beliggenhed - f.eks. ud fra symmetribetragtninger.

Ovenstående fremstilling følger i hovedtrækkene fremstillingen i [S-2]; nedenstående udtryk for flytningerne er taget direkte derfra:

$$u_x = -vyz + C_x \left[ \frac{1}{2}v(z_0 - z)(x^2 - y^2) - \frac{1}{6}z^3 + \frac{1}{2}z_0 z^2 \right] + C_y v(z_0 - z)xy - C_3 y + C_2 z + C_4 \quad (4.162)$$

$$u_y = vxz + C_y \left[ \frac{1}{2}v(z_0 - z)(y^2 - x^2) - \frac{1}{6}z^3 + \frac{1}{2}z_0 z^2 \right] + C_x v(z_0 - z)xy + C_3 x - C_1 z + C_5 \quad (4.163)$$

$$u_z = vH_v - C_2 x + C_1 y + C_6 + C_x \left[ H_x - (z_0 z - \frac{1}{2}z^2)x - \frac{1}{6}(2+v)x^3 + \frac{1}{2}vxy^2 \right] + C_y \left[ H_y - (z_0 z - \frac{1}{2}z^2)y - \frac{1}{6}(2+v)y^3 + \frac{1}{2}vx^2y \right] \quad (4.164)$$

$C_1, C_2, C_3, C_4, C_5$  og  $C_6$  er integrationskonstanter. Da flytningerne skal være entydige, må  $H_x, H_y$  og  $H_v$  også være det, eftersom ligningerne (4.162-164) skal gælde for vilkårligt valgte værdier af  $v, C_x$  og  $C_y$ .

Søger man løsningen af problemet ved hjælp af  $H_1$  funktionerne, skal man løse et Neumann problem, og om dette ved man, at der ved begrænsede områder er en enkeltuendelighed af løsninger. Af ligningerne (4.155-156) fremgår det, at  $H_1$  lig en konstant ingen fysisk betydning har, hvorfor man som ekstra betingelse kan kræve, at  $H_1$  har en given værdi et vilkårligt sted i området eller på randen.

Det fremgår af ligningerne (4.144-145), at  $H_x^k$  ved et omløb omkring det  $j$ 'te hul ændrer sig  $(1+v) \oint_{L_j} x^2 dy$ , og at  $H_y^k$  ændrer sig  $-(1+v) \oint_{L_j} y^2 dx$ .  $H_x^k$  og  $H_y^k$  er altså flertydige. For at få entydige funktioner at regne med kan man i stedet søge  $H_x^k + \sum_{j=1}^m \left( \frac{1}{2\pi} (1+v) \oint_{L_j} x^2 dy \right) \theta_j$  og  $H_y^k - \sum_{j=1}^m \left( \frac{1}{2\pi} (1+v) \oint_{L_j} y^2 dx \right) \theta_j$ , hvor  $\theta_j$  er vinklen fra en vilkårlig valgt fast retning til retningen fra et vilkårligt

valgt fast punkt i det  $j$ 'te hul til funktionsværdipunktet. Disse funktioner vil være entydige, og deres komplekst konjugerede vil også være entydige, da  $H_1$  er det, og da den komplekst konjugerede til  $\theta_j$  jvnf. lign. (4.11) er det. Man skal derfor løse det ændrede Dirichlet problem, hvor man søger en harmonisk funktion, hvis randværdier er kendte med undtagelse af en konstant på hver indre rand, og hvis harmonisk konjugerede er entydig. Mikhlín [M-4] har vist, at dette problem ved begrænsede områder har en entydig løsning.

#### 4.2.3. Elliptiske paraboloideskaller beregnet ved hjælp af membranteorien.

Denne behandling af flade skaller tager udelukkende sigte på sikring af statisk ligevægt, derfor vil diskontinuiteter og singulariteter i spændinger og flytninger blive accepteret. At sådanne singulariteter ikke er noget specielt for skaller, ses f.eks. af, at en enkeltkraft på en skive giver anledning til uendelige spændinger og uendelige flytninger. I plasticitetsteoretisk henseende vil en sådan behandling kunne frembringe en økonomisk nedreværdiløsning, idet skallen dog omkring spændings-singulariteter evt. må forudsættes at bære som en plade. Om en sådan nedreværdiløsning så kan bruges i den praktiske projektering af en skal, må bl.a. afhænge af dennes stabilitetslast.

Mange meget væsentlige punkter i denne behandling er taget fra [J-5]

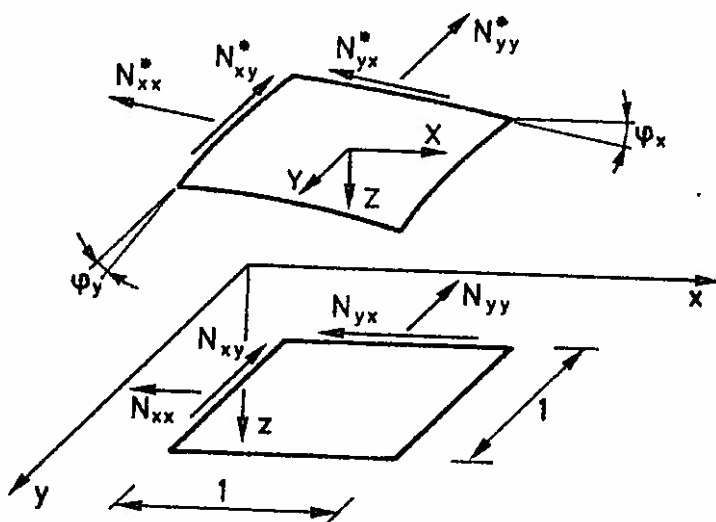


Fig. 4.8

X, Y og Z er belastningen på skallen pr. fladeenhed i xy-planen i retningerne x, y og z.

$N_{xx}^*$ ,  $N_{xy}^*$ ,  $N_{yy}^*$  og  $N_{yx}^*$  er snitkræfter i skallen pr. længdeenhed af skallen.

$N_{xx}$ ,  $N_{xy}$ ,  $N_{yy}$  og  $N_{yx}$  er snitkræfter i skallen nedprojiceret på xy-planen pr. længdeenhed i xy-planen.

Sammenhængen mellem kræfter i skallen og de nedprojicerede kræfter fås af

$$N_{xx}^* = N_{xx} \frac{\cos \varphi_y}{\cos \varphi_x} \quad (4.165)$$

$$N_{yy}^* = N_{yy} \frac{\cos \varphi_x}{\cos \varphi_y} \quad (4.166)$$

$$N_{xy}^* = N_{yx}^* = N_{xy} = N_{yx} \quad (4.167)$$

hvor betydningen af vinklerne  $\varphi_x$  og  $\varphi_y$  fremgår af fig. 4.8.

Kraftlige vægten kan udtrykkes således

$$\frac{\partial N_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial N_{yx}}{\partial y} + X = 0 \quad (4.168)$$

$$\frac{\partial N_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial N_{yy}}{\partial y} + Y = 0 \quad (4.169)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} (N_{xx} \frac{\partial z}{\partial x} + N_{xy} \frac{\partial z}{\partial y}) + \frac{\partial}{\partial y} (N_{yy} \frac{\partial z}{\partial y} + N_{yx} \frac{\partial z}{\partial x}) + Z = 0 \quad (4.170)$$

Ligningerne (4.167-169) sikrer eksistensen af en funktion  $T(x,y)$ , således at

$$N_{xx} = \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} - \int X dx - E_x(x,y) = \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + N_{xx}^p(x,y) \quad (4.171)$$

$$N_{yy} = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} - \int Y dy - E_y(x,y) = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + N_{yy}^p(x,y) \quad (4.172)$$

$$N_{xy} = - \frac{\partial^2 T}{\partial x \partial y} \quad (4.173)$$

$N_{xx}^p$  og  $N_{yy}^p$  indføres af bekvemmelighedsgrunde.

$E_x$  og  $E_y$  skal have følgende egenskaber:

$E_x$  skal være stykkevis konstant m.h.t. x og vilkårlig m.h.t. y.

$E_y$  skal være stykkevis konstant m.h.t.  $y$  og vilkårlig m.h.t.  $x$ .

Ligningerne (4.168-169) og (4.171-173) indsat i lign. (4.170) giver

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - 2 \frac{\partial^2 T}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = g \quad (4.174)$$

hvor

$$g = g(x, y) = -Z + X \frac{\partial z}{\partial x} + Y \frac{\partial z}{\partial y} - N_{xx}^p \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - N_{yy}^p \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \quad (4.175)$$

Langs et snit i skallen, hvis projektion i  $xy$ -planen går fra  $a$  til  $b$ , har spændingerne på den del af skallen, der ligger til venstre for snittet, komponenterne  $p_x$  og  $p_y$  efter henholdsvis  $x$ - og  $y$ -aksens retning pr. længdeenhed af det nedprojicerede snit.

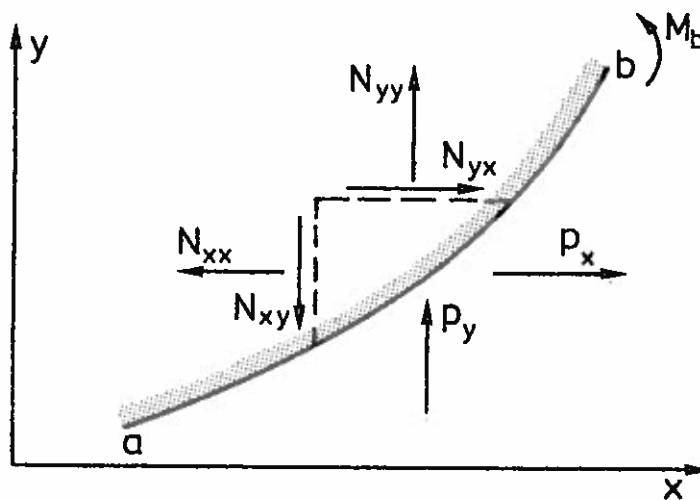


fig. 4.9. Nedprojiceret belastning på et snit.

$$p_x ds = N_{xx} dy - N_{yx} dx = d \left( \frac{\partial T}{\partial y} \right) + N_{xx}^p dy \quad (4.176)$$

$$p_y ds = N_{xy} dy - N_{yy} dx = -d \left( \frac{\partial T}{\partial x} \right) - N_{yy}^p dx. \quad (4.177)$$

Resultanten på snittet bliver

$$P_x = \int_a^b p_x ds = \left(\frac{\partial \Pi}{\partial y}\right)_b - \left(\frac{\partial \Pi}{\partial y}\right)_a + \int_a^b N_{xx}^P \frac{\partial y}{\partial s} ds \quad (4.178)$$

$$P_y = \int_a^b p_y ds = -\left(\frac{\partial \Pi}{\partial x}\right)_b + \left(\frac{\partial \Pi}{\partial x}\right)_a - \int_a^b N_{yy}^P \frac{\partial x}{\partial s} ds \quad (4.179)$$

Momentet i z-aksens retning omkring pkt. b af kræfterne på snittet a-b regnet positivt som vist på fig. 4.9, er

$$\begin{aligned} M_b &= \int_a^b (y_b - y) p_x ds - \int_a^b (x_b - x) p_y ds \\ &= -(y_b - y_a) \left(\frac{\partial \Pi}{\partial y}\right)_a - (x_b - x_a) \left(\frac{\partial \Pi}{\partial x}\right)_a + T_b - T_a + \\ &\quad \int_a^b (y_b - y) N_{xx}^P \frac{\partial y}{\partial s} ds + \int_a^b (x_b - x) N_{yy}^P \frac{\partial x}{\partial s} ds \\ &= -(y_b - y_a) \left(\frac{\partial \Pi}{\partial y}\right)_a - (x_b - x_a) \left(\frac{\partial \Pi}{\partial x}\right)_a + T_b - T_a + M_b^P \end{aligned} \quad (4.180)$$

For at forklare betydningen af  $N_{xx}^P = - \int X dx - E_x$  og derved også  $N_{yy}^P = - \int Y dy - E_y$  gøres følgende ræsonnement.

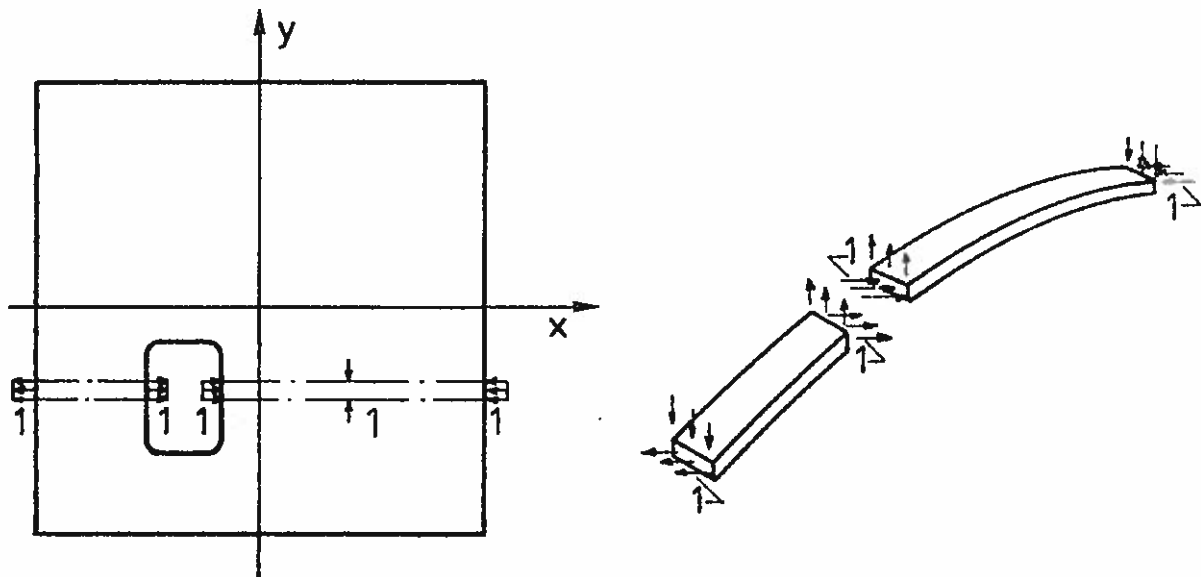


fig. 4.10. Principskitse af partikulært system til overførsel af kraften 2 fra hul til ydre skalrand.

En strimmel med bredden 1 skæres ud af skallen ved snit parallelle med x-aksen. Strimmelen regnes også at fortsætte gennem eventuelle huller. Denne strimmel angribes med vandrette kræfter, så-

ledes at  $N_{xx} = N_{xx}^p = - \int X dx - E_x$ , hvor  $X$  er lasten pr. fladeenhed, og  $E_x$  er summen af linielaster i  $x$ -aksens retning, f.eks. hidrørende fra belastning på indre eller ydre rande. For at sikre at kræfterne er membrankræfter, er det desuden nødvendigt at angribe strimmelen med fladekræfter i  $z$ -aksens retning på  $X \frac{\partial z}{\partial x} - N_{xx}^p \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ , samt hvor de vandrette linielaster  $\Delta E_x$  angriber med lodrette linielaster  $\Delta E_x \frac{\partial z}{\partial x}$ . Hermed har man fundet det, jeg vil kalde et partikulært system, der er i ligevægt. For at kompensere for den påførte lodrette belastning angribes med en tilsvarende modsat rettet, som indgår i beregningerne på lige fod med den øvrige belastning (se ligningerne (4.174-175)). Ved at lade bredden af strimmelen gå imod nul, samtidig med at den samlede påførte belastning holdes konstant, kan linielaster parallelle med  $x$ -aksen og enkeltkræfter behandles.

Randbelastningen i det partikulære system behøver ikke at være den samme som i det virkelige system, idet  $T$ -funktionen kan benyttes til at justere randbetingelserne - et fornuftigt valgt partikulært system kan imidlertid betyde væsentlige regningsmæssige lettelser. Man står temmelig frit ved valget af det partikulære system, idet diskontinuiteter af  $N_{xx}^p$  i  $y$ -aksens retning tillades, blot kræves det, at de enkelte strimler er i statisk ligevægt. På fig. 4.10 er en randbelastning på en i øvrigt ubelastet skal skitseret, der opfylder ovennævnte forudsætninger ( $-N_{xx}^p \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$  er ikke indtegnet).

Når det partikulære system er valgt, findes funktionen  $T(x,y)$ , der selvfølgelig er afhængig af ovennævnte valg, således at ligningerne (4.174-175) og randbetingelserne er tilfredsstillet.

Går snittet  $a$  til  $b$  i en lukket kurve omkring et hul, således at  $b$  kommer til at ligge samme sted som  $a$ , vil førnævnte kraft og momentresultant på snittet jvnf. ligningerne (4.178-180) blive

$$P_x = \oint N_{xx}^p \frac{\partial y}{\partial s} ds \quad (4.181)$$

$$P_y = -\oint N_{yy}^p \frac{\partial x}{\partial s} ds \quad (4.182)$$

$$M_{b=a} = \oint (y_b - y) N_{xx}^P \frac{\partial y}{\partial s} ds + \oint (x_b - x) N_{yy}^P \frac{\partial x}{\partial s} ds, \quad (4.183)$$

hvis T forudsættes entydig i området.

Ved metoder som f.eks. finite difference metoder, der forudsætter en entydig spændingsfunktion, vil resulterende vandret last og moment omkring z-aksen derfor kun kunne overføres fra en indre skalrand til andre indre skalrande eller den ydre skalrand ved hjælp af passende valgte partikulære systemer.

Ved skaller med positiv Gauss krumning kan man ikke kræve mere end én randbetingelse tilfredsstillet på samme randdel. Her skal kun omtales én randbetingelse, der dog må betegnes som langt den vigtigste. Man kræver, at der ikke kommer momenter omkring en lodret akse i et bånd langs randen, der benyttes til at optage de vandrette kræfter. Ved lige rand svarer dette til, at der ingen vandrette kræfter er vinkelret på skalranden.

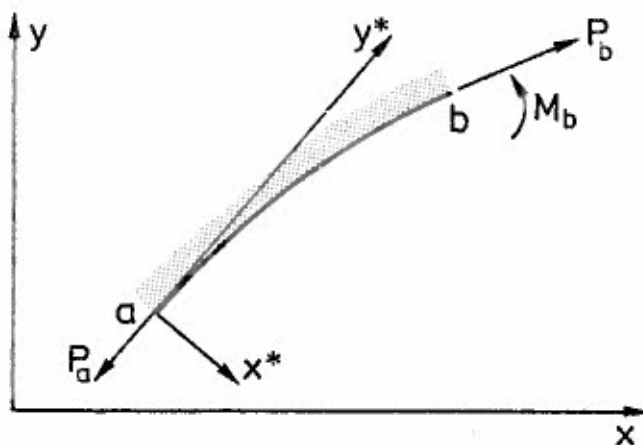


fig. 4.11.

Kaldes kraften i båndet  $P_a$  ved pkt. a og  $P_b$  et vilkårligt sted b på randen, fås (se fig. 4.11)

$$M_b = -x_b^* P_a = -y_b^* \left( \frac{\partial T}{\partial y^*} \right)_a - x_b^* \left( \frac{\partial T}{\partial x^*} \right)_a + T_b - T_a + M_b^D \Rightarrow$$

$$T_b = y_b^* \left( \frac{\partial T}{\partial s} \right)_a + x_b^* \left( \left( \frac{\partial T}{\partial n} \right)_a - P_a \right) + T_a - M_b^D \quad (4.184)$$

Hvis  $M_b^D = 0$ , skal T være en lineær funktion i  $x^*$  og  $y^*$  og følgelig

også i  $x$  og  $y$ . Ovenstående udtryk gælder selvfølgelig, både når der er tale om indre randkurver og ydre randkurver.

I dette tilfælde er der 3 frihedsgrader ved hver randkontur, idet  $T_a$  og koefficienterne til  $x_b^*$  og  $y_b^*$  i lign. (4.184) kan vælges. De 3 frihedsgrader på den ydre rand kan passende bruges til at fikserer  $T$  funktionen i rummet, medens de 3 frihedsgrader for hver indre rand f.eks. kan vælges således, at momentet omkring 2 vandrette akser samt den lodrette kraft fra et ovenlys kan optages af skallen.

I det følgende specialiseres for elliptiske paraboloideskaller. Midterfladens ligning kan i dette tilfælde skrives på formen

$$z = \frac{1}{2} a_2 x^2 + a_1 x + \frac{1}{2} b_2 y^2 + b_1 y + c, \quad (4.185)$$

hvor  $a_2$ ,  $a_1$ ,  $b_2$ ,  $b_1$  og  $c$  er konstanter, og hvor  $a_2$  og  $b_2$  forudsættes positive. Lign. (4.174) bliver til

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} b_2 + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} a_2 = g. \quad (4.186)$$

Med  $x_t = \frac{x}{\sqrt{b_2}}$  og  $y_t = \frac{y}{\sqrt{a_2}}$  fås

$$\frac{\partial^2 T(x,y)}{\partial x_t^2} + \frac{\partial^2 T(x,y)}{\partial y_t^2} = g(x,y). \quad (4.187)$$

Ønsker man, at alle størrelser i lign. (4.187) skal være funktioner af  $x_t$  og  $y_t$ , fås principielt

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 T^t(x_t, y_t)}{\partial x_t^2} + \frac{\partial^2 T^t(x_t, y_t)}{\partial y_t^2} &= g^t(x_t, y_t) = \\ \frac{\partial^2 T(x_t \sqrt{b_2}, y_t \sqrt{a_2})}{\partial x_t^2} + \frac{\partial^2 T(x_t \sqrt{b_2}, y_t \sqrt{a_2})}{\partial y_t^2} &= g(x_t \sqrt{b_2}, y_t \sqrt{a_2}). \end{aligned} \quad (4.188)$$

Som partikulær løsning kan anvendes

$$T_p^t = \frac{1}{2\pi} \int_I g^t \ln |R_t - R_t'| dF_t. \quad (4.189)$$

Heraf og ved hjælp af lign. (4.175) fås den partikulære løsning for en enkeltkraft  $P_z$  på skallen i  $z$ -aksens retning angribende i pkt.  $R_t^*$ , hvor  $\theta_t$  er vinklen fra en vilkårlig fast retning til  $R_t' - R_t$ .



$$G_{Pz}^t = - \frac{[P_z]}{\sqrt{a_2 b_2}} \frac{1}{2\pi} \ln |\xi_t^* - \xi_t'| \quad (4.190)$$

ette kræfter kan behandles som før nævnt. Det er imidlertid muligt at finde funktioner af typen lign. (4.190), der udøver sådanne kræfter.

oment vinkelret på skalfladen med komponenten  $M_z$  i z-aksens retning kan beskrives ved

$$G_{Mz}^t = - [M_z] \frac{\theta_t}{2\pi}, \quad (4.191)$$

skæretkraft i skæringslinien mellem tangentplanen og xz-planen med komponenten  $P_x$  i x-aksens retning ved

$$G_{Px}^t = - [P_x] \sqrt{a_2} \frac{1}{2\pi} ((x_t^* - x_t') \ln |\xi_t^* - \xi_t'| - (y_t^* - y_t') \theta_t), \quad (4.192)$$

skæretkraft i skæringslinien mellem tangentplanen og yz-planen med komponenten  $P_y$  i y-aksens retning ved

$$G_{Py}^t = - [P_y] \sqrt{b_2} \frac{1}{2\pi} ((y_t^* - y_t') \ln |\xi_t^* - \xi_t'| + (x_t^* - x_t') \theta_t), \quad (4.193)$$

oment  $M_x$  omkring x-aksen ved

$$G_{Mx}^t = - \frac{[M_x]}{a_2 \sqrt{b_2}} \frac{1}{2\pi} \frac{y_t^* - y_t'}{|\xi_t^* - \xi_t'|^2}, \quad (4.194)$$

moment  $M_y$  omkring y-aksen ved

$$G_{My}^t = \frac{[M_y]}{b_2 \sqrt{a_2}} \frac{1}{2\pi} \frac{x_t^* - x_t'}{|\xi_t^* - \xi_t'|^2}. \quad (4.195)$$

er og momenter i ovenstående udtryk er størrelser i det afslørede rum. Da lign (4.191) repræsenterer et moment vinkelret på skalfladen, skal man, hvis skallen angribes med momenter  $M_z^S$  i z-aksens retning, foruden  $M_z = M_z^S$  regne med  $M_x = M_z^S \frac{\partial z}{\partial x}$  og  $M_y = M_z^S \frac{\partial z}{\partial y}$ , og tilsvarende gælder, at hvis skalfladen angribes med de vandrette kræfter  $P_x^S$  og  $P_y^S$ , skal der regnes med drag til  $P_z$  på henholdsvis  $- P_x^S \frac{\partial z}{\partial x}$  og  $- P_y^S \frac{\partial z}{\partial y}$ . Ved kræfter og momenter i andre akseretninger skal der ikke foretages korrektioner. Med størrelserne i de skarpkantede parenteser sat lig  $\dots$  funktionerne betragtes som Greenske funktioner.

Ved skaller med indre randkurver vælges et punkt  $\xi_i^*$  inden for hver indre randkurve. Kaldes ved det i'te hul den resulterende kraft i x- og y-aksens retning for henholdsvis  $P_x^i$  og  $P_y^i$ , og det tilsvarende resulterende moment omkring z-aksen for  $M_z^i$ , kan spændingsfunktionen  $T^t$  sammensættes således

$$T^t = T_e^t + \sum_{i=1}^m (G_{P_x^i}^t + G_{P_y^i}^t + G_{M_z^i}^t), \quad (4.196)$$

hvor  $T_e^t = T_e^t(x_t, y_t)$  er en entydig funktion. Der gælder

$$\Delta T^t = \Delta T_e^t = g^t \quad (4.197)$$

Indføres på sædvanlig måde den harmoniske funktion  $H^t = H^t(x_t, y_t)$ , således at

$$H^t = T_e^t - T_p^t, \quad (4.198)$$

hvor  $T_p^t$  er en partikulær løsning, med randbetingelserne

$$H^t = T^t - \sum_{i=1}^m (G_{P_x^i}^t + G_{P_y^i}^t + G_{M_z^i}^t) - T_p^t, \quad (4.199)$$

er problemet reduceret til et Dirichlet problem, om hvilket man ved, at der er en entydig løsning.  $T_p^t$  kan beregnes af lign. (4.189), eller den kan undertiden bestemmes ved hjælp af en antagelse om den partikulære løsnings form. F.eks. er det forholdsvis simpelt at angive  $T_p^t$  for  $g = x^m y^m$  og  $g = \cos(ax) \sin(by)$ , hvor n og m er heltal, medens a og b er reelle tal.

Lign. (4.196) kan også tænkes benyttet ved andre skalformer end elliptiske paraboloideskaller, i det tilfælde må man dog blot huske på, at det man søger er  $T_e$ , hvor

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 T_e}{\partial x^2} \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - 2 \frac{\partial^2 T_e}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 T_e}{\partial y^2} \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \\ = & g(x, y) - \left( \frac{\partial \Sigma G}{\partial x^2} \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - 2 \frac{\partial^2 \Sigma G}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \Sigma G}{\partial y^2} \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \right) \end{aligned} \quad (4.200)$$

#### 4.3. Forsøg med allerede kendte metoder.

Det matematiske problem ved beregning af membranskaller er anderledes end ved beregning af fri vridning og bøjning med forskydning. I første del af dette kapitel behandles membranskaller, den næste del benyttes til en behandling af fri vridning og bøjning med forskydning, og til slut omtales de mest almindeligt anvendte numeriske metoder, og de forsøg forfatteren har gjort med disse.

Beregning af membrankræfter i en elliptisk paraboloideskal blev i afsnit 4.2.3. udformet som et rent Dirichlet problem. Den harmoniske funktion kan ved et  $m + 1$  gange sammensat område søges på formen (se lign. (4.56)).

$$H^t(p) = \int_{L_t} \mu(\sigma) d\theta_t + \sum_{k=1}^m A_k \ln |z_t^i - z_t^k|, \quad (4.202)$$

hvorved man får ligningen

$$H^t(s) = \sigma_t \mu(s) + \int_{L_t} \mu(\sigma) d\theta_t + \sum_{k=1}^m A_k \ln |z_t^i - z_t^k| \quad (4.203)$$

at løse. Ved diskretiseringen findes

$$H^t(s_i) = \sigma_t(s_i) \mu(s_i) + \sum_{j=1}^n W(s_i, s_j) \mu(s_j) + \sum_{k=1}^m A_k \ln |z_t^i - z_t^k| \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (4.204)$$

Da  $\mu$  kan vælges frit et sted på hver indre rand, er der  $m$  kendte  $\mu(s_i)$ 'er i ligningssystemet, hvorfor dette består af  $n$  ligninger med  $n$  ubekendte, idet  $A_k$ 'erne også er at opfatte som ubekendte. Mikhlin [M-4] har vist, at lign. (4.203) derefter har en entydig løsning. Hvis man søger den harmoniske funktion på formen

$$H^t(p) = \int_{L_t} \mu(\sigma) \ln(r_p^t/c) d\sigma, \quad (4.205)$$

behøver man ved sammensatte områder ikke at tilføje ekstra led -derimod kan man risikere, at den homogene ligning har ikke-trivielle løsninger:  $\mu \neq 0$ . Ved et passende valgt  $c$  kan dette dog undgås.

Ved fri vridning og bøjning med forskydning skal man enten løse det ændrede Dirichlet problem eller Neuman problemet. Ved det ændrede Dirichlet problem søges den entydige harmoniske funktion, der har givne randværdier bortset fra en konstant  $C_k$

ved hver indre randkurve, og hvis harmonisk konjugerede er entydig i området. Kravet til den harmonisk konjugerede om at være entydig bevirker, at konstanterne  $A_k$  i ligningerne (4.55) og (4.59) skal være lig 0. Mikhlin [M-4] har vist, at problemet har en entydig løsning. Ligningerne, man skal løse, er i det ene tilfælde

$$H^k(s) = H_{\text{kendt}}^k(s) + C_k = \alpha\mu(s) + \int_L \mu(\sigma)d\theta, \quad (4.206)$$

hvis  $s$  ligger på  $L_k$ . Da  $\mu$  frit kan vælges et sted på hver indre rand, får man ved diskretiseringen et fuldstændigt kvadratisk ligningssystem, hvor  $C_k$ 'erne indgår på lige fod med de ubekendte  $\mu$ 'er.

I det andet tilfælde bliver ligningssystemet, der skal løses:

$$H^k(s) = H_{\text{kendt}}^k(s) + C_k = \int_L \mu(\sigma)\ln(r_p/c)d\sigma, \quad (4.207)$$

hvis  $s$  ligger på  $L_k$ , og da  $A_k$  i lign. (4.55) skal være lig 0, fås ekstrabetingelserne

$$\int_{L_k} \mu(\sigma)d\sigma = 0. \quad k = 1, 2, \dots, m \quad (4.208)$$

Også i dette tilfælde indgår  $C_k$  som ubekendte i det fremkomne ligningssystem.

Hvis man ønsker at behandle problemet som et Neumann problem, kan man enten benytte lign. (4.49), der omskrevet lyder

$$H(s) = -\frac{1}{2\pi-\alpha} \left( \int_L \frac{\partial H(\sigma)}{\partial v} \ln r_p d\sigma - \int_L H(\sigma)d\theta \right) \quad (4.209)$$

eller lign. (4.40)

$$\frac{\partial H(s)}{\partial n} = \frac{\partial H^k(s)}{\partial s} = -\pi\mu(s) - \int_L \mu(\sigma) \frac{\cos(r_{P,n})}{r_p} d\sigma \quad (4.210)$$

Udtrykket lign. (4.210) har ingen mening i et hjørne. Da den harmoniske funktion  $H$  beskrives ved et integral med logaritmisk kerne, vil man i det sidste tilfælde umiddelbart vente, at  $\mu$  vil gå imod uendeligt i hjørnerne. Ved Neumann problemet kan man fuldstændiggøre sit ligningssystem ved at kræve, at den harmoniske funktion har en given værdi et vilkårligt sted i området. I lign. (4.209) er dette simpelt nok, da det er den harmoniske funktion selv, der er den ubekendte. Ved lign. (4.210) må man desuden kræve

$$H_{\text{kendt}}(p) = \int_L \mu(\sigma)(\ln r_p + C_1) d\sigma, \quad (4.211)$$

hvor  $p$ ,  $H_{\text{kendt}}(p)$  og  $C_1$  kan vælges vilkårligt; af numeriske grunde bør  $p$  vælges et sted midt i området. Da man skal kende  $H$  på randen for at finde vridningsinertimomentet og forskydningscentret, anser Jaswon & Ponter [J-1] lign. (4.209) som meget fordelagtig at benytte.

Til slut gennemgås kort de numeriske metoder, forfatteren har benyttet ved løsning af Laplace's ligning, hvor tæthedskurven er identisk med områdets randkurve, og de efter forfatterens mening ikke helt tilfredsstillende resultater omtales.

Ved beregning af spændinger må man skelne mellem, om disse skal søges i et punkt på randen eller inde i området. På grund af de numeriske forudsætninger vil de fleste metoder give dårlige resultater i en brænne ved randen, med en bredde der svarer til 1-2 gange afstanden mellem de punkter på randen ('nodal points'), hvor den harmoniske funktion forudsættes kendt.

Ud fra spændingerne på randen og inden for brænnen kan man ved interpolation finde spændingerne i brænnen - en sammenblanding af metoder der dog synes temmelig utilfredsstillende.

Den hyppigst anvendte numeriske metode ved løsning af integral-ligninger er at approximere tæthedsfunktionen til enten at være stykkevis konstant, lineært varierende, en sum af andengradsparabler, eller sammensat af ortogonale polynomier, og som afhænger af tæthedsfunktionen  $\mu$  visse karakteristiske steder. Idet disse karakteristiske værdier skiftevis sættes lig 1 og ellers 0, udregnes integralerne i nodal points ( $W(s_i, s_j)$  i lign. (4.204)), og da randværdierne der er kendte, fås et ligningssystem til udregning af de karakteristiske tæthedsværdier (se lign. (4.204)).

Kravet om generel programmering og generelle områdsformer bevirkede, at der ikke blev gjort alvorlige forsøg på at tilnærme tæthedsfunktionen ved hjælp af ortogonale polynomier. Desuden benyttedes der højst 50 'nodal points' ved de simple områdeformer,

der behandles, og af samme grund blev evt. symmetri ikke udnyttet.

De numeriske tilnærmelsesmetoder, der her er bragt i anvendelse, kan inddeles i 3 grupper:

- 1) Anvendelse af Newton-Cotes formler og Lagranges formel uden på forhånd at have lagt sig fast på tæthedsfunktionens form;
- 2) Tæthedsfunktionen antages at variere retlinet mellem værdierne i intervaldelepunkterne.
- 3) Tæthedsfunktionen antages konstant i hvert interval.

I det første tilfælde deles randkurven op i delkurver, der går fra hjørne til hjørne

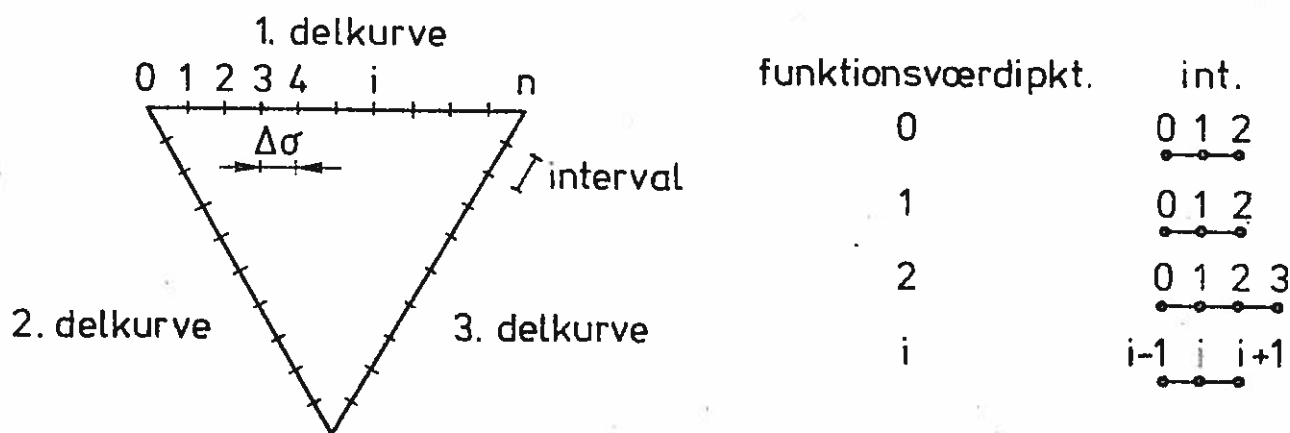


Fig. 4.12.

Hver delkurve er delt op i lige store intervaller, i et antal der er delelig med 2. 'Nodal points' er beliggende i intervaldelepunkterne. Ved integraler over delkurver, som ikke indeholder det punkt, hvori funktionsværdien søges - (her kaldet funktionsværdipunktet) - benyttes den udvidede Simpsonformel.

$$\int \mu K d\sigma = \left( \frac{1}{3} \mu_0 K_0 + \frac{4}{3} \mu_1 K_1 + \frac{2}{3} \mu_2 K_2 + \frac{4}{3} \mu_3 K_3 + \dots + \frac{1}{3} \mu_n K_n \right) \Delta\sigma. \quad (4.212)$$

Hvis  $K$  er kontinuert i funktionsværdipunktet, benyttes ovenstående formel også på den delkurve, der indeholder dette punkt - hvis ikke, betragtes de på fig. 4.12 viste 4 tilfælde, som viser hvilke intervaller, der trækkes ud og får en speciel behandling alt efter placeringen af funktionsværdipunktet. Den øvrige del af delkurven behandles efter den udvidede Simpsonformel, idet 3 af intervallerne dog integreres ved hjælp af Newton-Cotes trediegradsformel

$$\int \mu K d\sigma = \left( \mu_{i-3} K_{i-3} + 3\mu_{i-2} K_{i-2} + 3\mu_{i-1} K_{i-1} + \mu_i K_i \right) \frac{\Delta\sigma}{8}, \quad (4.213)$$

hvis antallet af de resterende intervaller til en af siderne er ulige.

I de intervaller, der trækkes ud, antages tæthedsfunktionen at variere efter et polynomium  $\mu(\sigma)$  dannet ud fra Lagranges formel

$$\mu(\sigma) = \sum_{i=0}^n L_i(\sigma) \mu_i,$$

hvor

$$L_i(\sigma) = \frac{(\sigma - \sigma_0)(\sigma - \sigma_1) \dots (\sigma - \sigma_{i-1})(\sigma - \sigma_{i+1}) \dots (\sigma - \sigma_n)}{(\sigma_i - \sigma_0)(\sigma_i - \sigma_1) \dots (\sigma_i - \sigma_{i-1})(\sigma_i - \sigma_{i+1}) \dots (\sigma_i - \sigma_n)}.$$

Formlen bør ikke forlede til at tro, at det er hele delkurven, der betragtes; det er kun de specielt fremdragne intervaller og værdierne af  $\mu$  dér, der udnyttes. Følgende tilnærmede udtryk benyttes for korden  $r$  som funktion af buelængden  $\sigma$ , hvis nulpunkt antages i funktionsværdipunktet:

$$r = \sigma + C\sigma^3 = \sigma + \frac{r_0 - \sigma_0}{\sigma_0^3} \sigma^3, \quad (4.214)$$

hvor størrelserne fremgår af fig. 4.13.

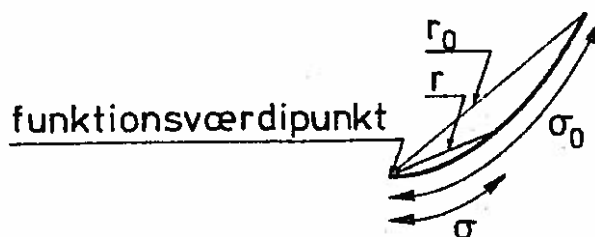


fig. 4.13.

Kernerne udvikles som f.eks. ved  $\ln(r/C)$ :

$$\ln(r/C) \approx \ln(\sigma/C) + \frac{(r_0 - \sigma_0)}{\sigma_0^3} \sigma^2, \quad (4.215)$$

hvorefter integrationen over de betragtede intervaller bliver

$$\int \mu \ln(r/C) d\sigma = \sum_i \mu_i \left[ \int L_i(\sigma) \left( \ln(\sigma/C) + \frac{r_0 - \sigma_0}{\sigma_0^3} \sigma^2 \right) d\sigma \right] \quad (4.216)$$

- altså simple og let udregnelige integraler.

I den anden gruppe, hvor der antages retlinet tæthedsfunktion, deles kurven ind i intervaller, der ikke nødvendigvis er lige store. Desuden udnyttes intervalmidtpunkterne:

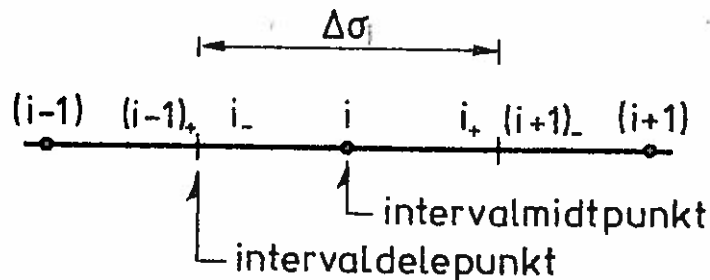


fig. 4.14.

Ved intervaller, der ikke rører funktionsværdipunktet, foretages den numeriske integration ved hjælp af Simpsons formel

$$\int \mu K d\sigma = \sum_i (\mu_{i-} K_{i-} + 2(\mu_{i-} + \mu_{i+}) K_i + \mu_{i+} K_{i+}) \frac{1}{6} \Delta\sigma_i \quad (4.217)$$

Hvor funktionsværdipunktet rører intervallet, gås frem på samme måde, som omtalt ved det første tilfælde.

Antages  $\mu$  stykkevis konstant, kan  $\mu$  sættes uden for parantesen i ovenstående udtryk. Specielt gælder det ved integraler af typen  $\int \mu d\theta$ , at de kan skrives

$$H = \int \mu d\theta = \sum_i \mu_i (\theta_{i+} - \theta_{i-}), \quad (4.218)$$

og ved udregning af de afledede f.eks.

$$\frac{\partial H}{\partial n} = \sum_i \mu_i \left( \frac{\partial \theta_{i+}}{\partial n} - \frac{\partial \theta_{i-}}{\partial n} \right). \quad (4.219)$$



Hvor tæthedsfunktionen regnes stykkevis konstant, ligger 'nodal points' midt i intervallerne, medens de ved lineært varierende tæthedsfunktion kan ligge enten i intervaldelepunkterne eller i intervalmidtpunkterne. Det sidste kan dog absolut ikke anbefales, eftersom den fremkomne tæthedsfunktion da synes at have let ved at 'vippe' omkring disse midtpunkter. Forfatteren har undersøgt simple tværsnit udsat for fri vridning, idet den harmoniske funktion enten dannes ved hjælp af lign. (4.207) eller lign. (4.209), og med anvendelse af de 3 nævnte tilnærmelsesmetoder. Nogenlunde acceptable resultater syntes man kun at kunne få ved benyttelse af lign. (4.209) og med stykkevis konstant tæthedsfunktion - hvilket også er den metode, Jaswon og Ponter [J-1] foreslår. Det kan f.eks. nævnes, at der for tværsnittet fig. 4.12 med anvendelse af 48 'nodal points' opnåedes relative fejl i vridningsinertmomentet på 3 %, i  $\sigma_{\max}$  på 5%, og at fejlen på randspændingen i det sidste 'nodal point' inden hjørnet var 18 % af  $\sigma_{\max}$ .

Målet er imidlertid det noget vanskeligere - at beregne elliptiske paraboloideskaller ved hjælp af integralligningsmetoder. Til forskel fra vridningsproblemet er der såvidt vides ingen, der har forsøgt at beregne elliptiske paraboloideskaller ved hjælp af integralligningsmetoder. Årsagen er nok den, at man i dette tilfælde ikke kan nøjes med at differentiere én gang for at finde spændingerne, man er ved membranskaller tvunget til at gøre det 2 gange. For at finde spændingerne i et snit med normalen  $\xi$  skal man - ved rene integralligningsmetoder, og hvor kernen er  $\ln(r_p/c)$ , således at tæthedsfunktionen går imod uendelig ved hjørner - udregne integraler som

$$\int_L \mu(\sigma) \frac{\cos(2(\xi, r_p))}{r_p^2} d\sigma \quad (4.220)$$

og

$$\int_L \mu(\sigma) \frac{\sin(2(\xi, r_p))}{r_p^2} d\sigma \quad (4.221)$$

I en afstand fra randen, svarende til 2 gange afstanden mellem 'nodal points', kan disse integraler beregnes temmelig nøjagtigt, hvorimod man ude på selve randen vil få svære problemer. Kwan Rim og Allen S. Henry [R-1] har prøvet at angribe dette problem

ved en parabelformet tilnærmelse af tæthedsfunktionen - dog uden overbevisende resultater.

Ved beregning af randspændinger i skaller, hvor problemet er formuleret som et Dirichlet problem, kendes

$$\frac{\partial^2 H}{\partial s^2} = \frac{\partial^2 H}{\partial t^2} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial H}{\partial n} \quad (4.222)$$

Hvis man også kender  $\frac{\partial H}{\partial n}$ , kan man altså umiddelbart bestemme

$$\frac{\partial^2 H}{\partial t^2} = - \frac{\partial^2 H}{\partial n^2} = \frac{\partial^2 H}{\partial s^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial H}{\partial n} \quad (4.223)$$

Tilbage bliver at finde

$$\frac{\partial^2 H}{\partial t \partial n} = \frac{\partial}{\partial s} \left( \frac{\partial H}{\partial n} \right) - \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial s} (H). \quad (4.224)$$

Benyttelsen af numeriske differentiation i forbindelse med integralligninger forekommer meget utiltalende, men synes i dette tilfælde at være den eneste realistiske udvej. Ideen i det følgende er at beregne  $\frac{\partial H}{\partial n}$  og H med integrallinger, for derefter at finde  $\frac{\partial^2 H}{\partial t \partial n}$  ved numerisk differentiation ud fra lign. (4.224). I den forbindelse er der foretaget en serie forsøg på at finde  $\frac{\partial H}{\partial n}$ , hvor den harmoniske funktion søgtes på formen lign. (4.26) og lign. (4.33), og hvor tæthedsfunktionen  $\mu$  antoges at variere retlinet eller at være stykkevis konstant. De bedste resultater fandtes med lign. (4.26),  $\mu$  stykkevis konstant og konstant intervallængde. Som man måske ville vente, var resultaterne dårligst ved hjørner, og formindskelse af intervallængderne dér syntes ikke at hjælpe tværtimod. I fig. 4.15 vises de bedste resultater opnået ved beregning af en kvadratisk membranskal. Den såkaldte eksakte løsning er fremkommet ved hjælp af fourierrækkeudvikling, hvis konvergens undersøgte [F-1].

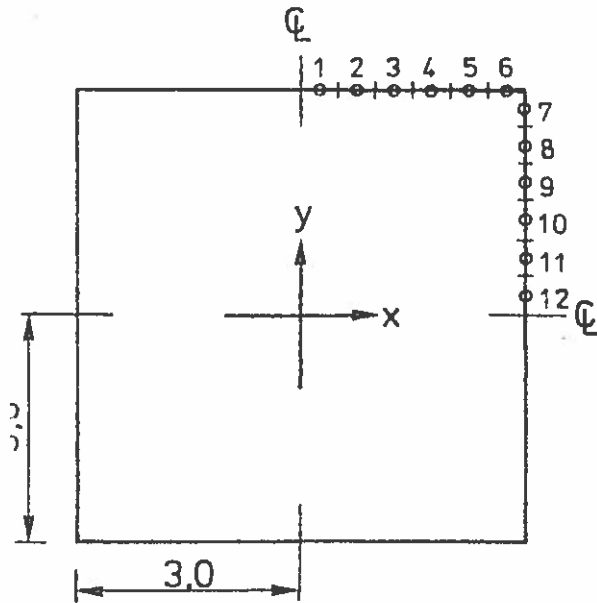
8 'nodal points'

Poissons lign.:  $\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 5$

partikulær løsn.:  $T_p = 2.5 x^2$

problem:  $\Delta H = \Delta(T - T_p) = 0$

med randværdier:  $H = -2.5 x^2$



Pkt.	$\frac{\partial T}{\partial n}$	
	Integralm.	Eksakt
1	10.095	10.086
2	9.741	9.731
3	8.999	8.985
4	7.788	7.762
5	5.953	5.877
6	1.776	2.833
7	3.037	2.833
8	5.801	5.877
9	7.725	7.762
10	8.961	8.985
11	9.713	9.731
12	10.070	10.086

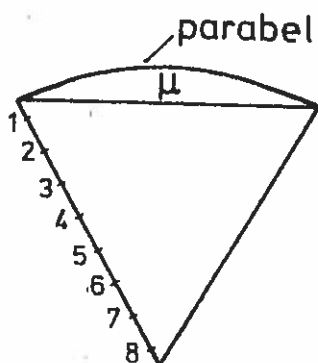
fig. 4.15

elv om forskydningsspændingerne i hjørnet er uendelige, kan resultaterne i nærheden af hjørnet ikke anses for at være helt acceptable.

for at undersøge om det er spændingssingulariteten, der ødelægger beregningsnøjagtigheden ved hjørnerne, ændredes ovenstående jævnt fordelte belastning til en cosinusformet belastning, hvorved spændingssingulariteten bortfalder. Dette gav dog ikke bedre resultater.

En beregning af en trekantformet membranskal med en korrekt spændingsfunktion  $T = x^2 - y^2 + \frac{1}{c} (3xy^2 - x^3)$  gav endnu dårligere resultater end de ovenfor viste.

I undersøgelse af de numeriske tilnærmelser viste, at disse var bemærkede. Det må derfor være de tilnærmelser, der gjordes anvendende tæthedsfunktionen, som kan have forårsaget unøjagtighederne. Forbestillede man sig, at tæthedsfunktionen langs en af siderne af et ligesidet trekant varierer parabolisk, ville man ved udregningen af integralet  $\int_L \mu d\theta$  få nedenstående værdier, idet tæthedsfunktionen approximeres henholdsvis trappeformet og lineært.



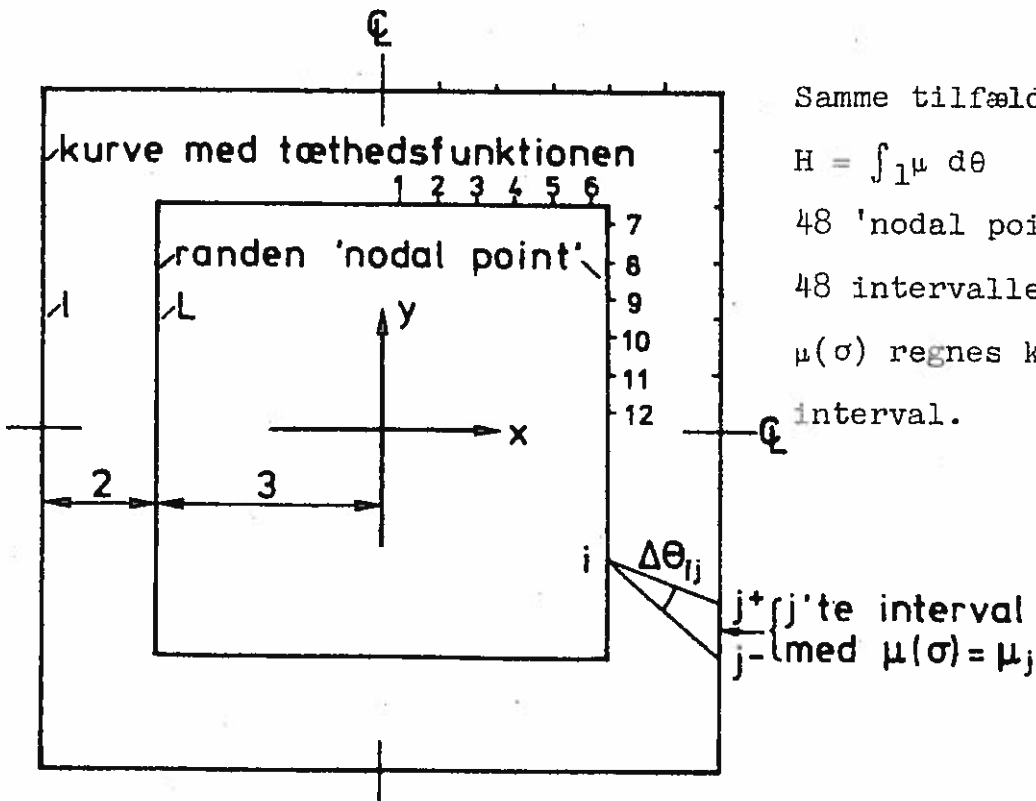
$\int \mu(\sigma) d\theta$			
Pkt.	Eksakt	Trappe	Lineært
1	61.09	70.01	58,90
2	104.39	105.91	102.39
3	115.64	116.36	113.78
4	113.50	113.96	111.79
5	105.60	105.97	104.04
6	95.73	96.08	94.31
7	85.79	86.14	84.51
8	76.64	77.00	75.49

fig. 4.16.

De dårligste resultater findes ved hjørnet i pkt. 1. Ved tilsvarende beregninger med  $\int \mu(\sigma) \ln(r_p/C) d\theta$  og af de afledede i retning af normalen fås endnu dårligere resultater.

#### 4.4. Den anbefalede metode.

En beregning af de dobbelte afledede af spændingsfunktionen viste, at disse var tilfredsstillende nøjagtige i en afstand fra randen på 2 gange afstanden mellem 'nodal points'. Det synes derfor at være en god ide at undersøge, hvor der sker, når tæthedskurven ligger et stykke uden for området. Regningerne bliver i dette tilfælde lettet, eftersom der ingen grænseovergange finder sted - spændingerne på randen og i den førnævnte brænne langs randen vil kunne udregnes direkte og uden besvær. En tæthedsfunktion, der ligger uden for området, er imidlertid ikke istand til at frembringe singulariteter i dette, hvorfor man må forvente vanskeligheder, hvor sådanne forefindes. I fig. 4.17 er angivet resultaterne fra beregningen af førnævnte membranskal.



Samme tilfælde som fig. 4.15.

$$H = \int_1 \mu d\theta$$

48 'nodal points'

48 intervaller

$\mu(\sigma)$  regnes konstant i hvert interval.

Pkt.	$\frac{\partial T}{\partial n}$		$\frac{\partial^2 T}{\partial n^2}$		$\frac{\partial^2 T}{\partial n \partial s}$	
	Integr. l.	Eksakt	Integr. l.	Eksakt	Integr. l.	Eksakt
1	10.084	10.086	5.001	5.0	0.353	0.346
2	9.733	9.731	4.996	5.0	1.081	1.075
3	8.987	8.985	5.003	5.0	1.927	1.925
4	7.759	7.762	4.995	5.0	3.021	3.026
5	5.882	5.877	5.037	5.0	4.659	4.669
6	2.784	2.834	4.414	5.0	8.229	8.176
7	2.783	2.834	4.407	5.0	-8.156	-8.176
8	5.881	5.877	5.049	5.0	-4.675	-4.669
9	7.762	7.762	4.984	5.0	-3.010	-3.026
10	8.986	8.985	5.005	5.0	-1.943	-1.925
11	9.731	5.006	5.006	5.0	-1.072	-1.075
12	10.086	10.086	4.991	5.0	-0.350	-0.346

fig. 4.17.

Sammenlignet med de bedste af de foregående resultater ses, at der er tale om en virkelig forbedring af resultaterne. Når man vurderer resultaterne, må man huske på, at  $\frac{\partial^2 T}{\partial n^2}$  springer fra 5 til 0 ude i spidsen, og at  $\frac{\partial^2 T}{\partial n \partial s}$  dér skal være uendelig.

Denne metode er prøvet både for  $H = \int_1 \mu d\theta$  og  $H = \int_1 \mu \ln(r_p/C) d\sigma$ , og i begge tilfælde fandtes udmærkede resultater.

Ideen med at have kurven med tæthedsfunktionen uden for området er ikke ny, Uberoi [U-1] har brugt det ved løsning af Laplace's ligning, og Oliveira har forsøgt noget lignende ved skiveproblemer [O-1]. Ulempen ved denne metode er, at ligningerne, der skal løses, bliver næsten singulære, og at en uheldig placering af intervaldelepunkter og nodal points kan bevirke, at de bliver fuldstændig singulære, som det vil fremgå af eksemplet fig. 4.18.

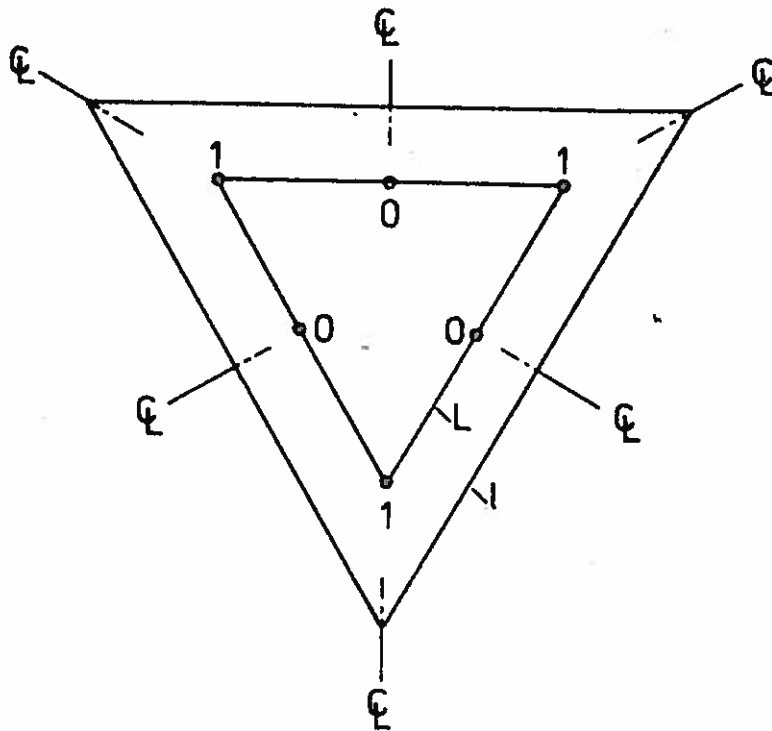


fig. 4.18.

Man søger at danne en harmonisk funktion ved hjælp af  $\int_1 \mu d\theta$  eller  $\int_1 \mu \ln(r_p/C) d\sigma$ , hvor  $\mu$  tilnærmes konstant på hvert af de viste intervaller. Da systemet er tre gange symmetrisk, må  $\mu$  være den samme konstant  $\mu_0$  på hele tæthedskurven, og da der derfor kun er en frihedsgrad, kan man i almindelighed ikke få randbetingelserne tilfredsstillet både i hjørnet og midt på siden. Systemet er singulært.

Ved mere generelle områdeformer vil man have svært ved at gardere sig imod noget lignende, hvorfor metoden, selv om den i visse tilfælde giver udmærkede resultater, ikke uden videre kan anbefales.

For at komme uden om dette problem kan anbefales 2 muligheder. Den ene mulighed er at have flere nodal points end man har intervaller med konstant tæthed. Den anden mulighed er at have flere intervaller med konstant tæthed, end man har nodal points.

Den numeriske metode til løsning af  $H(s) = \int_1 \mu(\sigma) d\theta$  kan være følgende. Tæthedskurven deles op i  $m$  delintervaller, hvor  $\mu(\sigma)$  er konstant (se fig. 4.17). Det  $j$ 'te delintervalls begyndelsespunkt og slutpunkt benævnes med henholdsvis  $j_+$  og  $j_-$ , og den konstante tæthedsfunktion kaldes  $\mu_j$ . Desuden ønskes randbetingelserne opfyldt i  $n$  punkter  $s_i$  på områdets rand

$$H(s_i) = \int \mu(\sigma) d\theta(s_i, \sigma) = \sum_j \mu_j \int d\theta(s_i, \sigma) = \sum_j \mu_j (\theta(s_i, \sigma_{j+}) - \theta(s_i, \sigma_{j-})) \quad (4.225)$$

$$H(s_i) = \sum_j \Delta\theta_{ij} \mu_j = H_i \quad (4.226)$$

$$\frac{\partial H(s_i)}{\partial n} = \sum_j \mu_j \left( \frac{\partial \theta(s_i, \sigma_{j+})}{\partial n} - \frac{\partial \theta(s_i, \sigma_{j-})}{\partial n} \right) \quad (4.227)$$

Når  $\mu_j$  er fundet, findes de afledede simpelthen ved at differentiere hvert led i lign. (4.225), som vist i lign (4.227).

I det første tilfælde haves

$$H_i = \sum_{j=1}^m \Delta\theta_{ij} \mu_j \quad i = 1, 2, \dots, n \quad n > m \quad (4.228)$$

Ønsker man at benytte de mindste kvadraters metode, kan man gøre dette på følgende måde:

Man søger  $m$  værdier  $\mu_j^0$  således, at

$$\sum_{i=1}^n (H_i - H_i^0)(H_i - H_i^0) = \min, \text{ hvor} \quad (4.229)$$

$$H_i^0 = \sum_{j=1}^m \Delta\theta_{ij} \mu_j^0 \quad (4.230)$$

Ved differentiation med hensyn til  $\mu_p^0$  fås

$$\sum_i (-\Delta\theta_{ip})(H_i - \sum_k \Delta\theta_{ik} \mu_k^0) + (H_i - \sum_k \Delta\theta_{ik} \mu_k^0)(-\Delta\theta_{ip}) = 0 \Rightarrow \sum_i \Delta\theta_{ip} H_i = \sum_{ik} \Delta\theta_{ip} \Delta\theta_{ik} \mu_k^0 \quad (4.231)$$

eller på matrixform

$$\Delta\theta^T \underline{h} = \Delta\theta^T \Delta\theta \mu^0. \quad (4.232)$$

$H_1$  er skrevet  $\underline{h}$  for at angive, at der er tale om en vektor. At få et symmetrisk og positivt definit ligningssystem ud af et usymmetrisk, ved at multiplicere med den transponerede matrix, er et gammelkendt forslag, som bl.a. Fox i [F-2] fraråder, da man må forvente, at den resulterende matrix - her  $\Delta\theta^T \Delta\theta$  - bliver næsten singular. Denne metode til dannelse af et  $n \times n$  ligningssystem er ikke afprøvet, bl.a. fordi dannelsen af  $\Delta\theta^T \Delta\theta$  også er temmelig kostbar i køretid.

En anden mulighed er at benytte Gauss-elimination på lign. (4.228). Ligningerne ækvilibreres, således at 2 normen af rækkerne er nogenlunde lige store, og matricen trianguleres ved efterhånden at finde det største element (pivotelementet) i den endnu ikke triangulerede del af matricen og benytte det som diagonalelement. De  $(n-m)$  ligninger, der bliver tilbage efter trianguleringen, bortkastes simpelthen. Dette er afprøvet og har givet ganske udmærkede resultater. Metoden har dog den ulempe, at man ikke får tilfredsstillet sine randbetingelser alle de steder, hvor man gerne vil have dem tilfredsstillet. Et middel til forbedring af dette forhold kan være at forlange randbetingelserne tilfredsstillet i visse nærmere specificerede punkter og triangulere de dertil svarende ligninger først, hvorefter det resterende ligningssystem behandles, som angivet ovenfor.

Ønsker man at have flere tæthedsintervaller end nodal points, altså hvis man søger løsningen på ligningssystemet således:

$$H_i = \sum_{j=1}^m \Delta\theta_{ij} \mu_j, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad n < m \quad (4.233)$$

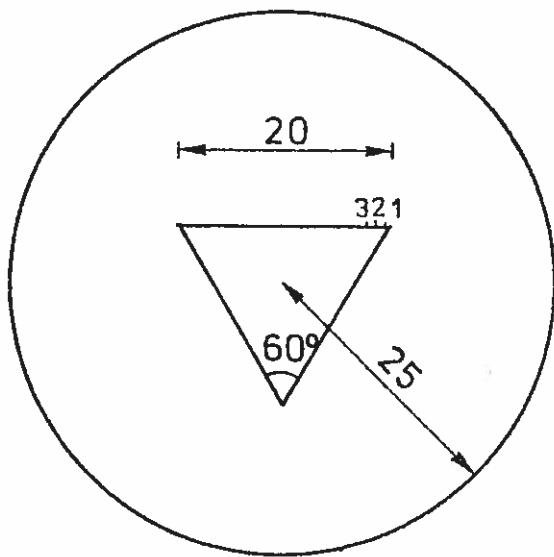
kan man igen benytte ovennævnte Gauss-elimination. I dette tilfælde står der  $m-n$  søjler tilbage. De dertil svarende værdier af  $\mu$  sættes lig 0. I dette tilfælde er den rette ækvilibrering af søjlerne meget vigtig. Undertegnede har valgt en ækvilibrering af søjlerne, således at nøjagtigheden af elementerne i matricen ligger i samme decimal - derefter foretages den førnævnte række ækvilibrering. Denne metode er også prøvet på flere eksempler



og har givet udmærkede resultater.

Både når man har et overtal af 'nodal points', og når der er et overtal af tæthedsintervaller, får man et ligningssystem, der er væsentligt mindre singulært, end det man fik ved at benytte lige mange intervaller og 'nodal points'.

Som eksempel på den sidste metode vises resultaterne fra en beregning af en trekantet membranskal.



Membranskal

63 tæthedsintervaller

48 nodal points

$\Delta T = 20$

$T_p = 10x^2$

Index: I Integralligningsmetode

E Eksakt

Pkt.	$\frac{\partial T}{\partial n}$		$\frac{\partial^2 T}{\partial n^2}$		$\frac{\partial^2 T}{\partial n \partial s}$	
	I	E	I	E	I	E
1	10.496	10.487	20.011	20.000	16.231	16.238
2	29.432	29.431	20.001	20.000	14.067	14.073
3	45.666	45.669	20.000	20.000	11.906	11.908

Fig. 4.19.

Der er kun medtaget resultaterne ved hjørnet, da det er her, nøjagtigheden er dårligst.

Ved beregning af skaller med hjørner, hvor vinklen, der måles i området, ikke overstiger  $90^\circ$ , synes førnævnte beregningsmetoder at give udmærkede resultater. Findes der vinkler over  $90^\circ$ , bliver resultaterne knapt så gode. For at finde ud af hvorfor dette er tilfældet, gøres følgende ræsonnement.

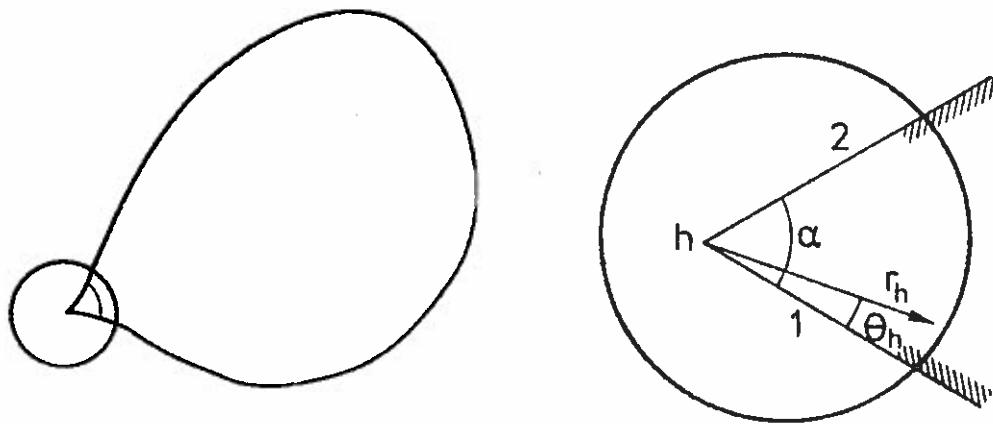


fig. 4.20.

Man betragter et område med mindst 1 hjørne og søger en funktion  $T$  til løsning af Poissons ligning:

$$\Delta T = g(x,y), \quad (4.234)$$

hvor  $g(x,y)$  forudsættes at være kontinuert i hjørnet, og hvor randværdierne forudsættes kendte. På sædvanlig måde skriver man  $T$  som en sum af 2 funktioner

$$T = T_P + H, \quad (4.235)$$

hvorved problemet reduceres til at finde den harmoniske funktion  $H$ , der sikrer, at randbetingelserne er opfyldte. Dette er et Dirichlet problem, om hvilket man ved, at der er en entydig løsning. I sidste del af kap. 4.1 undersøgte en harmonisk funktions egenskaber i et hjørne med rette sider, på hvilke funktionsværdierne var givne. Med randværdierne

$$H_1 = A_1 r_h^{\lambda_p} \quad (4.236)$$

$$H_2 = A_2 r_h^{\lambda_p} \quad (4.237)$$

fandt løsningen lign. (4.69) hvis  $\sin(\lambda_p \alpha) \neq 0$ :

$$H = A_1 r_h^{\lambda_p} \cos(\lambda_p \theta_h) + \frac{A_2 - A_1 \cos(\lambda_p \alpha)}{\sin(\lambda_p \alpha)} r_h^{\lambda_p} \sin(\lambda_p \theta_h) + \sum_{j=1}^{\infty} C_j r_h^{\frac{j\pi}{\sigma}} \sin\left(\frac{j\pi}{\sigma} \theta_h\right), \quad (4.238)$$

og løsningen lign. (4.75) hvis  $\sin(\lambda_p \alpha) = 0$ :

$$H = A_{1p} r_h^{\lambda_p} \cos(\lambda_p \theta_h) + \frac{A_{2p} - A_{1p} \cos(\lambda_p \alpha)}{\alpha \cos(\lambda_p \alpha)} (\theta_h r_h^{\lambda_p} \cos(\lambda_p \theta_h) + \ln r_h r_h^{\lambda_p} \sin(\lambda_p \theta_h)) + \sum_{j=1}^{\infty} C_j r_h^{\frac{j\pi}{\sigma}} \sin(\frac{j\pi}{\sigma} \theta_h). \quad (4.239)$$

Betragtes en af de homogene løsninger

$$H = C_j r_h^{\frac{j\pi}{\sigma}} \sin(\frac{j\pi}{\sigma} \theta_h) = C_j r_h^{t_j} \sin(t_j \theta_h) \quad (4.240)$$

fås nedenstående afledede

$$\frac{\partial H}{\partial r_h} = C_j t_j r_h^{t_j-1} \sin(t_j \theta_h) \quad (4.241)$$

$$\frac{1}{r_h} \frac{\partial H}{\partial \theta_h} = C_j t_j r_h^{t_j-1} \cos(t_j \theta_h) \quad (4.242)$$

$$\frac{\partial^2 H}{\partial r_h^2} = C_j t_j (t_j - 1) r_h^{t_j-2} \sin(t_j \theta_h) \quad (4.243)$$

$$\frac{\partial}{\partial r_h} \left( \frac{1}{r_h} \frac{\partial H}{\partial \theta_h} \right) = C_j t_j (t_j - 1) r_h^{t_j-2} \cos(t_j \theta_h) \quad (4.244)$$

Sammenhængen mellem  $\alpha$ ,  $t_1$ ,  $t_2$  og  $t_3$  ses af følgende oversigt

$$\frac{\pi}{2} > \alpha > 0 \quad 2 < t_1 < t_2 < t_3 \quad (4.245)$$

$$\pi > \alpha > \frac{\pi}{2} \quad 1 < t_1 < 2 \quad 2 < t_2 < t_3 \quad (4.246)$$

$$1.5\pi > \alpha > \pi \quad \frac{2}{3} < t_1 < 1 \quad \frac{4}{3} < t_2 < 2 \quad 2 < t_3 \quad (4.247)$$

$$2\pi > \alpha > 1.5\pi \quad \frac{1}{2} < t_1 < \frac{2}{3} \quad 1 < t_2 < \frac{4}{3} \quad 1.5 < t_3 < 2. \quad (4.248)$$

Da spændingerne i membranskallen findes ved hjælp af de dobbelte afledede af  $H$ , fremgår det af ligningerne (4.243-244), at der almindeligvis forekommer uendelig store spændinger i skallen for  $t_j < 2$ . Af ligningerne (4.178-179) og (4.241-242) ses, at kraftresultanten på et snit gennem et hjørne kan blive uendelig for  $t_j < 1$ . Det første tilfælde, hvor spændingerne bliver uendeligt store, vil den praktiserende ingeniør ikke opfatte som særlig farligt. Det andet tilfælde, som forekommer ved indadgående hjørner, må betragtes med væsentlig større alvor. Ved fri vridning og bøjning med forskydning, hvor spændingerne fremkommer af den første afledede af  $H$ , ses, at der ved indadgående hjørner kan fremkomme uendelig store spændinger.

Den anbefalede metode, som den er præsenteret indtil nu, kan ikke udtrykke singulariteter. Derfor foreslås, at man benytter de homogene løsninger

$$H = \sum_h C_h r_h^{\frac{h\pi}{\sigma}} \sin\left(\frac{h\pi}{\sigma} \theta_h\right), \quad (4.249)$$

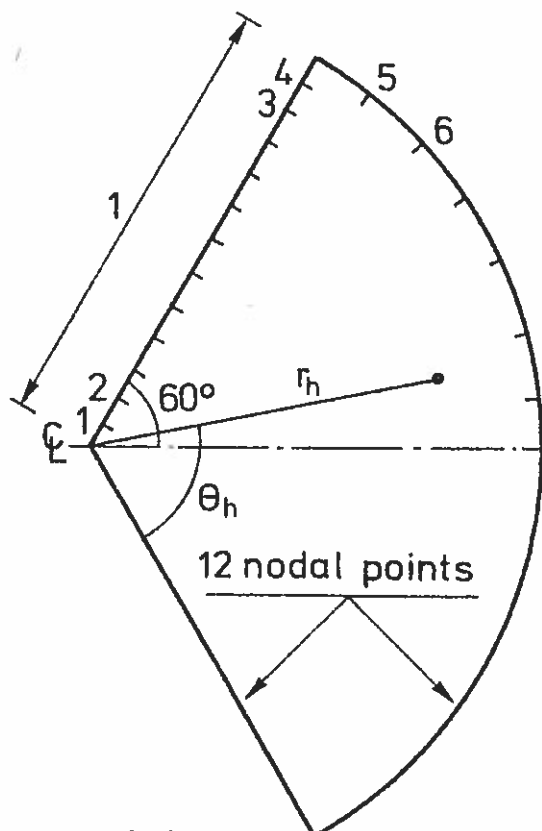
som frembringer uendelig store spændinger, på lige fod med de øvrige harmoniske funktioner, d.v.s.

$$\sum_{j=1}^m \Delta\theta_{ij} \mu_j \quad (4.250)$$

Ved at udtrykke, at den harmoniske funktion, der fremkommer ved addition af (4.249) og (4.250), skal antage givne værdier i de n'nodal points' på randkurven, fremkommer et system af lineære ligninger, i hvilket  $C_h$  indgår som ubekendt sammen med  $\mu_j$ 'erne.

Betydningen af disse ekstra spændingsfunktioner vil fremgå af nedenstående eksempel, der viser resultaterne fra en beregning af en membranskal, hvis vandrette projektion er et cirkeludsnit. Den eksakte løsning er frembragt ved hjælp af fourierrækkeudvikling.

Membranskal: 36 'nodal points', 45 intervaller,  $H_i = \sum_j \mu_j \Delta \theta_{ij}$   
 $\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 1$ ,  $T_p = \frac{1}{2} x^2$ , ekstra funktion :  $H = C r_h^{1,5} \cos 1.5 \theta_h$



Art:  
 Med ekstra funkt. m  
 Uden " " u  
 Eksakt løsn. a

Pkt.	Art	$\frac{\partial H}{\partial n}$	$N_{xx}$	$N_{xy}$	$N_{yy}$
1	u	0.1606	-1.409	-0.595	2.409
	a	0.1867	-0.815	-1.337	1.815
	m	0.1867	-0.814	-1.338	1.814
2	u	0.2915	0.033	-1.218	1.033
	a	0.2775	0.165	-0.771	0.835
	m	0.2775	0.165	-0.769	0.835
3	u	0.1711	1.828	-0.015	-0.828
	a	0.1652	1.454	-0.026	-0.454
	m	0.1651	1.458	-0.026	-0.458
4	u	0.0473	1.946	1.044	-0.946
	a	0.0797	1.918	0.241	-0.918
	m	0.0806	1.817	0.252	-0.817
5	u	0.1444	0.859	0.852	0.141
	a	0.1231	1.163	0.643	-0.163
	m	0.1230	1.281	0.713	-0.281
6	u	0.1982	0.809	0.042	0.191
	a	0.2186	0.863	0.280	0.137
	m	0.2178	0.839	0.257	0.160

fig. 4.21.

Antages randværdierne at kunne udvikles i Taylorrækker ud fra hjørnet, vil de partikulære løsninger kun kunne frembringe uendelige spændinger for tilfældene:

$$\lambda_p = 1; \quad \sigma = 2\pi:$$

$$\Pi = \frac{A_{21} - A_{11}}{2\pi} (\theta_h r_h \cos \theta_h + \ln r_h r_h \sin \theta_h); \quad (4.251)$$

$$\lambda_p = 2; \quad \alpha = \frac{\pi}{2};$$

$$H = \frac{A_{22} + A_{12}}{-\frac{\pi}{2}} (\theta_h r_h^2 \cos 2\theta_h + \ln r_h r_h^2 \sin 2\theta_h); \quad (4.252)$$

$$\lambda_p = 2; \quad \alpha = \frac{3\pi}{2};$$

$$H = \frac{A_{22} + A_{12}}{-\frac{3\pi}{2}} (\theta_h r_h^2 \cos 2\theta_h + \ln r_h r_h^2 \sin 2\theta_h); \quad (4.253)$$

hvor

$$A_{i1} = \left( \frac{\partial H_i}{\partial r_{2h}} \right)_{r_h=0}$$

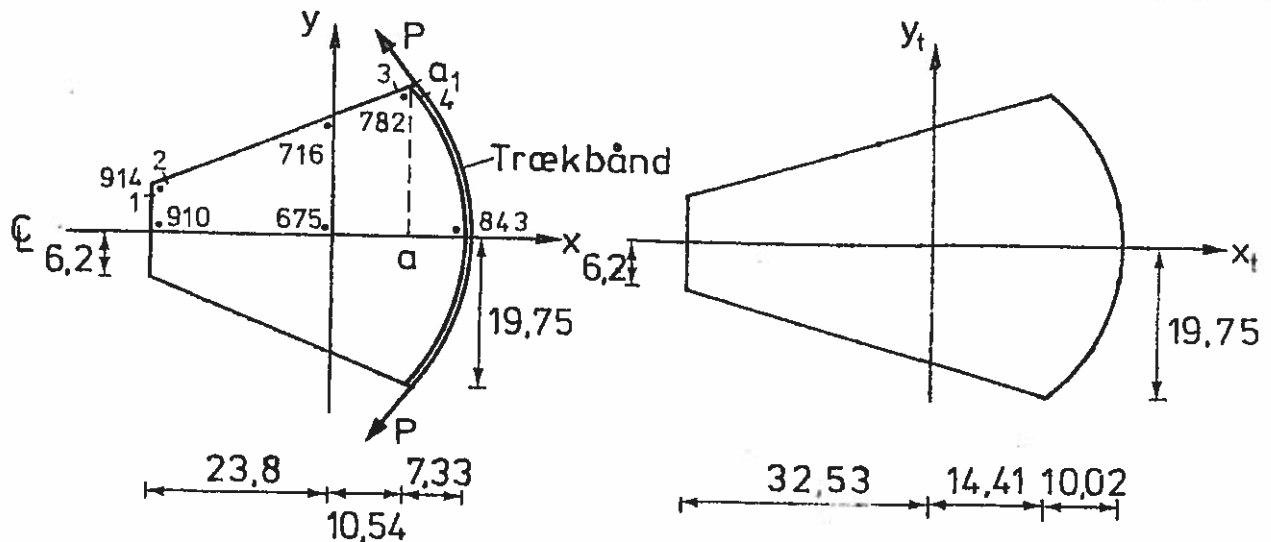
$$A_{i2} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial H_i}{\partial r_h} \right)_{r_h=0}$$

Da teorien kun var delvis udviklet, da eksemplerne blev kørt på regnemaskinen, er disse partikulærløsninger ikke blevet anvendt. De homogene løsninger er anvendt, idet randen tilnærmes retlinet. Ønsker man at bestemme den partikulære løsning, i det tilfælde, hvor der er krumme sider, erindres man om, at udgangspunktet må tages i rette sider, hvorfor man får

$$A_{i2} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2 H_i}{\partial t} \right)_{r_h=0} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2 H_i}{\partial s} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial H_i}{\partial n} \right)_{r_h=0} \quad (4.254)$$

jvnf. lign. (4.223). Ved udadgående hjørner kan  $\left( \frac{\partial H_i}{\partial n} \right)_{r_h=0}$  umiddelbart beregnes [M-6]. En dyberegående undersøgelse af den harmoniske funktions egenskaber ved hjørner med krumme sider er desværre ikke foretaget.

Til sidst vises resultater fra beregninger af radiohusets ta. [2-1].



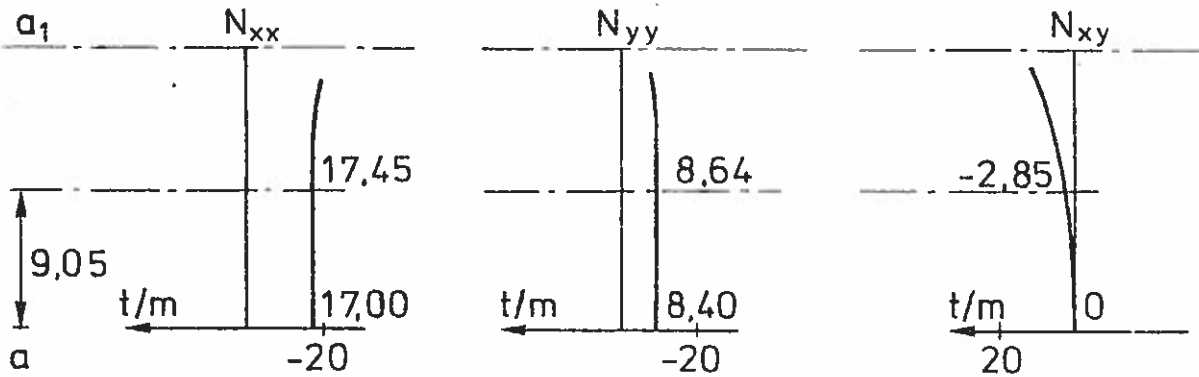
Virkelig skal

Transformeret skal

Spænding i snit a - a<sub>1</sub>

Vandret projektion af kraft i trækbandet i hjørnet P = 490 t.

Randbetingelse på buen:  $T = 4.825 \cdot 10^5(x - 10.54)$ . I øvrigt  $T = 0$ .



Vandret projektion af kraft i trækbandet i hjørnet P = 0t. Randbetingelse:  $T = 0$ .

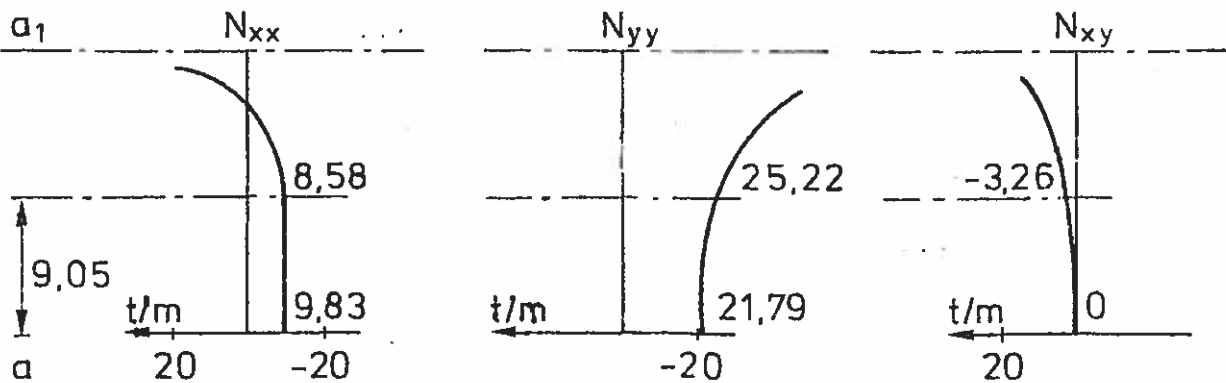


Fig. 4.22

Der er i ovenstående eksempel benyttet 44 'nodal points', 63 tæthedintervaller, samt 1 ekstra spændingsfunktion for hvert hjørne. Den elliptiske paraboloideskal har formen

$$z = \frac{x^2}{57,8} + \frac{y^2}{108} \quad (4.255)$$

Buen kan bestemmes af

$$\frac{x^2}{57,8} + \frac{y^2}{108} = 5,57 \quad (4.256)$$

Belastningen er angivet 6 steder på figuren. K.W. Johansen foreslår transformationen  $x_t = \frac{1}{0,73} x$  og  $y_t = y$ , hvorved man af ligningerne (4.185 - 187) får

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x_t^2} \frac{1}{28,9} + \frac{\partial^2 T}{\partial y_t^2} \frac{1}{28,9} = g \quad (4.257)$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x_t^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y_t^2} = 28.9 \cdot g \quad (4.258)$$

Belastningen tilskrives her med 4<sup>te</sup> grads polynomier i  $x_t$  og  $y_t$ , der p.g.a. symmetrien omkring  $x_t$  og  $y_t$  akser kun indeholder lige potenser af  $x_t$  og  $y_t$ , og herudfra vælges den partikulære løsning  $T_p$  til

$$T_p^t = (163.7 \cdot (x_t^2 + y_t^2) + 0.0296 \cdot x_t^4 + 0.0236 \cdot y_t^4 - 4.18 \cdot 10^{-6} x_t^6 - 15.7 \cdot 10^{-6} y_t^6) \cdot 28.9 \quad (4.259)$$

Spændingerne i et snit a-a<sub>1</sub> er tegnet op for 2 tilfælde i [3-8] er benyttet randbetingelser, der nogenlunde svarer til det første tilfælde. De opnåede resultater passer udmærket til de i [3-8] angivne. Da krøkbåndet ikke er forspændt ved hjørnet, må spændingstilstanden i skallen antages at ligge mellem de 2 tilfælde.

For at undersøge om de ekstra spændingsfunktioner, der indeholder spændingssingulariteterne, kan ødelægge resultaterne, når den rigtige spændingsfunktion ingen singulariteter indeholder, antages den harmoniske funktion  $H$  at være

$$H = (x^2 - y^2)^2 - 4x^2y^2 \quad (4.260)$$

Med disse værdier indsat som randværdier udregnedes den harmoniske funktion ved hjælp af integralligningsmetoden, først uden og derefter med en ekstra spændingsfunktion for hvert hjørne.



nr.	x	y	$\frac{\partial H}{\partial n}$	$\frac{\partial^2 H}{\partial y^2}$	$\frac{\partial^2 H}{\partial x^2}$	$\frac{\partial^2 H}{\partial x \partial y}$
Eksakt						
1	-23.80	5.48	-125990	-68914	12340	-4282
2	-23.18	6.44	-111479	-76575	11551	-4901
3	9.92	19.51	- 51943	-13365	- 2359	6349
4	11.10	19.26	- 53614	-24669	- 1689	7018
Uden ekstrafunktioner						
1	-23.80	5.48	-125995	-69016	12368	-4313
2	-23.18	6.44	-111457	-76565	11518	-4918
3	9.92	19.51	- 51941	-13363	- 2360	6345
4	11.10	19.26	- 53621	-24668	- 1695	7023
Med ekstrafunktioner						
1	-23.80	5.48	-125909	-68842	12013	-4153
2	-23.18	6.44	-111570	-76661	11784	-4948
3	9.92	19.51	- 51943	-13363	- 2360	6349
4	11.10	19.26	- 53617	-24671	- 1689	7023

fig. 4.23

Langt de dårligste resultater findes ved hjørnerne. Derfor er resultater kun medtaget for de 4 nodal points, der ligger nærmest hjørnerne (se fig. 4.22). Resultaterne er acceptable. I tidligere beregninger er det specielt i pkt. 1 og pkt. 2, at randspændingerne  $N_{nn}$  har været særlig meget forskellig fra det forudsatte.

#### 4.5 Forslag til yderligere undersøgelser.

Som før nævnt vil en undersøgelse af en harmonisk funktion i et hjørne med krummesider være ønskelig. Dernæst bør beregninger af områder med huller foretages. I den forbindelse skal nævnes, at de ekstra spændingsfunktioner kan være flertydige. For at komme uden om dette, kan man enten dele det sammensatte område

i 2 sammenhængende områder (se fig. 4.24), og kræve at spændingsfunktionen og dennes hældning i en retning vinkelret på delelinien er ens på de 2 sider af delelinien,

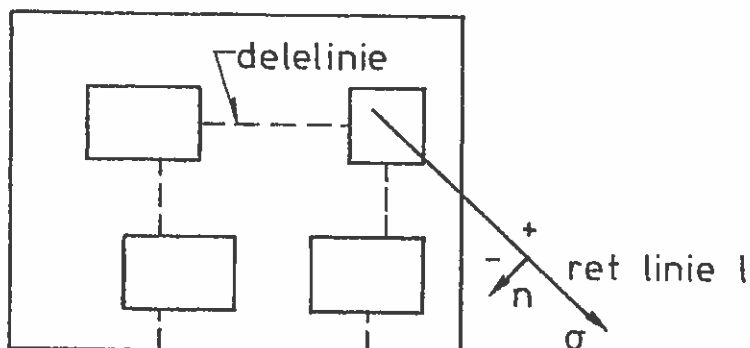


fig. 4.24

eller også kan man lægge rette linier pegende mod hver af de indre hjørner. Disse rette linier, der er orienteret, regnes belagt med tæthederne  $\mu_1$  og  $\mu_2$ , der frembringer den harmoniske funktion  $\int_1 \mu_1 \ln r d\sigma + \int_1 \mu_2 d\theta$ . Ved at gå fra - siden til + siden af den rette linie l på fig. 4.24 sker der et spring i den harmoniske funktion på  $-2\pi \mu_2$  og i dennes afledede med hensyn til  $n$  (se fig. 4.24) på  $2\pi \mu_1$ . Ud fra de tilsvarende spring i de ekstra spændingsfunktioner, der svarer til det pågældende hjørne, kan  $\mu_1$  og  $\mu_2$  umiddelbart bestemmes. Ved at afslutte linierne et passende sted inde i hullet og et passende stykke uden for området undgås singulariteter, og da  $\mu_1$ ,  $\mu_2$  og liniens beliggenhed kendes, kan virkningen af  $\int_1 \mu_1 \ln r d\sigma + \int_1 \mu_2 d\theta$  bestemmes meget nøjagtigt.

#### 4.6 Konklusion.

Undersøgelsen har vist, at man ved brug af integralligninger kan opnå udmærkede løsninger af Laplace's ligning. Den fineste nøjagtighed fås, når tæthedskurven lægges uden for randen, og da dette forenkler programmeringen meget, må det være denne metode, der anbefales brugt. Hvor tæthedskurven ligger uden for randen, kan singulariteter ved hjørner ikke repræsenteres, og ligningssystemet tenderer mod at blive singulært. Det første afhjælpes ved tilføjelse af korrigerende spændingsfunktioner. Det andet afhjælpes delvis ved at bruge flere nodal points end intervaller eller omvendt.

Metoderne er kun blevet afprøvet på enkeltsammenhængende områder. At de også er brugelige ved sammensatte områder, kan ikke garanteres. Til slut skal nævnes, at afstanden mellem randen og tæthedskurven bør være større end 2 gange interval-længden på sidstnævnte.

### 5.0 Benyttelse af integralligningsmetoder til løsning af den biharmoniske ligning.

Opbygningen af afsnittet om den biharmoniske ligning svarer næsten til opbygningen af afsnittet om Laplaces ligning. De biharmoniske funktioner introduceres, og dannelsen af disse ud fra harmoniske funktioner eller ud fra fysiske betragtninger omtales. De væsentligste elasticitetsteoretiske problemer, der fører til den biharmoniske ligning, gennemgås; hvorefter der fortælleres om de forsøg, der er gjort med allerede kendte metoder. I dette tilfælde er der kun foretaget undersøgelser af det plane elasticitetsproblem baseret på Weinels [W-1] og Massonets [M-1,2] arbejder. Derefter fremstilles den anbefalede metode, og en undersøgelse af den biharmoniske funktion i et hjørne med randbetingelserne formuleret som givne spændinger og flytninger foretages. Til slut giver forfatteren forslag til yderligere undersøgelser.

### 5.1 Den biharmoniske ligning.

Den biharmoniske ligning har formen

$$\Delta\Delta B = \Delta(\Delta B) = \frac{\partial^4 B}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 B}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 B}{\partial y^4} = 0 \quad (5.1)$$

og funktioner  $B$ , der opfylder denne ligning, siges at være biharmoniske. Man bemærker, at  $(\Delta B)$  er harmonisk. Hvis det er ligningen  $\Delta\Delta A = g(x,y)$ , man skal løse, hvor  $g(x,y)$  er en vilkårlig funktion i området, kan man i analogi med lign. (4.3 a) skrive

$$\Delta\Delta A = \Delta\Delta(B+A_p) = g, \quad (5.2)$$

hvor  $\Delta\Delta A_p = g$  og  $\Delta\Delta B = 0$ , således at  $A_p$  er en partikulær løsning

og B den homogene løsning, der sikrer, at randbetingelserne bliver opfyldt.  $A_p$  kan gættes eller findes ud fra den Greenske funktion:

$$G(\xi', \xi) = \frac{1}{8\pi} |\xi - \xi'|^2 \ln |\xi - \xi'|, \quad (5.3)$$

som

$$A_p(\xi') = \int_I g(\xi) G(\xi', \xi) dF \quad (5.4)$$

En formel svarende til lign. (4.49) kan findes til

$$B(\xi') = - \int_L \left( \frac{\partial \Delta B}{\partial \nu} G - \Delta B \frac{\partial G}{\partial \nu} + \frac{\partial B}{\partial \nu} \Delta G - B \frac{\partial \Delta G}{\partial \nu} \right) d\sigma, \quad (5.5)$$

hvilket gengives fra [L-1] uden bevis.

Dannelsen af den biharmoniske funktion kan foregå ved hjælp af 2 harmoniske funktioner H og  $H_1$  f.eks. således [F-3]:

$$B = xH + H_1 \quad (5.6)$$

$$B = r^2 H + H_1, \quad (5.7)$$

eller på følgende måde, idet den harmonisk konjugerede til H kaldes  $H^k$ :

$$B = xH + yH^k + H_1 \quad (5.8)$$

Det sidste udtryk er Goursat's formel, der benyttes i kompleks funktionsteori [M-5].

Endelig kan spændingsfunktionen søges dannet ved fysiske overvejelser, idet spændingsfunktionen, hidrørende fra en enkeltkraft på en heluendelig eller en halvuendelig plan, bruges som grundelement. De sidste metoder er dem, der bliver behandlet mest udførligt i det følgende.

### 5.2.0 Problemer der fører til den biharmoniske ligning.

I det følgende omtales 2 problemer: det plane elasticitetsproblem og bøjning af plader. Da den matematiske behandling af de 2 problemer er næsten ens, har forfatteren så godt som udelukkende koncentreret sig om det første.

Af arbejder inden for dette felt bør nævnes:

- a) Den russiske skoles med Muskhelishvili, Mikhlin og Sherman i spidsen ([M-5], [B-1], [S-2]), der formulerer problemerne ved hjælp af kompleks funktionsteori.
- b) Søren Christiansens [C-1] og Segedin & Brichell's [S-1], der benytter lign. (5.5) til at danne integralligningerne.
- c) Jaswon's [J-1] og Jaswon, Maiti og Sym's [J-3], der benytter lign. (5.7) til dannelse af den biharmoniske funktion, samt Rim & Henry's [R-1] forsøg på forbedring af deres resultater.
- d) Oliveira's [O-1], der benytter en tæthedskurve lagt uden for randen, og hvor grundelementet er spændingsfunktionen svarende til en enkeltkraft på en heluendelig plan.
- e) Miche's [M-3], Weinel's [W-1] og Massonet's [M-1,2], hvor tæthedskurven ligger på randen, og grundelementet er spændingsfunktionen svarende til en enkeltkraft på en halvuendelig plan.
- f) Rizzo's [R-2], der ved hjælp af Betti's sætning, benyttet på den virkelige spændings- og flytningstilstand sammen med spændings- og flytningstilstanden hidrørende fra en enkeltkraft på en uendelig helplan angribende i funktionsværdipunktet, finder en vektoridentitet mellem spændinger og flytninger, der kan benyttes til at danne integralligninger.

En mere indgående gennemgang af tidligere arbejder kan findes i [C-1].

### 5.2.1 Det plane elasticitetsproblem - skiver.

I det plane elasticitetsproblem skelner man mellem den plane spændingstilstand og den plane deformationstilstand.

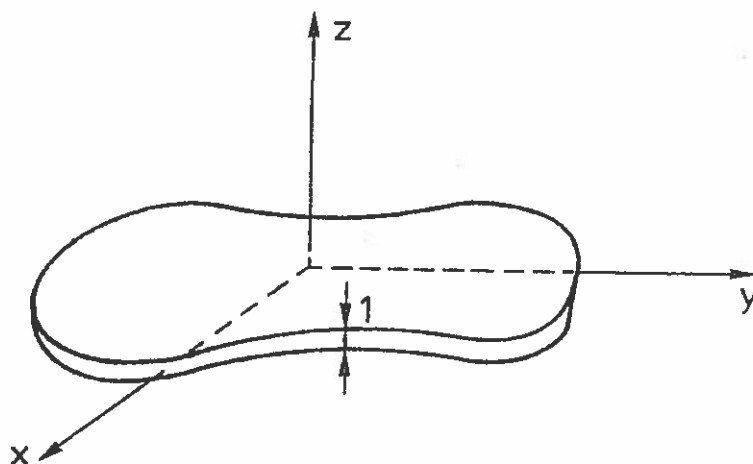


fig. 5.1

Ved den plane spændingstilstand er

$$\sigma_{xz} = \sigma_{zz} = \sigma_{zy} = 0, \quad (5.9)$$

hvor z-aksen, som det fremgår af fig. 5.1, er vinkelret på skiven, der betragtes. Skiven regnes at være så tynd, at man uden væsentlige fejl kan regne med middelværdierne af  $\sigma_{xx}$ ,  $\sigma_{yy}$  og  $\sigma_{xy}$  over tykkelsen. Sammenhængen mellem spændinger og tøjninger findes af

$$\sigma_{xx} = \frac{E}{1-\nu^2} (\epsilon_{xx} + \nu\epsilon_{yy}) \quad (5.10)$$

$$\sigma_{yy} = \frac{E}{1-\nu^2} (\epsilon_{yy} + \nu\epsilon_{xx}) \quad (5.11)$$

$$\sigma_{xy} = G \cdot 2\epsilon_{xy} = \frac{E}{2(1+\nu)} 2\epsilon_{xy} \quad (5.12)$$

Ved plan deformationstilstand er

$$\epsilon_{xz} = \epsilon_{yz} = \epsilon_{zz} = 0 \quad (5.12)$$

Sammenhængen mellem spændinger og tøjninger er

$$\sigma_{xx} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} ((1-\nu)\epsilon_{xx} + \nu\epsilon_{yy}) \quad (5.14)$$

$$\sigma_{yy} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} (\nu\epsilon_{xx} + (1-\nu)\epsilon_{yy}) \quad (5.15)$$

$$\sigma_{xy} = G 2\epsilon_{xy} = \frac{E}{2(1+\nu)} \cdot 2 \epsilon_{xy} \quad (5.16)$$

Beregningerne i det følgende foretages ud fra plan deformationstilstand. For at finde tilsvarende udtryk ved plan spændingstilstand benyttes  $\frac{E(1+2\nu)}{(1+\nu)^2}$  i stedet for E,  $\frac{\nu}{1+\nu}$  i stedet for  $\nu$  og G beholdes uændret [M-1]. Tykkelsen af skiven regnes fremover lig 1. Kraft- og momentligevægten sikrer eksistensen af en funktion A (x,y) defineret i analogi med (4.171-173).

$$\sigma_{xx} = \frac{\partial^2 A}{\partial y^2} - \int X dx \quad (5.17)$$

$$\sigma_{yy} = \frac{\partial^2 A}{\partial x^2} - \int Y dy \quad (5.18)$$

$$\sigma_{xy} = -\frac{\partial^2 A}{\partial x \partial y}, \quad (5.19)$$

hvor X og Y er volumenkræfternes x- og y-komponenter. De i ligningerne (4.171-172) anvendte  $E_1$  funktioner benyttes ikke her, idet materialet forudsættes homogent. Hvis skivens elasticitetskoefficient varierede m.h.t. x og y, var det muligt, at sådanne funktioner med fordel kunne udnyttes til at overføre kraftresultanter mellem huller og den ydre randkurve.

Kompatibilitetsbetingelserne ved plan deformationstilstand kræver [M-1]

$$\Delta(\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) = -\frac{1}{1-\nu} \left( \frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} \right) \quad (5.20)$$

der med ligningerne (5.17-19) indsat bliver til

$$\Delta\Delta A = -\frac{\nu}{1-\nu} \left( \frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} \right) + \int \frac{\partial^2 X}{\partial y^2} dx + \int \frac{\partial^2 Y}{\partial x^2} dy \quad (5.21)$$

Da det er meget simpelt at finde løsninger, hvor højresiden er af formen  $x^n y^m$  og  $\cos(ax) \sin(by)$  (n og m er hele tal; a og b er reelle tal), kan man for en stor klasse af overfladebelastninger let finde en partikulærløsning  $A_p$  (se lign. (5.2)). Tilbage står at bestemme den biharmoniske funktion B, således at randbetingelserne er opfyldt [S-2]. Spændingerne findes af

$$\sigma_{xx} = \frac{\partial^2 A}{\partial y^2} - \int X dx = \left( \frac{\partial^2 A_p}{\partial y^2} - \int X dx \right) + \frac{\partial^2 B}{\partial y^2} \quad (5.22)$$

$$\sigma_{yy} = \frac{\partial^2 A}{\partial x^2} - \int Y dy = \left( \frac{\partial^2 A_p}{\partial x^2} - \int Y dy \right) + \frac{\partial^2 B}{\partial x^2} \quad (5.23)$$

$$\sigma_{xy} = \frac{\partial^2 A}{\partial x \partial y} = \left( -\frac{\partial^2 A_p}{\partial x \partial y} \right) - \frac{\partial^2 B}{\partial x \partial y} \quad (5.24)$$

Størrelserne i parenteserne er de spændinger, der fremkommer i den partikulære løsning.

Ovenstående behandling er hovedsageligt taget fra [M-1]; en væsentlig mere stringent fremstilling af plan spændingstilstand findes i [G-1], hvor der skelnes mellem en plan spændingstilstand og en generaliseret plan spændingstilstand.

En partikulær løsning kunne også tænkes fremkommet ved at udnytte kendskabet til spændingsfunktionen hidrørende fra en enkeltkraft på en uendelig helplan.



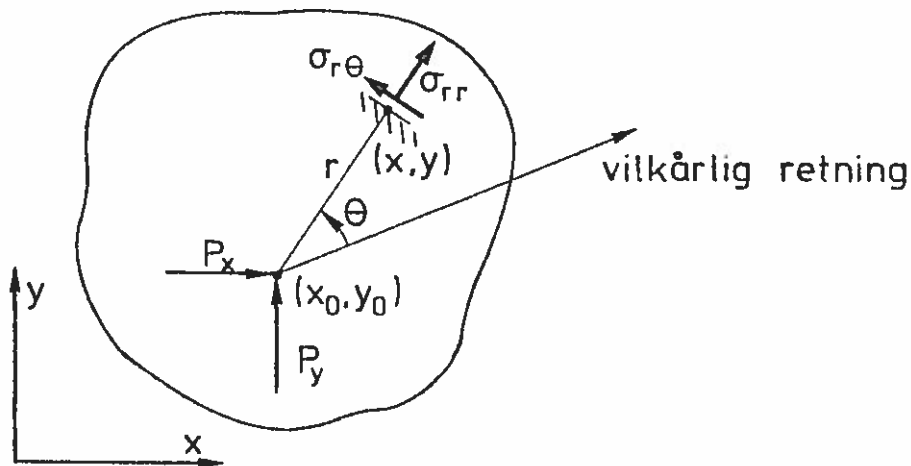


fig. 5.2

Spændingsfunktionen for ovenstående enkelkræfter er

$$B = \frac{1-2\nu}{1-\nu} \frac{\ln r}{4\pi} (P_x(x-x_0) + P_y(y-y_0)) - \frac{\theta}{2\pi} (P_x(y-y_0) - P_y(x-x_0)) \quad (5.25)$$

Spændinger og flytninger hidrørende herfra er [M-1]

$$\sigma_{rr} = -\frac{3-2\nu}{1-\nu} \frac{1}{4\pi} \left( \frac{P_x(x-x_0) + P_y(y-y_0)}{r^2} \right) \quad (5.26)$$

$$\sigma_{\theta\theta} = \frac{1-2\nu}{1-\nu} \frac{1}{4\pi} \left( \frac{P_x(x-x_0) + P_y(y-y_0)}{r^2} \right) \quad (5.27)$$

$$\sigma_{r\theta} = \frac{1-2\nu}{1-\nu} \frac{1}{4\pi} \left( \frac{P_x(y-y_0) - P_y(x-x_0)}{r^2} \right) \quad (5.28)$$

$$u_x = -\frac{1}{8\pi G(1-\nu)} \left[ P_x((3-4\nu)\ln r + \frac{(y-y_0)^2}{r^2}) - P_y \frac{(x-x_0)(y-y_0)}{r^2} \right] \quad (5.29)$$

$$u_y = -\frac{1}{8\pi G(1-\nu)} \left[ -P_x \frac{(x-x_0)(y-y_0)}{r^2} + P_y((3-4\nu)\ln r + \frac{(x-x_0)^2}{r^2}) \right] \quad (5.30)$$

Bidrag svarende til ren translation og rotation kan selvfølgelig tilføjes flytningsudtrykkene, uden at det har betydning for spændingerne.

De tilsvarende udtryk for kræfter på en halvuendelig skive bliver [M-1].

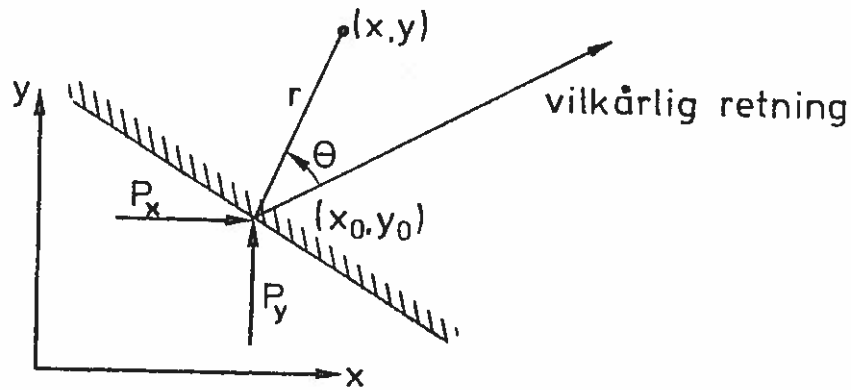


fig. 5.2a

$$B = -\frac{\theta}{\pi} (P_x(y-y_0) - P_y(x-x_0)) \quad (5.31)$$

$$\sigma_{rr} = -\frac{2}{\pi} \left( \frac{P_x(x-x_0) + P_y(y-y_0)}{r^2} \right) \quad (5.32)$$

$$\sigma_{r\theta} = 0 \quad (5.33)$$

$$\sigma_{\theta\theta} = 0 \quad (5.34)$$

$$u_x = -\frac{1}{2\pi G} \left[ P_x \left( 2(1-\nu) \ln r + \frac{(y-y_0)^2}{r^2} \right) - P_y \left( (1-2\nu)\theta + \frac{(x-x_0)(y-y_0)}{r^2} \right) \right] \quad (5.35)$$

$$u_y = -\frac{1}{2\pi G} \left[ P_x \left( (1-2\nu)\theta - \frac{(x-x_0)(y-y_0)}{r^2} \right) + P_y \left( 2(1-\nu) \ln r + \frac{(x-x_0)^2}{r^2} \right) \right] \quad (5.36)$$

Ligesom ved den harmoniske funktion, kan den biharmoniske funktion søges opbygget som en sum af biharmoniske funktioner, frembragt ved at dele tæthedskurven op i delintervaller, der hver regnes angrebet af 'fiktive' enkelkræfter af ovennævnte typer. Ved den efterfølgende grænseovergang, hvor den største intervallængde går imod 0, fås en biharmonisk funktion, frembragt ved hjælp af en stykkevis kontinuert 'fiktiv' belastning på tæthedskurven. Problemet består nu i at bestemme denne belastning, således at givne randbetingelser tilfredsstilles, og her skelner man mellem:

- 1) givne spændinger på randen,
- 2) givne flytninger på randen og
- 3) blandede randbetingelser.

Langs et snit i skiven, der går fra a til b, har spændingerne hidrørende fra spændingsfunktionen B, på den del af skiven, der ligger til venstre for snittet, komponenterne  $p_x$  og  $p_y$  efter henholdsvis x- og y-aksens retning pr. længdeenhed af snittet.

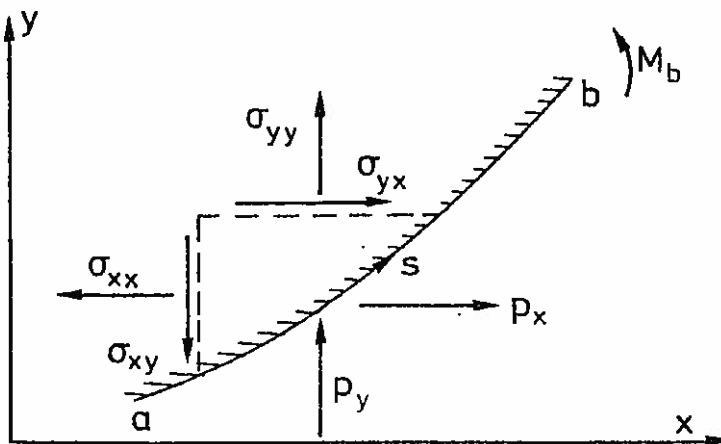


fig. 5.3

I fuldstændig analogi med ligningerne (4.176-180) fås

$$p_x ds = d\left(\frac{\partial B}{\partial y}\right) \quad (5.37)$$

$$p_y ds = -d\left(\frac{\partial B}{\partial x}\right) \quad (5.38)$$

$$P_x = \left(\frac{\partial B}{\partial y}\right)_b - \left(\frac{\partial B}{\partial y}\right)_a \quad (5.39)$$

$$P_y = -\left(\frac{\partial B}{\partial x}\right)_b + \left(\frac{\partial B}{\partial x}\right)_a \quad (5.40)$$

$$M_b = -(y_b - y_a)\left(\frac{\partial B}{\partial y}\right)_a - (x_b - x_a)\left(\frac{\partial B}{\partial x}\right)_a + B_b - B_a, \quad (5.41)$$

Hvor  $P_x$  og  $P_y$  er kraftresultanterne på snittet i x- og y-aksens retning, og  $M_b$  er momentet omkring b af de kræfter, der påvirker snittet.

5.2.2 Bøjning af plader.

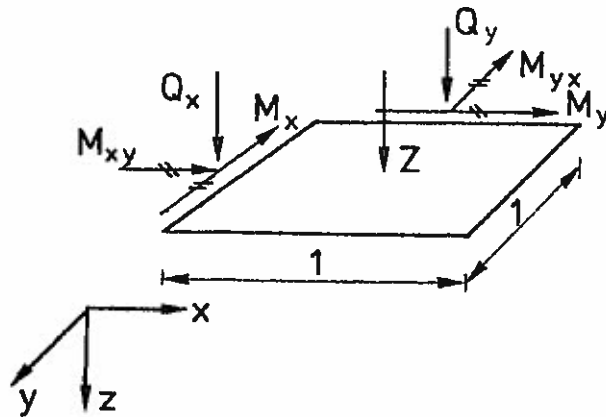


fig. 5.4

Fig. 5.4 viser et infinitesimalt stykke af en plade, med snitkræfterne påsat 2 af siderne. Z er belastningen i z-aksens retning.

Ligevægtsbetingelserne

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} - Z = 0 \quad (5.42)$$

$$\frac{\partial M_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial M_y}{\partial y} + Q_y = 0 \quad (5.43)$$

$$\frac{\partial M_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial M_x}{\partial x} + Q_x = 0 \quad (5.44)$$

giver

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} = -Z. \quad (5.45)$$

Indsættes de fysiske betingelser

$$M_x = -D \left( \frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 u_z}{\partial y^2} \right) \quad (5.46)$$

$$M_y = -D \left( \frac{\partial^2 u_z}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2} \right) \quad (5.47)$$

$$M_{xy} = M_{yx} = -D(1-\nu) \frac{\partial^2 u_z}{\partial x \partial y} \quad (5.48)$$

hvor D er pladestivheden og  $u_z$  nedbøjningen i z-aksens retning i lign. (5.45), fås

$$\frac{\partial^4 u_z}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 u_z}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 u_z}{\partial y^4} = \frac{Z}{D} \quad (5.49)$$

I dette tilfælde er det selve nedbøjningen, der er 'spændingsfunktion'.

Randbetingelserne kan direkte være krav til  $u_z$  eller indirekte ved hjælp af ligningerne (5.43-44) og (5.46-48) (se [W-1] og [S-1]). I øvrigt har undertegnede ikke beskæftiget sig specielt med plader, idet den numeriske behandling forudsættes nogenlunde ens med den numeriske behandling af skiver.

### 5.3 Forsøg med allerede kendte metoder.

Af de forskellige metoder, der findes til dannelse af den biharmoniske funktion, er det specielt den, der benytter spændingsfunktionen hidrørende fra en enkelkraft på en halvuendelig plan som grundelement, der er undersøgt. Benyttelsen af dette grundelement ved dannelsen af den biharmoniske funktion er først introduceret af Miche [M-3], viderebearbejdet af Weinel [W-1], for næsten rent teoretisk at blive færdigbehandlet af Massonet [M-1]. Det store regnearbejde i forbindelse med deres teorier har måttet være fuldstændigt uoverkommeligt for både Miche og Weinel. Opfindelsen af en mekanisk summationsmaskine gjorde det muligt for Massonet at løse integralligningerne ved hjælp af en iterationsproces. Ved fremkomsten af elektronregnemaskiner søgte Massonet [M-2] at udnytte disse til at løse de samme integralligninger ved en lignende iterationsproces. De fremkomne resultater synes ikke særlig fremragende. Som minimumskriterium for, at en metode kan anses som værende god, fastsattes i afsnit 1, at den også skulle give gode resultater i simple tilfælde. Massonets resultater opfylder ikke dette første kriterium - specielt ikke ved hjørner.

Først angives ganske kort, hvorledes ovennævnte forfattere kommer frem til deres integralligninger.

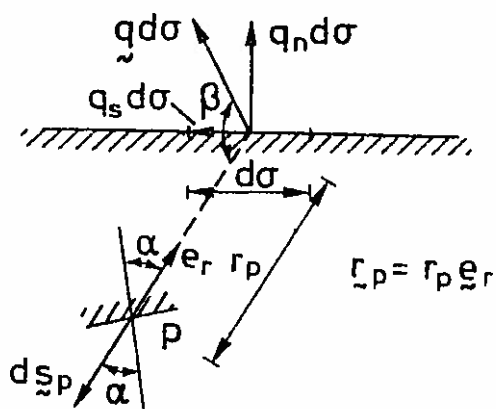


fig. 5.5a

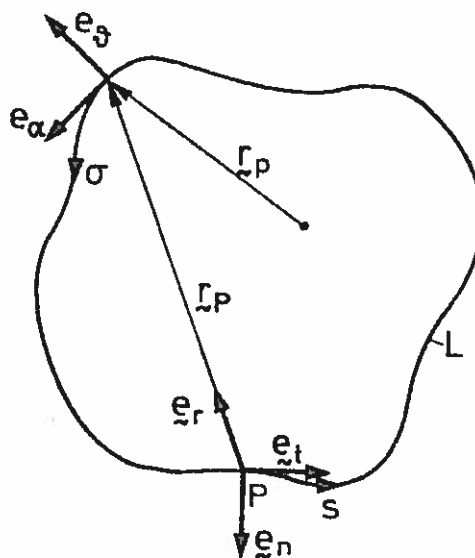


fig. 5.5b

fig. 5.5a viser en uendelig halvplan, der angribes af en enkeltkraft  $q d\sigma$ . Spændingen  $d\tilde{s}_p$  i et snit i halvplanen hidrørende fra denne enkeltkraft er

$$d\tilde{s}_p = \frac{2}{\pi} \frac{\cos\alpha \cos\beta}{r_p} \tilde{e}_r |q| d\sigma \quad (5.50)$$

Antag at spændingstilstanden i et område som en sum af spændingstilstande hidrørende fra uendelig mange (fiktive) enkeltkæfter langs randen, fås spændingen i et punkt i området til

$$\tilde{s}_p = \frac{2}{\pi} \int_L |q(\sigma)| \frac{\cos\alpha \cos\beta}{r_p} \tilde{e}_r d\sigma \quad (5.51)$$

Spændingstilstanden i selve rande fås [M-2]

$$\tilde{s}_p = q(p) + \frac{2}{\pi} \int_L |q(\sigma)| \frac{\cos\alpha \cos\beta}{r_p} \tilde{e}_r d\sigma \quad (5.52)$$

Normal og forskydningsspændingerne langs randen findes til [W-1].

$$\sigma_{nn}(s) = q_n(s) + \frac{2}{\pi} \int_L \frac{\cos^2(r_p, n)}{r_p} (q_n(\sigma) \cos(r_p, v) + q_s(\sigma) \cos(r_p, \sigma)) d\sigma \quad (5.53)$$

$$\sigma_{ns}(s) = q_s(s) + \frac{2}{\pi} \int_L \frac{\cos(r_p, n) \cos(r_p, s)}{r_p} (q_n(\sigma) \cos(r_p, v) + q_s(\sigma) \cos(r_p, \sigma)) d\sigma \quad (5.54)$$

$$\sigma_{ss}(s) = q_n(s) + \frac{2}{\pi} \int_L \frac{\cos^2(r_p, s)}{r_p} (q_n(\sigma) \cos(r_p, \sigma) + q_s(\sigma) \cos(r_p, \sigma)) d\sigma \quad (5.55)$$

Ligningerne (5.53-54) er integralligningerne til det første randværdiproblem. Massonet foreslår at inddele randkurven i delintervaller og regne med værdierne i disse intervallers midtpunkter, hvorved man i princippet får

$$\tilde{s}_p(s_i) = q(s_i) + \frac{2}{\pi} \sum_j |q(\sigma_j)| \frac{\cos\alpha_{ij} \cos\beta_{ij}}{r_{pij}} e_{rij}(\sigma_j) \Delta\sigma_j \quad (5.56)$$

Denne numeriske tilnærmelse forekommer noget grov. Det undersøges nu, om bedre numeriske metoder er i stand til at give acceptable resultater, idet kravet til generel programmering for generelle områderformer holdes for øje. Undertegnede har ikke set sig i stand til at formulere et tilstrækkeligt generelt program ved hjælp af ortogonale polynomier eller tilnærmelse af tæthedsfunktionen med parabler. Det, undertegnede har undersøgt, er at tilnærme tæthedsfunktionen stykkevis konstant og lineært varierende. Da spændingsfelterne, der frembringes af enkeltkræfter på halv og heluende lige planer, sikrer kraft- og momentligevægt, vil ovenstående integral-ligninger (5.53-54) have en tredobbelt uendelighed af løsninger - man vil være i stand til at frembringe tre af hinanden lineært uafhængige fordelinger af  $q$ , der bevirker, at spændingerne i området bliver identisk lig nul. Som ekstra betingelser kan man f.eks. kræve, at de fiktive kræfter er i statisk ligevægt [M-1]. Diskretiseringen bevirker imidlertid, at ligningssystemet, der skal løses, bliver ikke-singulært, selv om disse ekstrabetingelser ikke er opfyldt. Man må da imidlertid forvente, at ligningssystemet mere og mere nærmer sig til at blive singulært, jo flere delintervaller der benyttes. Ved sammensatte områder er den benyttede spændingsfunktion ikke i stand til at beskrive alle spændingstilstande. F.eks. vil et indre hydrostatisk tryk på et hul ikke kunne beskrives. Man må, som i det harmoniske tilfælde, tilføje ekstra led. Desuden må kompatibiliteten sikres omkring hvert hul, hvilket medfører betingelserne [C-1]:

$$\int_{L_i} \frac{\partial u_x}{\partial \sigma} d\sigma = \int_{L_i} \frac{\partial u_y}{\partial \sigma} d\sigma = \int_{L_i} \frac{\partial}{\partial \sigma} \left( \frac{\partial u_x}{\partial y} \right) d\sigma = 0 \quad i = 1, 2, n \quad (5.56a)$$

Massonet [M-1] viser, at hvis de fiktive kræfter i hvert hul er i kraftligevægt i 2 forskellige retninger, er kompatibiliteten sikret. Ved huller forekommer benyttelsen af grundelementet 'en enkeltkraft

på en uendelig helplan' at være det enkleste, da kompatibiliteten er sikret, og da man ved hjælp af disse spændingsfunktioner er i stand til at give en fuldstændig beskrivelse af spændingstilstanden.

Den første tilnærmelse, der gjordes, var at tilnærme randkurven med en polygon og forudsætte, at tæthedsfunktionen var stykkevis konstant. Integralerne bliver direkte udregnelige. Ligningerne (5.53-54) bliver til

$$\sigma_{nn}(s_i) = q_n(s_i) + \sum_j \frac{q_n(\sigma_j)}{\pi} \int_j 2\cos^2(r_{p,n})d\theta + \sum_j \frac{q_s(\sigma_j)}{\pi} \int_j 2\cos^2(r_{p,n})d\ln r_p \quad (5.57)$$

$$\sigma_{ns}(s_i) = q_s(s_i) + \sum_j \frac{q_n(\sigma_j)}{\pi} \int_j 2\cos(r_{p,n})\cos(r_{p,s})d\theta + \sum_j \frac{q_s(\sigma_j)}{\pi} \int_j 2\cos(r_{p,n})\cos(r_{p,s}) d\ln r_p \quad (5.58)$$

Integralerne udregnes til

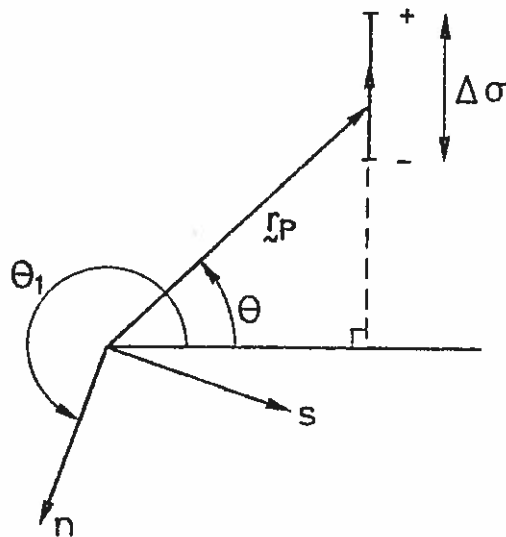


fig. 5.6

$$\int 2\cos^2(r_{p,n})d\theta = [-\sin(\theta_1-\theta)\cos(\theta_1-\theta) - (\theta_1-\theta)]_+^- \quad (5.59)$$

$$\int 2\cos(r_{p,n})\cos(r_{p,s})d\theta = [\sin^2(\theta_1-\theta)]_+^- \quad (5.60)$$

$$\int 2\cos^2(r_{p,n})d\ln r_p = [(\cos^2\theta_1 - \sin^2\theta_1)\sin^2\theta - \sin^2\theta_1 \ln(\cos^2\theta) + 2\cos\theta_1\sin\theta_1(-\cos\theta\sin\theta + \theta)]_+^- \quad (5.61)$$



$$\int 2\cos(r_p, n)\cos(r, s)dlr_p = [(\cos^2\theta_1 - \sin^2\theta_1)(-\cos\theta \sin\theta + \theta) + \sin\theta_1 \cos\theta_1(-\ln(\cos^2\theta) - 2\sin^2\theta)]^+_{-} \quad (5.62)$$

For at illustrere den opnåede nøjagtighed ved denne metode, vises på fig. 5.7 resultatet ved en skive udsat for rent træk.

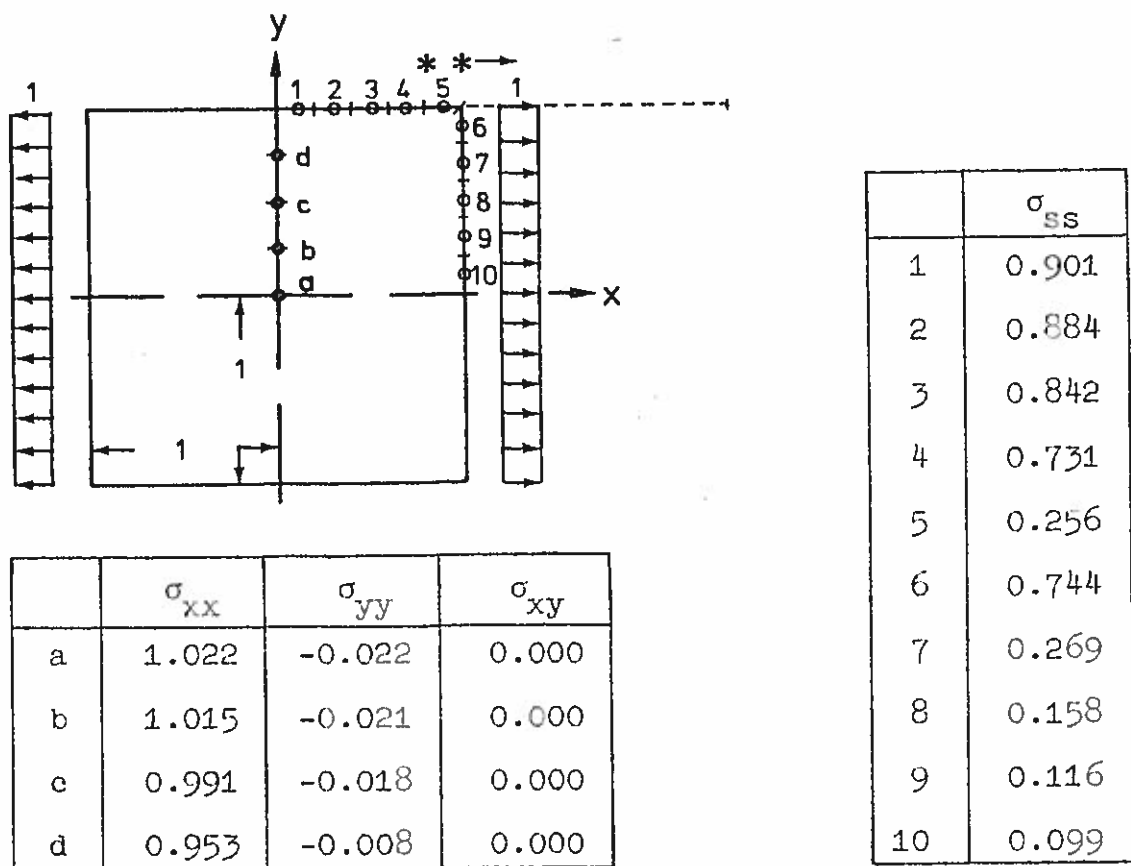
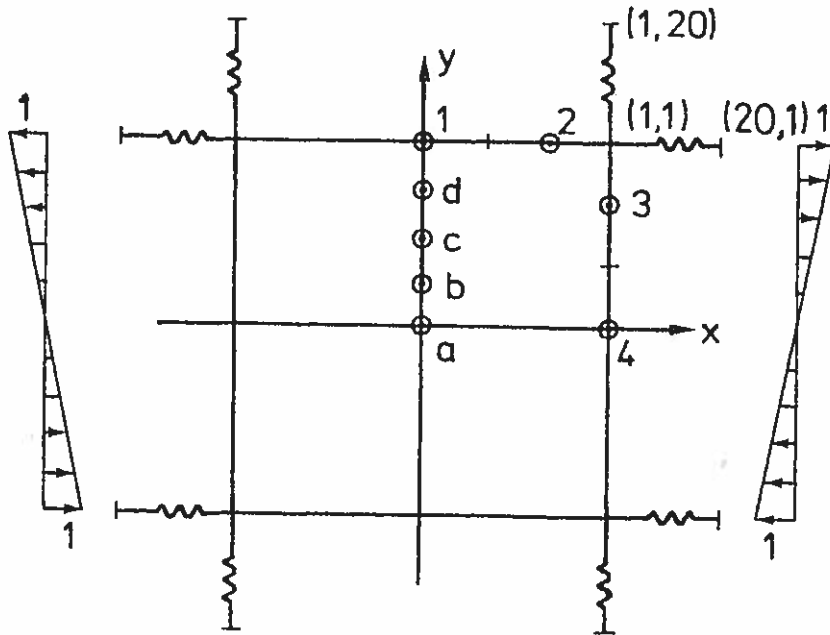


fig. 5.7 Skive udsat for rent træk beregnet med 40 'nodal points'.

Resultaterne må betragtes som helt uantagelige. Det ses, at resultaterne som ventelig var dårligst ved hjørnerne. For at forbedre resultaterne der, undersøgte hvad der sker, når tæthedsfunktionen trækkes et stykke forbi hjørnet, som skitseret på fig. 5.7, hvor forlængelsen af interval nr. 5 er antydnet. Derved skulle man opnå, at spændingssingulariteten i hjørnet bortfalde. Ved ren bøjning fås resultatet på fig. 5.8.



	$\sigma_{xx}$	$\sigma_{yy}$	$\sigma_{xy}$
a	0.000	0.000	0.000
b	0.250	0.000	0.000
c	0.500	0.000	0.000
d	0.750	0.000	0.000

	$\sigma_{ss}$
1	1.000
2	1.001
3	0.003
4	0.000

fig. 5.8 Skive beregnet for ren bøjning med 12 'nodal points'.

Benyttes istedet den biharmoniske funktion  $B = 2x^4 - 9y^2x^2 + y^4$ , fås med tæthedskurven trukket lige så langt forbi hjørnet som på fig. 5.8, men med samme punktplacering som i fig. 5.7 resultatet, der vises på fig. 5.9.

	$\sigma_{xx}$		$\sigma_{yy}$		$\sigma_{xy}$	
	I	E	I	E	I	E
a	-0.27	0.00	0.14	0.00	-0.25	0.00
b	0.64	0.75	-1.17	-1.13	-0.23	0.00
c	2.85	3.00	-4.56	-4.50	-0.22	0.00
d	6.51	6.75	-10.18	-10.13	-0.19	0.00

	$\sigma_{ss}$	
	I	E
1	8.74	11.82
2	7.47	10.38
3	4.87	7.50
4	1.22	3.18
5	-2.27	-2.58
6	5.85	9.42
7	12.77	15.18
8	17.26	19.50
9	20.18	22.38
10	21.74	23.82

I: Integralligningsmetoden

E: Eksakte værdier

På randen ses resultaterne at være helt uacceptable, medens de inde i området synes udmærkede. Til slut omtales nogle forsøg, hvor tæthedsfunktionen varierer retlinet. Da det jvnf. ovenstående hjalp noget at fortsætte tæthedskurven et stykke forbi hjørnerne, antoges tæthedskurven at have formen fig. 5.10a,

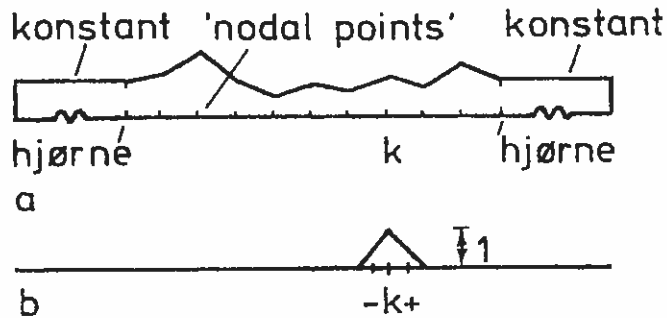
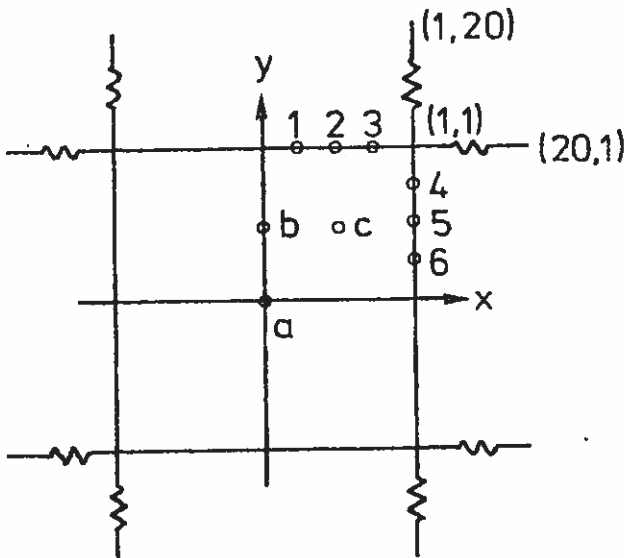


fig. 5.10.

'Nodal points' var beliggende i tæthedskurvens knæpunkter, hvilket også bevirkede, at spændingerne i hjørnepunkterne regnedes kendt. Bidragene fra den konstante tæthedsfunktion forbi hjørnerne beregnes efter ovennævnte metode, medens bidragene, hidrørende fra at tæthedsfunktionen  $q = 1$  i det  $k$ 'te punkt, regnedes som bidraget fra den på fig. 5.10b viste tæthedsfunktion ved anvendelse af Simpsons formel på intervallet før og efter pkt.  $k$ , idet værdierne i midt punkterne af disse intervaller, der er angivet med - og +, forudsattes kendt (se kap. 4.3). Der foretoges en del forsøg. Her skal blot angives et resultat, der viser, at metoden ikke er anbefalelsesværdig. Med den biharmoniske funktion  $B = x^4 + y^4 + x^4y - 6x^2y^2 - y^3x^2$  og 28 'nodal points' fås resultatet fig. 5.11.



- I: Integralligningsmetoden.
- E: Eksakte værdier.

	$\sigma_{xx}$		$\sigma_{yy}$		$\sigma_{xy}$			$\sigma_{ss}$	
	I	E	I	E	I	E		I	E
a	-0.07	0.00	-0.07	0.00	0.00	0.00	1	10.91	11.63
b	2.79	3.00	-3.29	-3.25	0.00	0.00	2	7.77	8.69
c	-0.82	-0.75	1.10	1.25	6.10	6.25	3	1.24	2.82
							4	14.88	13.72
							5	14.34	14.78
							6	13.18	13.46

fig. 5.11

Man bemærker, at resultaterne inde i området atter er acceptable, medens værdierne ved randen er for usikre. Gøres området mere langstrakt, forværres resultaterne betydeligt. Forsøg med områder uden hjørner omtales ikke, da de områdeformer, som ingeniører kommer ud for, som regel indeholder hjørner, og da selv meget simple områder ikke lader sig beregne tilstrækkeligt nøjagtigt med de foreslåede metoder. Hvor tæthedsfunktionen ligger på selve randen af området, synes der ingen anden udvej end at bruge en væsentlig bedre tilnærmelse af tæthedsfunktionen. I stedet for at fortsætte ad denne vej flyttes tæthedskurven nu bort fra randen, i lighed med hvad der skete ved den harmoniske funktion.

#### 5.4 Den anbefalede metode.

Det synes meget nærliggende at forsøge en metode, der ligner den, der blev benyttet ved det harmoniske tilfælde, nemlig at fjerne tæthedskurven fra selve randen. Som sagt har Oliveira [0-1] forsøgt noget lignende, idet han som grundelement valgte den spændingsfunktion, der fremkommer ved en enkeltkraft på en heluendelig plan. For at sikre sig mod at systemet bliver singulært, tvinges han til en bestemt placering af 'tætheds punkterne' i forhold til 'nodal points'. Den ved de harmoniske funktioner anvendte metodik giver en langt større frihed i valget af tæthedskurven og i valget af 'nodal points'.

Da man trods alt har et begrænset antal parametre til sin rådighed,

foreslås nu følgende principielle fremgangsmåde:

a) For at fjerne singulariteter hidrørende fra diskontinuert belastning og enkeltkræfter på randen dannes en partikulær spændingsfunktion  $B_p$ , der indeholder disse singulariteter, således at spændingsfunktionen  $B_H = B - B_p$  ikke indeholder sådanne singulariteter. En generel metode til at danne  $B_p$  er at benytte spændingsfunktionen svarende til en uendelig halvplan (5.31):

$$B_p(z') = \sum_i \frac{\theta_i}{\pi} (P_{ix}(y'-y_i) - P_{iy}(x'-x_i)) - \int_{L'} \frac{\theta}{\pi} (p_x(y'-y(\sigma)) - p_y(x'-x(\sigma))) d\sigma, \quad (5.63)$$

hvor  $P_{ix}$  og  $P_{iy}$  er enkeltkræfternes og  $p_x$  og  $p_y$  den diskontinuerte belastnings komponenter i henholdsvis x- og y-aksens retning. Ved områder med huller støder man imidlertid ind i det problem, at (5.63) ikke sikrer kompatibiliteten omkring hullerne. Lad os kalde resultanten af de 'kræfter', der i lign. (5.63) 'angriber' randen af det k'te hul for  $P_x^{kp}$  og  $P_y^{kp}$  og det tilsvarende moment omkring et punkt k inde midt i hullet for  $M^{kp}$ . Kompatibiliteten vil kun være sikret, hvis  $P_x^{kp} = P_y^{kp} = 0$  [M-1]. Forfatteren foreslår derfor at tilføje leddene

$$\sum_k \frac{\theta_k}{\pi} (P_x^{kp}(y'-y_k) - P_y^{kp}(x'-x_k)) \quad (5.64a)$$

til den partikulære spændingsfunktion (5.63), hvorved kompatibiliteten er sikret. k bør som sagt vælges inde midt i hullet for ikke at frembringe for voldsomme spændingsvariationer på randen.

Ønsker man, at spændingsfunktionen  $B_H$  skal være entydig, hvilket er en forudsætning ved flere metoder, skal de af spændingsfunktionen frembragte spændinger, der angriber et hul, være i kraft- og momentligevægt. Dette fremgår af ligningerne (5.39-41), idet snittet tænkes at være en lukket kurve omkring hullet. Kaldes i det oprindelige problem (B) kraftresultanterne på det k'te hul for  $P_x^k$  og  $P_y^k$  og momentet omkring pkt. k for  $M^k$ , foreslår forfatteren, at man til den partikulære spændingsfunktion (5.63) tilføjer leddene

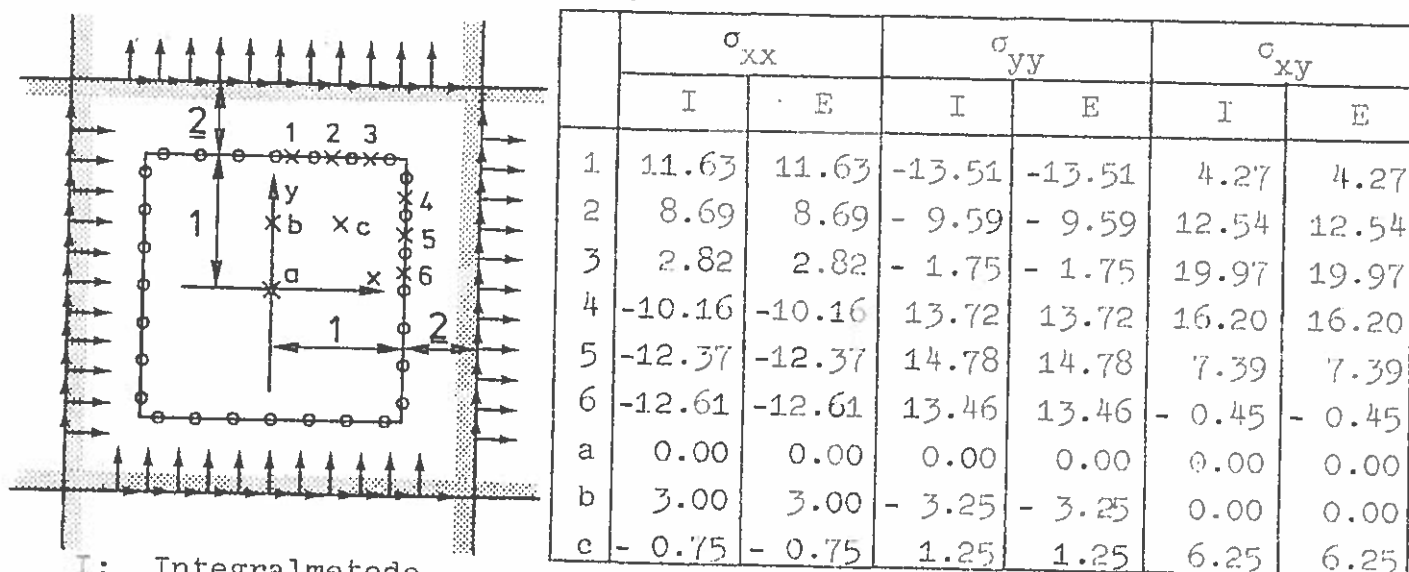
$$\sum_k \left( \frac{1-2\nu}{1-\nu} \frac{\ln r_k}{4\pi} (P_x^k(x'-x_k) + P_y^k(y'-y_k)) - \frac{\theta_k}{2\pi} ((P_x^k - 2P_x^{kp})(y'-y_k) - (P_y^k - 2P_y^{kp})(x'-x_k)) - \frac{M^k - 2M^{kp}}{2\pi} \theta_k \right) \quad (5.64b)$$

Sammen med (5.64a) er benyttet den spændingsfunktion, der svarer til, at de resulterende kræfter og momenter på hullerne angreb en uendelig halvplan [T-1].

b) Efter at belastningssingulariteterne er fjernet på ovennævnte måde, løses det resterende problem ved hjælp af integralligningsmetoder, som omtales i det følgende, idet singulariteter hidrører fra geometri og blandede randbetingelser behandles svarende til behandlingen af det harmoniske tilfælde.

Der vil blive givet eksempel på beregningen af en kvadratisk skive angrebet med 2 enkelkræfter og af en kvadratisk skive angrebet med diskontinuert belastning.

Behandlingen af singulariteter hidrørende fra geometrien eller blandede randbetingelser er ikke prøvet på beregningseksempler. Hvorledes de ekstra singulære spændingsfelter kan fremskaffes, og hvornår de bør benyttes, diskuteres senere i dette kapitel. Desværre har forfatteren ikke selv kunnet afse tid til en numerisk eftervisning af disse forslag.



I: Integralmetode  
 E: Eksakt  
 B:  $x^4 + y^4 + x^4 y - 6x^2 y^2 - y^3 x^2$

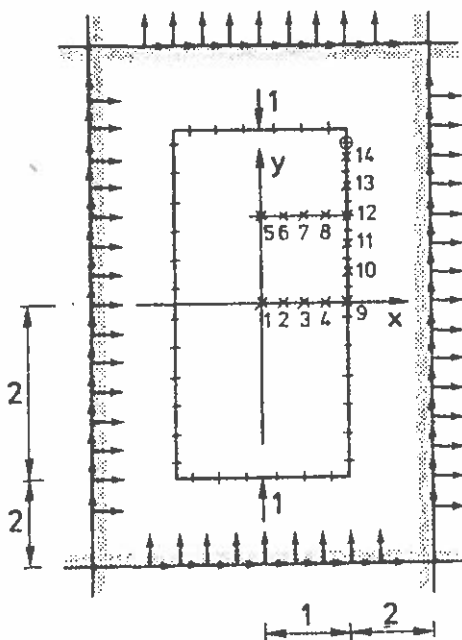
fig. 5.12

Fig. 5.12 antyder, hvorledes spændingerne i skiven fig. 5.11 findes med den anbefalede metode. Tæthedskurven er lagt et stykke uden for området's rand. I stedet for at benytte en kontinuert tæthedsfunktion søges spændingsfunktionen dannet som en sum af spændingsfunktioner, der svarer til enkeltkræfter på en

uendelig halvplan med beliggenheden som antydnet på fig. 5.12. Spændingen fra en enkeltkraft på en uendelig halvplan fås af ligningerne (5.32-34). I dette tilfælde er der brugt 28 'nodal points' på randen, svarende til 56 randbetingelser (givne spændinger) og 40 punkter på tæthedskurven, hvor 'fiktive' enkeltkræfter i 2 retninger kan angribe. En Gauss-eliminationsprocedure vælger nu de 56 'bedste' enkeltkræfter ud. Resultaterne på de med \* mærkede steder, der ikke ligger i 'nodal points,' kan sammenlignes med resultaterne i eksemplet fig. 5.11, og viser en virkelig forbedring i forhold til disse. Som sagt før, kan resultaterne i punkter mellem 'nodal points' fortælle, hvor godt randbetingelserne er opfyldte. I praktisk beregning bør spændingerne som kontrol beregnes andre steder på randen end i 'nodal points'. En sådan beregning vil fortælle, om ens randbetingelser er tilfredsstillende opfyldte, eller om man evt. skal ændre antallet af punkter eller tæthedskurvens placering.

Fig. 5.13 viser resultaterne af en beregning af en kvadratisk skive angrebet med 2 enkeltkræfter samt en sidebelastning, der svarer til, at de lodrette sider ikke bevæger sig i x-aksens retning, og at der ingen forskydningskræfter findes på disse sider. Resultaterne kan findes ved hjælp af fourierrækkeudvikling [T-1]. Disse, hvis konvergens undersøges, betragtes som 'eksakte'

I: Integralmetode.  
E: 'Eksakte' værdier.



	$\sigma_{xy}$		$\sigma_{xx}$		$\sigma_{yy}$	
	I	E	I	E	I	E
1			0.0198	0.0198	-0.5275	-0.5273
2			0.0139	0.0140	-0.5196	-0.5192
3			-0.0001	-0.0001	-0.5003	-0.4999
4			-0.0140	-0.0140	-0.4813	-0.4808
5			0.1036	0.1038	-0.6945	-0.6943
6			0.0652	0.0654	-0.6268	-0.6265
7			-0.0100	-0.0098	-0.4869	-0.4864
8			-0.0656	-0.0654	-0.3740	-0.3734
9	0.0000	0	-0.0197	-0.0197	-0.4735	-0.4729
10	0.0000	0	-0.0265	-0.0264	-0.4623	-0.4617
11	0.0000	0	-0.0484	-0.0484	-0.4219	-0.4213
12	-0.0001	0	-0.0841	-0.0840	-0.3336	-0.3330
13	-0.0002	0	-0.0950	-0.0951	-0.1862	-0.1856
14	-0.0005	0	-0.0569	0.0583	-0.0418	-0.0388

fig. 5.13

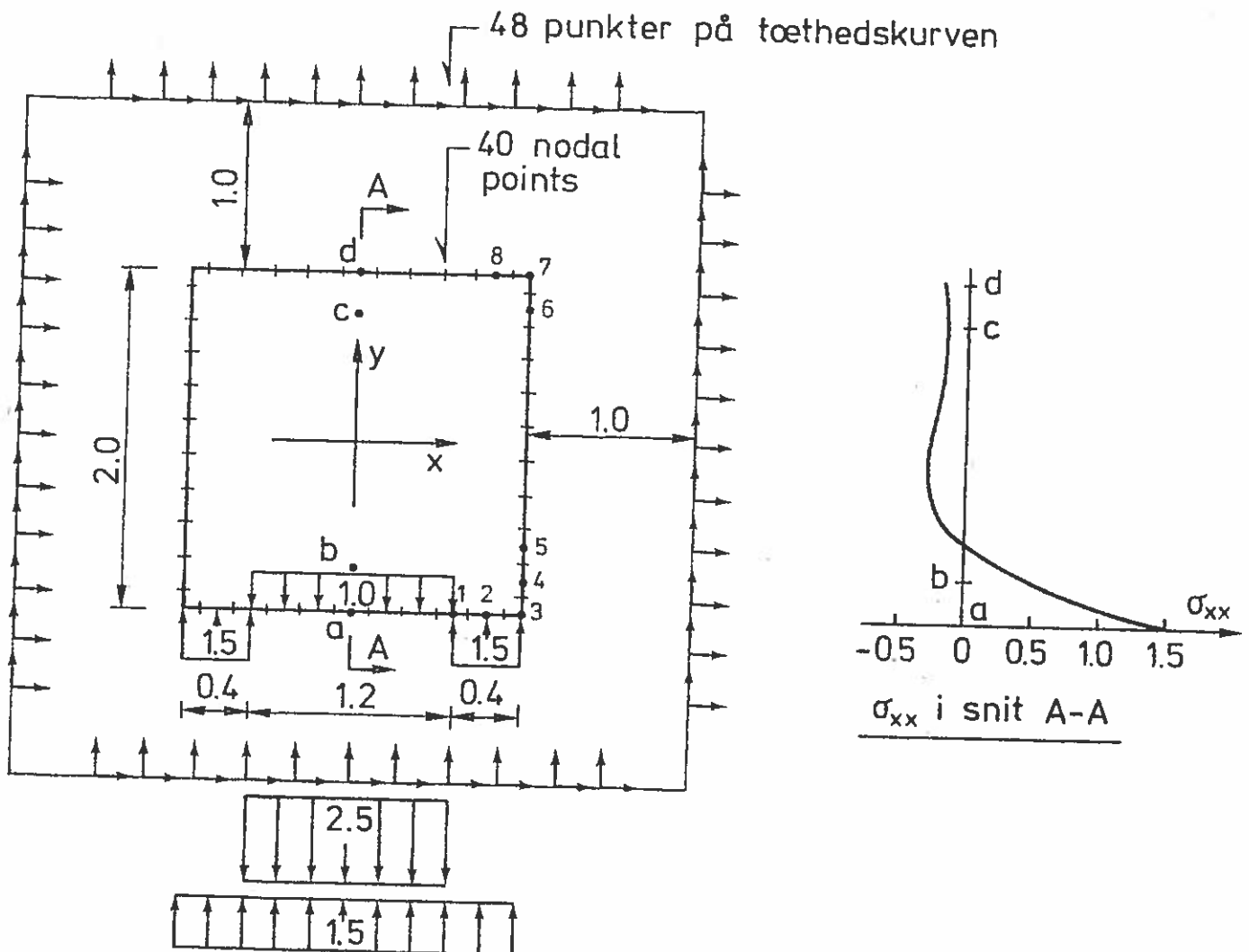
Fourierrækken konvergerede ikke særligt godt i det med cirkel omkransede 'nodal point', hvilket forklarer de knapt så gode resultater i pkt. 14. Hvis normalspændingen langs de lodrette rande er 0, findes følgende spændinger i punkterne 5, 6, 7, 8 og 12.

pkt.	5	6	7	8	12
$\sigma_{xx}$	0.1656	0.1317	0.0664	0.0194	0.0022
$\sigma_{yy}$	-0.7346	-0.6597	-0.4957	-0.3316	-0.2075

fig. 5.14.

I dette tilfælde ligger tæthedskurven atter i afstanden 2 fra randen. Ved at fjerne den yderligere fra randen må man forvente nøjagtigere værdier end disse.  $\sigma_{xx}$  i pkt. 12 skulle have været 0.

Som et sidste eksempel vises på fig. 5.15 resultaterne af beregninger på en skive udsat for en stykkevis konstant belastning.





$\sigma_{xx}$	a	b	c	d
Bares <sup>v</sup>	-0.161	-0.131	0.501	1.457
Sp.0	-0.1742	-0.1372	0.4915	1.4367
Kr.0	-0.1698	-0.1364	0.4956	1.4406

Sp.0. - Spændinger som overtallige

Kr.0. -  $P_x$  og  $P_y$  som overtallige

Sp.0	1	2	3	4	5	6	7	8
$ \Delta\sigma_{xx} $	-	-	0.0359	0.0008	0.0001	0.0065	0.0454	-
$ \Delta\sigma_{xy} $	0.0022	0.0014	0.0803	0.0101	0.0035	0.0054	0.0057	0.0017
$ \Delta\sigma_{yy} $	0.0014	0.0096	0.0790	-	-	-	0.0147	0.0020

fig. 5.15

Beregningerne er foretaget således, at belastningen er delt op i 2 belastninger på henholdsvis 2.5 og 1.5. Beregningsforløbet fremgår af fig. 5.16.

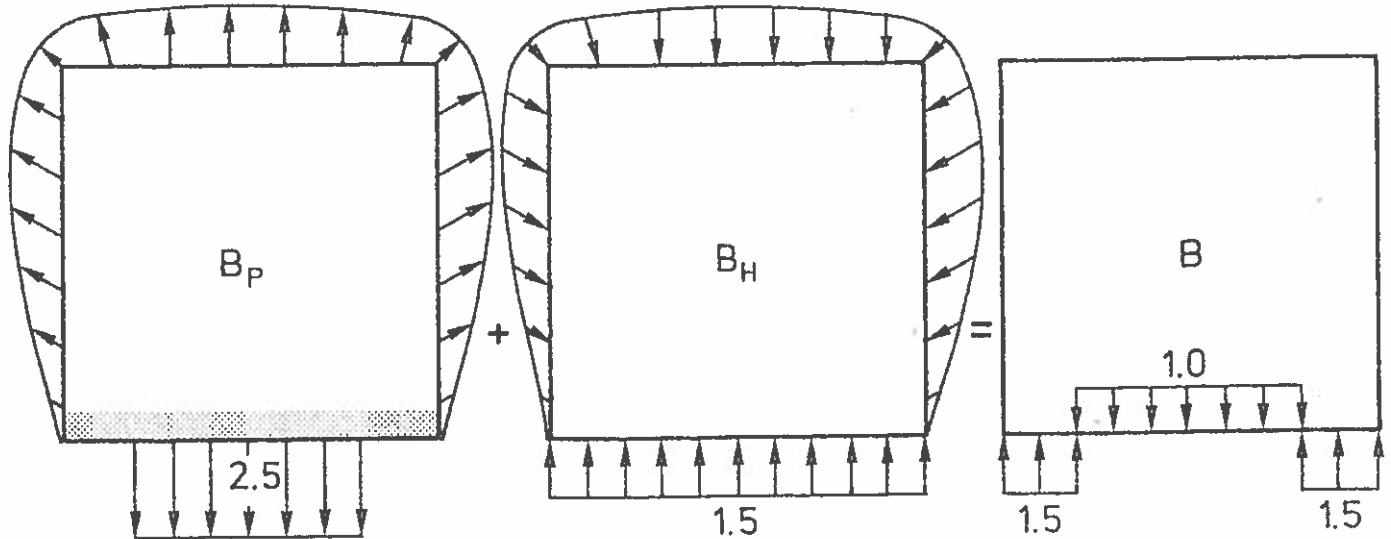


fig. 5.16 Beregningsforløbet.

Den partikulære løsning  $B_p$  er den, der svarer til kræfter på en uendelig halvplan. Spændingsfunktionen, der findes ved hjælp af integralligningsmetoder, er  $B_H$ , hvor spændingerne på de 3 øverste rande er numerisk lige store som dem i  $B_p$ , men modsat rettede. En tilsvarende opdeling af problemet benyttes også i eksemplet fig. 5.13.

Der er søgt anvendt 2 metoder. Den ene metode er den tidligere anvendte med spændingerne som de kendte i 'nodal points', der i fig. 5.15 er mærket ind med streger. I det andet tilfælde er et integrale af spændingerne brugt som overtallig. I et snit i skiven fra a til b langs randen findes de resulterende kræfter på snittet, jvnf. ligningerne (5.39-40) til

$$P_x = \left(\frac{\partial B}{\partial y}\right)_b - \left(\frac{\partial B}{\partial y}\right)_a \quad (5.65)$$

$$P_y = \left(\frac{\partial B}{\partial x}\right)_a - \left(\frac{\partial B}{\partial x}\right)_b \quad (5.66)$$

Da spændingsfunktionen søges som

$$B = \sum_i \frac{\theta_i}{\pi} (P_{ix}(y-y_i) - P_{iy}(x-x_i)) \quad (5.67)$$

fås

$$\frac{\partial B}{\partial x} = \sum_i \frac{(y-y_i)}{\pi((y-y_i)^2 + (x-x_i)^2)} (P_{ix}(y-y_i) - P_{iy}(x-x_i)) + \frac{\theta_i}{\pi} P_{iy} \quad (5.68)$$

$$\frac{\partial B}{\partial y} = \sum_i -\frac{(x-x_i)}{\pi((y-y_i)^2 + (x-x_i)^2)} (P_{ix}(y-y_i) - P_{iy}(x-x_i)) + \frac{\theta_i}{\pi} P_{ix} \quad (5.69)$$

Resultaterne i et snit midt gennem skiven er sammenlignet med resultater angivet af Bareš [B-2]. Den numeriske værdi af differencen mellem de udregnede og de eksakte randspændinger i punkter mellem nodal points er angivet for det tilfælde, hvor spændingerne er de overtallige. Da de dårligste resultater forekommer ved randene i snittet og ved hjørner, er det kun dér, resultaterne er angivet. Der er ikke søgt ændret på tæthedskurvens beliggenhed for at forøge resultaternes nøjagtighed. En væsentlig forbedring skulle derfor ligge inde for mulighedernes rækkevidde. At resultaterne bliver dårligere ved hjørner, skyldes højst sandsynligt visse singulariteter i de højere afledede af den virkelige spændingsfunktion på disse steder. De anvendte spændingsfunktioner er ikke i stand til at repræsentere singulariteter sådanne steder. En særlig behandling af singulariteter kan, hvis vinklen bliver større end  $180^\circ$ , være nødvendig - hvilket vil fremgå af det følgende.

Der foretages nu en undersøgelse af en biharmonisk funktion ved et hjørne med rette sider. De ved disse beregninger fundne singulariteter tænkes indgå i beregningerne fuldstændig analogt med behandlingen af singulariteterne ved det harmoniske tilfælde.

Den biharmoniske funktion ved hjørnet sammensættes af 2 funktioner:

$$B = B_1 + B_2, \text{ hvor} \quad (5.70)$$

$$\Delta\Delta B_1 = \Delta\Delta B_2 = 0 \quad (5.71)$$

$B_2$  er en vilkårlig valgt biharmonisk funktion, der opfylder randbetingelserne ved hjørnet.  $B_1$  er en biharmonisk funktion, der i randbetingelserne ved hjørnet giver værdier lig 0, og som sikrer, at randbetingelserne på resten af randen er tilfredsstillet.

Lad os først søge de spændingssingulariteter, der kan fremkomme i  $B_1$ .

En sådan undersøgelse er foretaget af M.L. Williams [W-2]. Her skal fremgangsmåden kort skitseres.

Spændingsfunktionen søges som enten realdelen eller imaginærdelen af den komplekse funktion.

$$B_i = r_h^{\lambda+1} f(\theta_h) \quad (5.72)$$

hvor  $\lambda$  og  $f$  kan være komplekse, og hvor centrum i  $(r_h, \theta_h)$ -koordinatsystemet ligger i selve hjørnet.

$$\Delta\Delta B_i = 0 \quad (5.73)$$

medfører

$$f(\theta_h) = C_1 \sin(\lambda+1)\theta_h + C_2 \cos(\lambda+1)\theta_h + C_3 \sin(\lambda-1)\theta_h + C_4 \cos(\lambda-1)\theta_h, \quad (5.74)$$

hvor konstanterne  $C_1, C_2, C_3$  og  $C_4$  kan være komplekse eller reelle.

Spændingerne og flytningerne findes til

$$\sigma_{rr} = -\lambda r_h^{\lambda-1} [(\lambda+1)[C_1 \sin(\lambda+1)\theta_h + C_2 \cos(\lambda+1)\theta_h] + (\lambda-3)[C_3 \sin(\lambda-1)\theta_h + C_4 \cos(\lambda-1)\theta_h] \quad (5.75)$$

$$\sigma_{\theta\theta} = (\lambda+1)\lambda r_h^{\lambda-1} [C_1 \sin(\lambda+1)\theta_h + C_2 \cos(\lambda+1)\theta_h + C_3 \sin(\lambda-1)\theta_h + C_4 \cos(\lambda-1)\theta_h] \quad (5.76)$$

$$\sigma_{r\theta} = -\lambda r_h^{\lambda-1} [(\lambda+1)[C_1 \cos(\lambda+1)\theta_h - C_2 \sin(\lambda+1)\theta_h] + (\lambda-1)[C_3 \cos(\lambda-1)\theta_h - C_4 \sin(\lambda-1)\theta_h] \quad (5.77)$$

$$2Gu_r = r_h^\lambda [-(\lambda+1)[C_1 \sin(\lambda+1)\theta_h + C_2 \cos(\lambda+1)\theta_h] - (\lambda-\tau) [C_3 \sin(\lambda-1)\theta_h + C_4 \cos(\lambda-1)\theta_h] \quad (5.78)$$

$$2Gu_\theta = r_h^\lambda [-(\lambda+1)[C_1 \cos(\lambda+1)\theta_h - C_2 \sin(\lambda+1)\theta_h] - (\lambda+\tau) [C_3 \cos(\lambda-1)\theta_h - C_4 \sin(\lambda-1)\theta_h] \quad (5.79)$$

hvor  $u_r$  og  $u_\theta$  er flytningerne henholdsvis ud af radiusvektor og vinkelret herpå og

$$\tau = 3-4\nu. \quad (5.80)$$

Er randbetingelserne ved hjørnet givne spændinger, søges spændingssingulariteten for tilfældet

$$\sigma_{\theta\theta} = \sigma_{r\theta} = 0 \text{ for } \theta_h = \pm \alpha.$$

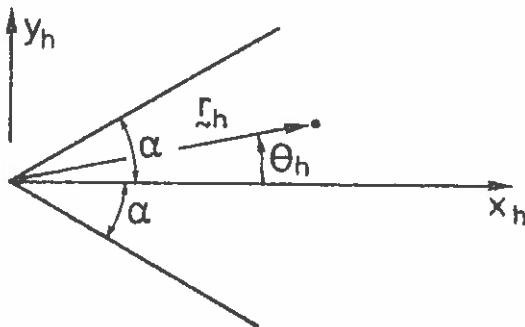


fig. 5.17

Ligningssystemet, der skal løses, er

$$\begin{bmatrix} \sin(\lambda+1)\alpha & \cos(\lambda+1)\alpha & \sin(\lambda-1)\alpha & \cos(\lambda-1)\alpha \\ -\sin(\lambda+1)\alpha & \cos(\lambda+1)\alpha & -\sin(\lambda-1)\alpha & \cos(\lambda-1)\alpha \\ (\lambda+1)\cos(\lambda+1)\alpha & -(\lambda+1)\sin(\lambda+1)\alpha & (\lambda-1)\cos(\lambda-1)\alpha & -(\lambda-1)\sin(\lambda-1)\alpha \\ (\lambda+1)\cos(\lambda+1)\alpha & (\lambda+1)\sin(\lambda+1)\alpha & (\lambda-1)\cos(\lambda-1)\alpha & (\lambda-1)\sin(\lambda-1)\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (5.81)$$

Det ses, at man i disse opgaver skal løse et egenværdiproblem. Ovenstående ligningssystem spaltes op i 2 dele, og man finder

$$\sin(2\sigma\lambda_1) = \frac{\sin 2\sigma}{2\sigma}(2\sigma\lambda_1) \quad (5.82)$$

$$C_3 = -\frac{\sin(\lambda_1+1)\sigma}{\sin(\lambda_1-1)\sigma} C_1 \quad (5.83)$$

og

$$\sin(2\sigma\lambda_2) = -\frac{\sin 2\sigma}{2\sigma}(2\sigma\lambda_2) \quad (5.84)$$

$$C_4 = -\frac{\cos(\lambda_2+1)\sigma}{\cos(\lambda_2-1)\sigma} C_2, \quad (5.85)$$

der sammen med ligningerne (5.72) og (5.74) giver

$$B_i = C_1 r_h^{\lambda_1+1} \left( \sin(\lambda_1+1)\theta_h - \frac{\sin(\lambda_1+1)\sigma}{\sin(\lambda_1-1)\sigma} \sin(\lambda_1-1)\theta_h \right) \\ + C_2 r_h^{\lambda_2+1} \left( \cos(\lambda_2+1)\theta_h - \frac{\cos(\lambda_2+1)\sigma}{\cos(\lambda_2-1)\sigma} \cos(\lambda_2-1)\theta_h \right), \quad (5.86)$$

eller idet alle egenværdier medtages bortset fra tilfældene  $\lambda = -1$ ,  $\lambda = 0$  og  $\lambda = 1$ , der i det følgende får en speciel behandling:

$$B_i = \sum_j C_{1j} r_h^{\lambda_{1j}+1} \left( \sin(\lambda_{1j}+1)\theta_h - \frac{\sin(\lambda_{1j}+1)\sigma}{\sin(\lambda_{1j}-1)\sigma} \sin(\lambda_{1j}-1)\theta_h \right) \\ + \sum_k C_{2k} r_h^{\lambda_{2k}+1} \left( \cos(\lambda_{2k}+1)\theta_h - \frac{\cos(\lambda_{2k}+1)\sigma}{\cos(\lambda_{2k}-1)\sigma} \cos(\lambda_{2k}-1)\theta_h \right). \quad (5.87)$$

Lad os betragte et af leddene f.eks.

$$B_i = C_1 r_h^{\lambda_1+1} \left( \sin(\lambda_1+1)\theta_h - \frac{\sin(\lambda_1+1)\sigma}{\sin(\lambda_1-1)\sigma} \sin(\lambda_1-1)\theta_h \right) = C_1 g_1(r_h, \theta_h) \\ = (\operatorname{Re}(C_1) + i\operatorname{Im}(C_1))(\operatorname{Re}(g_1) + i\operatorname{Im}(g_1)) \\ = (\operatorname{Re}(C_1)\operatorname{Re}(g_1) - \operatorname{Im}(C_1)\operatorname{Im}(g_1)) + i(\operatorname{Re}(C_1)\operatorname{Im}(g_1) \\ + \operatorname{Im}(C_1)\operatorname{Re}(g_1)) \quad (5.88)$$

Både realdelen og imaginærdelen er løsninger til den homogene ligning. Da  $C_1 = \operatorname{Re}(C_1) + i\operatorname{Im}(C_1)$  er en arbitrær konstant, bliver den fuldstændige løsning

$$B_1 = C_{11} \operatorname{Re}(g_1) + C_{12} \operatorname{Im}(g_1) \quad (5.89)$$

hvor  $C_{11}$  og  $C_{12}$  er reelle konstanter.

Som illustration udskrives  $\operatorname{Re}(g_1)$

$$g_1 = r_h^{(\lambda_R+1)} e^{i\lambda_I \ln r_h} (\sin((\lambda_R+1)+i\lambda_I)\theta_h \frac{\sin((\lambda_R+1)+i\lambda_I)\alpha}{\sin((\lambda_R-1)+i\lambda_I)\alpha} - \sin((\lambda_R-1)+i\lambda_I)\theta_h) \quad (5.90)$$

hvor  $\operatorname{Re}(\lambda_1)$  kaldes  $\lambda_R$ , og  $\operatorname{Im}(\lambda_1)$  kaldes  $\lambda_I$ . Skrives konstanten

$$\frac{\sin((\lambda_R+1)+i\lambda_I)\alpha}{\sin((\lambda_R-1)+i\lambda_I)\alpha} = C_R + iC_I, \text{ og udnyttes formelen } \sin(\alpha+i\beta)$$

=  $\sin \alpha \cosh \beta + i \cos \alpha \sinh \beta$ , fås

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}(g_1) = & r_h^{(\lambda_R+1)} \cos(\lambda_I \ln r_h) (\sin(\lambda_R+1)\theta_h \cosh \lambda_I \theta_h - \\ & C_R \sin(\lambda_R-1)\theta_h \cosh \lambda_I \theta_h + C_I \cos(\lambda_R-1)\theta_h \sinh \lambda_I \theta_h) \\ & - r_h^{(\lambda_R+1)} \sin(\lambda_I \ln r_h) (\cos(\lambda_R+1)\theta_h \sinh \lambda_I \theta_h - \\ & C_R \cos(\lambda_R-1)\theta_h \sinh \lambda_I \theta_h - C_I \sin(\lambda_R-1)\theta_h \cosh \lambda_I \theta_h) \end{aligned} \quad (5.91)$$

Det overlades til den energiske læser at udregne  $\operatorname{Im}(g_1)$ . Disse temmelig trivielle udregninger er kun medtaget for at give et indtryk af, hvilke funktioner man har med at gøre.

Da flytningerne skal være begrænsede, må man jvnf. ligningerne (5.78-79) kræve

$$\operatorname{Re}(\lambda) \geq 0. \quad (5.92)$$

Da det specielt er de tilfælde, hvor spændingerne bliver uendelige, der har interesse, skal løsningen jvnf. ligningerne (5.75-77) søges i området

$$0 \leq \operatorname{Re}(\lambda) < 1. \quad (5.93)$$

Williams har fundet min  $\operatorname{Re}(\lambda)$  for forskellige randproblemer. Resultaterne, der gengives på fig. 5.18, er taget fra [W-2].

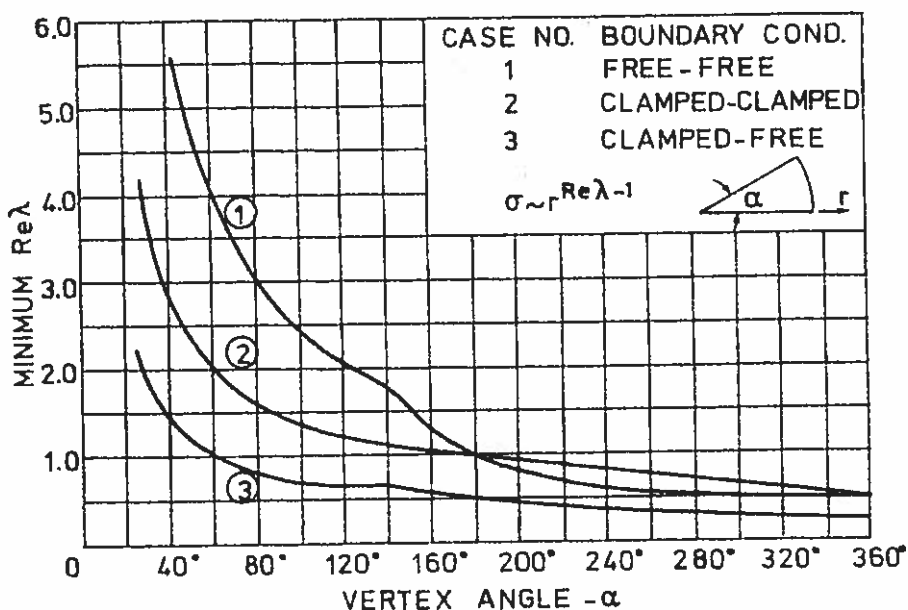


fig. 5.18

Det ses, at selv på en fuldstændig lige rand vil blandede randbetingelser kunne forårsage uendelige spændinger.

Nu forlader vi Williams arbejde for at finde den partikulære løsning  $B_2$ .

Af ligningerne (5.75-79) fremgår, at hvis spændingerne langs randene er givet som  $C_{ip} r_h^{(\lambda_p-1)}$  og flytningerne som  $C_{ip} r_h^{\lambda_p}$ , hvor  $C_{ip}$  og  $\lambda_p$  er reelle konstanter, da skal spændingsfunktionen søges på formen (5.72) og (5.74), hvor  $\lambda = \lambda_p$ . Hvis spændingerne langs randen er givet, fås af ligningerne (5.76-77):

$$\begin{aligned}
 & (\lambda_p+1) \lambda_p r_h^{\lambda_p-1} [C_1 \sin(\lambda_p+1)\alpha + C_2 \cos(\lambda_p+1)\alpha + C_3 \sin(\lambda_p-1)\alpha + C_4 \cos(\lambda_p-1)\alpha] \\
 & \qquad \qquad \qquad = \sigma_{\theta\theta}^\alpha = C_{1p} r_h^{\lambda_p-1} \\
 & (\lambda_p+1) \lambda_p r_h^{\lambda_p-1} [-C_1 \sin(\lambda_p+1)\alpha + C_2 \cos(\lambda_p+1)\alpha - C_3 \sin(\lambda_p-1)\alpha + C_4 \cos(\lambda_p-1)\alpha] \\
 & \qquad \qquad \qquad = \sigma_{\theta\theta}^{-\alpha} = C_{2p} r_h^{\lambda_p-1} \\
 & -\lambda_p r_h^{\lambda_p-1} [(\lambda_p+1)[C_1 \cos(\lambda_p+1)\alpha - C_2 \sin(\lambda_p+1)\alpha] + \\
 & \qquad \qquad \qquad (\lambda_p-1)[C_3 \cos(\lambda_p-1)\alpha - C_4 \sin(\lambda_p-1)\alpha] = \sigma_{r\theta}^\alpha = C_{3p} r_h^{\lambda_p-1} \\
 & -\lambda_p r_h^{\lambda_p-1} [(\lambda_p+1)[C_1 \cos(\lambda_p+1)\alpha + C_2 \sin(\lambda_p+1)\alpha] + \\
 & \qquad \qquad \qquad (\lambda_p-1)[C_3 \cos(\lambda_p-1)\alpha + C_4 \sin(\lambda_p-1)\alpha] = \sigma_{r\theta}^{-\alpha} = C_{4p} r_h^{\lambda_p-1} \qquad (5.94)
 \end{aligned}$$

eller skrevet på matrixform:

$$\begin{bmatrix} \sin(\lambda_p+1)\alpha & \cos(\lambda_p+1)\alpha & \sin(\lambda_p-1)\alpha & \cos(\lambda_p-1)\alpha \\ -\sin(\lambda_p+1)\alpha & \cos(\lambda_p+1)\alpha & -\sin(\lambda_p-1)\alpha & \cos(\lambda_p-1)\alpha \\ (\lambda_p+1)\cos(\lambda_p+1)\alpha & -(\lambda_p+1)\sin(\lambda_p+1)\alpha & (\lambda_p-1)\cos(\lambda_p-1)\alpha & -(\lambda_p-1)\sin(\lambda_p-1)\alpha \\ (\lambda_p+1)\cos(\lambda_p+1)\alpha & (\lambda_p+1)\sin(\lambda_p+1)\alpha & (\lambda_p-1)\cos(\lambda_p-1)\alpha & (\lambda_p-1)\sin(\lambda_p-1)\alpha \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{C_{1p}}{(\lambda_p+1)\lambda_p} \\ \frac{C_{2p}}{(\lambda_p+1)\lambda_p} \\ -\frac{C_{3p}}{\lambda_p} \\ -\frac{C_{4p}}{\lambda_p} \end{bmatrix} \quad (5.95)$$

Matricen er den samme som matricen i lign. (5.81). Som omtalt før er der kombinationer af  $\alpha$  og  $\lambda_p$ , der kan forårsage, at lignings-systemet bliver singulært, hvorfor spændingsfunktionen på formen (5.72) og (5.74) ikke kan give en fuldstændig beskrivelse af spændingstilstanden. Der må tilføjes andre spændingsfunktioner.

Spændingsfunktionen ligningerne (5.72) og (5.74) kan skrives på følgende måde:

$$\begin{aligned} B_i &= C_1 r_h^{\lambda+1} \sin(\lambda+1)\theta_h + C_2 r_h^{\lambda+1} \cos(\lambda+1)\theta_h + r_h^2 (C_3 r_h^{\lambda-1} \sin(\lambda-1)\theta_h \\ &\quad + C_4 r_h^{\lambda-1} \cos(\lambda-1)\theta_h) = \operatorname{Re}((C_2 - iC_1)z_h^{\lambda+1}) + \\ &\quad r_h^2 \operatorname{Re}((C_4 - iC_3)z_h^{\lambda-1}) = H_1 + r_h^2 H_2 \end{aligned} \quad (5.96)$$

Hvis determinanten i ligningssystemet (5.95) bliver lig 0, benyttes som ekstra spændingsfunktion:

$$\begin{aligned} B_i^e &= \ln r_h (C_5 r_h^{\lambda+1} \sin(\lambda+1)\theta_h + C_6 r_h^{\lambda+1} \cos(\lambda+1)\theta_h + r_h^2 (C_7 r_h^{\lambda-1} \sin(\lambda-1)\theta_h \\ &\quad + C_8 r_h^{\lambda-1} \cos(\lambda-1)\theta_h)) \\ &\quad + \theta_h (C_5 r_h^{\lambda+1} \cos(\lambda+1)\theta_h - C_6 r_h^{\lambda+1} \sin(\lambda+1)\theta_h + r_h^2 (C_7 r_h^{\lambda-1} \cos(\lambda-1)\theta_h \\ &\quad - C_8 r_h^{\lambda-1} \sin(\lambda-1)\theta_h)) \\ &= \operatorname{Re}((C_6 - iC_5)z_h^{\lambda+1} \log z_h) + r_h^2 \operatorname{Re}((C_8 - iC_7)z_h^{\lambda-1} \log z_h) = H_3 + r_h^2 H_4 \end{aligned} \quad (5.97)$$



som jvnf. lign. (5.7) umiddelbart ses at være biharmonisk. For  $\lambda = -1,0$  eller  $1$  kan ovenstående ikke umiddelbart benyttes.

Lad os betragte tilfældet, hvor randspændingerne er givet, og hvor lign. (5.82) er opfyldt. I dette tilfælde benyttes

$$B_i^e = \ln r_h (C_5 r_h^{\lambda_1+1} \sin(\lambda_1+1)\theta_h + C_7 r_h^{\lambda_1+1} \sin(\lambda_1-1)\theta_h) + \theta_h (C_5 r_h^{\lambda_1+1} \cos(\lambda_1+1)\theta_h + C_7 r_h^{\lambda_1+1} \cos(\lambda_1-1)\theta_h), \quad (5.98)$$

hvor  $C_7 = -\frac{\sin(\lambda_1+1)\alpha}{\sin(\lambda_1-1)\alpha} C_5$  (se analogien med lign. (5.83)). De valgte konstanter gør, at der ikke optræder led med  $\ln r_h$  ved udregningen af randværdierne. Man finder følgende spændinger ud fra den ekstra spændingsfunktion:

$$\sigma_{\theta\theta} = C_5 r_h^{\lambda_1-1} \left( (2\lambda_1+1)(\sin(\lambda_1+1)\theta_h - \frac{\sin(\lambda_1+1)\alpha}{\sin(\lambda_1-1)\alpha} \sin(\lambda_1-1)\theta_h) + \theta_h (\lambda_1+1)\lambda_1 (\cos(\lambda_1+1)\theta_h - \frac{\sin(\lambda_1+1)\alpha}{\sin(\lambda_1-1)\alpha} \cos(\lambda_1-1)\theta_h) + \ln r_h (\lambda_1+1)\lambda_1 (\sin(\lambda_1+1)\theta_h - \frac{\sin(\lambda_1+1)\alpha}{\sin(\lambda_1-1)\alpha} \sin(\lambda_1-1)\theta_h) \right) \quad (5.99)$$

$$\sigma_{r\theta} = C_5 r_h^{\lambda_1-1} \left( -(2\lambda_1+1)\cos(\lambda_1+1)\theta_h + (2\lambda_1-1) \frac{\sin(\lambda_1+1)\alpha}{\sin(\lambda_1-1)\alpha} \cos(\lambda_1-1)\theta_h \right) + \lambda_1 \theta_h \left( (\lambda_1+1)\sin(\lambda_1+1)\theta_h - (\lambda_1-1) \frac{\sin(\lambda_1+1)\alpha}{\sin(\lambda_1-1)\alpha} \sin(\lambda_1-1)\theta_h \right) - \lambda_1 \ln r_h \left( (\lambda_1+1)\cos(\lambda_1+1)\theta_h - (\lambda_1-1) \frac{\sin(\lambda_1+1)\alpha}{\sin(\lambda_1-1)\alpha} \cos(\lambda_1-1)\theta_h \right) \quad (5.100)$$

På randen fås

$$\sigma_{\theta\theta}^{\alpha} = -C_5 r_h^{\lambda_1-1} \alpha \lambda_1 (\lambda_1+1) \frac{\sin 2\alpha}{\sin(\lambda_1-1)\alpha} \quad (5.101)$$

$$\sigma_{\theta\theta}^{-\alpha} = C_5 r_h^{\lambda_1-1} \alpha \lambda_1 (\lambda_1+1) \frac{\sin 2\alpha}{\sin(\lambda_1-1)\alpha} \quad (5.102)$$

$$\sigma_{r\theta}^{\alpha} = \sigma_{r\theta}^{-\alpha} = C_5 r_h^{\lambda_1-1} \lambda_1 \left( \frac{\sin 2\alpha}{\sin(\lambda_1-1)\alpha} + 2\alpha \sin(\lambda_1+1)\alpha \right), \quad (5.103)$$

som indsættes i stedet for leddene med  $C_1$  i ligningerne (5.94). Ideen bag indførelsen af den ekstra spændingsfunktion på formen lign. (5.97) er, at  $C_5$ ,  $C_6$ ,  $C_7$  og  $C_8$  indbyrdes kan justeres, således at faktorerne til  $\ln r_h$  på randen bliver lig nul. Dette kan altid gøres, hvor løsninger på den oprindelige form giver singulære

ligninger, eftersom faktorerne til  $\ln r_h$  har det samme udseende som lign. (5.74). Dette gælder også, hvor randbetingelserne er flytninger og ved blandede randbetingelser. Det er ikke undersøgt af forfatteren, om spændingsfunktioner på formen (5.96-97) altid vil være i stand til at frembringe et ikke-singulært ligningssystem - hvis ikke, vil man også have homogene løsninger på formen (5.97).

Spændingsudtrykkene undersøges nu for specialtilfældene  $\lambda = -1$ ,  $\lambda = 0$  og  $\lambda = 1$ . Hvor  $\operatorname{Re}(((C_2 - iC_1)z_h^{\lambda+1} + (C_4 - iC_3)r_h^2 z_h^{\lambda-1}))$  og  $\operatorname{Re}(((C_6 - iC_5)z_h^{\lambda+1} + (C_8 - iC_7)r_h^2 z_h^{\lambda-1})) \log z_h$  ikke er tilstrækkelige benyttes  $\operatorname{Re}((C_{10} - iC_9)z_h^{\lambda+1} + (C_{12} - iC_{11})r_h^2 z_h^{\lambda-1}) \log^2 z_h$  o.s.v. Der medtages kun de nødvendige led.

For tilfældet  $\lambda = -1$  bliver flytningerne jvnf. ligningerne (5.78-79) uendeligt store, hvorfor hjørnet må være angrebet af koncentrerede kræfter. De mulige spændingsfunktioner er

$$B = C_2 - C_3 \sin 2\theta_h + C_4 \cos 2\theta_h \quad (5.104)$$

$$B^e = \ln r_h [C_6 - C_7 \sin 2\theta_h + C_8 \cos 2\theta_h] + \theta_h [C_5 + C_7 \cos 2\theta_h + C_8 \sin 2\theta_h] \quad (5.105)$$

og

$$B^{ec} = C_9 \theta_h \ln r_h \quad (5.105a)$$

$$\sigma_{\theta\theta} = \frac{-1}{r_h^2} [C_9 \theta_h + C_6 - C_7 \sin 2\theta_h + C_8 \cos 2\theta_h] \quad (5.106)$$

$$\sigma_{r\theta} = \frac{1}{r_h^2} [C_5 - C_3 2 \cos 2\theta_h - C_4 2 \sin 2\theta_h - C_9 + C_7 3 \cos 2\theta_h + C_8 3 \sin 2\theta_h + \theta_h [-C_7 2 \sin 2\theta_h + C_8 2 \cos 2\theta_h] + \ln r_h [C_9 - C_7 2 \cos 2\theta_h - C_8 2 \sin 2\theta_h]] \quad (5.107)$$

Med randene  $\theta_h = \pm \alpha$  fås, eftersom koefficienterne til  $\ln r_h$  ved randene skal være lig 0:

$$C_8 = 0 \text{ hvis } \alpha \neq \frac{\pi}{2} \text{ og } \alpha \neq \pi \quad (5.108)$$

$$C_9 = 2C_7 \cos 2\alpha \quad (5.109)$$

Der indsat i ligningerne (5.106-107) giver

$$\sigma_{\theta\theta} = -\frac{1}{r_h^2} [C_6 + C_7(2\theta_h \cos 2\alpha - \sin 2\theta_h) + C_8 \cos 2\theta_h] \quad (5.110)$$

$$\sigma_{r\theta} = \frac{1}{r_h^2} [C_5 - C_3 2\cos 2\theta_h - C_4 2\sin 2\theta_h + C_7(3\cos 2\theta_h - 2\cos 2\alpha) + C_8 3\sin 2\theta_h + \theta_h [-C_7 2\sin 2\theta_h + C_8 2\cos 2\theta_h] + \ln r_h [C_7(2\cos 2\alpha - 2\cos 2\theta_h) - C_8 2\sin 2\theta_h]] \quad (5.111)$$

Hvis  $2\alpha \cos 2\alpha \neq \sin 2\alpha$ ,  $\alpha \neq \frac{\pi}{2}$  og  $\alpha \neq \pi$  bestemmes  $C_8$ ,  $C_6$  og  $C_7$  af ligningerne (5.108) og (5.110), hvorefter ligning (5.111) giver:

$$\begin{bmatrix} 1 & -2\cos 2\alpha & -2\sin 2\alpha \\ 1 & -2\cos 2\alpha & 2\sin 2\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_5 \\ C_3 \\ C_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_h^2 \sigma_{r\theta}^{\alpha} - C_7(\cos 2\alpha - 2\alpha \sin 2\alpha) \\ r_h^2 \sigma_{r\theta}^{-\alpha} - C_7(\cos 2\alpha - 2\alpha \sin 2\alpha) \end{bmatrix} \quad (5.112)$$

hvoraf  $C_4$  kan bestemmes,  $C_3$  vælges og  $C_5$  derefter bestemmes. Der bliver altså én homogen løsning

$$B_1 = C_3 [2\theta_h \cos 2\alpha - \sin 2\theta_h], \quad (5.113)$$

hvilket, som vist af Timoshenko [T-1], er spændingsfunktionen hidrørende fra et moment angribende i hjørnet:

$$M = 2C_3 [2\alpha \cos 2\alpha - \sin 2\alpha]. \quad (5.114)$$

Timoshenko påpeger, at for  $2\alpha \cos 2\alpha = \sin 2\alpha$  vil det ikke være muligt at beskrive et moment ved hjælp af spændingsfunktionen lign. (5.113). Af lign. (5.110) ses, at den asymmetriske partikulære løsning forsvinder, og der kommer en ekstra homogen løsning. Med  $C_5 = C_3 \cos 2\alpha - C_7(\cos 2\alpha - 2\alpha \sin 2\alpha)$  fås

$$B_1 = C_3(2\theta_h \cos 2\alpha - \sin 2\theta_h) + C_7(\theta_h(\cos 2\theta_h - \cos 2\alpha + 2\alpha \sin 2\alpha) + \ln r_h(2\theta_h \cos 2\alpha - \sin 2\theta_h)) \quad (5.115)$$

et resultat Sternberg og Koiter [S-4] også er kommet frem til ved at bruge Mellin transformerede.

For  $\alpha = \frac{\pi}{2}$  eller  $\alpha = \pi$  kan  $C_7$  findes ud fra lign. (5.110) og  $\sigma_{\theta\theta}^{\alpha} - \sigma_{\theta\theta}^{-\alpha}$ ,  $C_8$  kan findes ud fra lign. (5.111) og  $\sigma_{r\theta}^{\alpha} - \sigma_{r\theta}^{-\alpha}$ , og derefter er  $C_6$  entydigt givet ud fra lign. (5.110).  $C_4$  kan fastsættes vilkårligt, således at den homogene løsning bliver

$$B_1 = C_3 [2\theta_h \cos 2\alpha - \sin 2\theta_h] + C_4 \cos 2\theta_h \quad (5.116)$$

Der er altså også i dette tilfælde en dobbeltuendelighed af løsninger. Den partikulære løsning, der forsvandt for  $2\alpha \cos 2\alpha = \sin 2\alpha$ , kan findes ved også at medtage led med  $\log^2 z_h$ . Man finder som ekstra spændingsfunktion

$$B^{ee} = C(\ln^2 r_h (\theta_h \sin 2\alpha - \alpha \sin 2\theta_h) - \ln r_h \theta_h (2\alpha \cos 2\theta_h - (1-4\alpha^2) \sin 2\alpha) - \frac{1}{3} \theta_h^3 \sin 2\alpha + \theta_h^2 \alpha \sin 2\theta_h) \quad (5.117)$$

De mulige spændingsfunktioner ved tilfældet  $\lambda = 0$  er

$$B = C_1 r_h \sin \theta_h + C_2 r_h \cos \theta_h = C_1 x_h + C_2 y_h \quad (5.118)$$

og

$$B^e = C_5 \ln r_h r_h \sin \theta_h + C_6 \ln r_h r_h \cos \theta_h + C_7 \theta_h r_h \sin \theta_h + C_8 \theta_h r_h \cos \theta_h \\ = C_5 \ln r_h y_h + C_6 \ln r_h x_h + C_7 \theta_h y_h + C_8 \theta_h x_h \quad (5.119)$$

Da leddene med  $\ln r_h$  og  $\theta_h$  hver for sig er biharmoniske jvnf. lign. (5.6), løsnes båndene imellem dem. De ovenstående ligninger er ikke nok til at frembringe entydige løsninger, hvorfor man igen benytter  $\log^2 z_h$ . Også her sker en tilsvarende løsning af båndene, og man får

$$B^{ee} = C_9 \theta_h y_h \ln r_h + C_{10} \theta_h x_h \ln r_h \quad (5.120)$$

Leddene med  $C_1$  og  $C_2$  giver ikke anledning til spændinger. Leddene med  $C_7$  og  $C_8$  giver den homogene løsning, der svarer til, at en enkelkraft angriber hjørnet [T-1]. Tilbage bliver til dannelse af partikulære løsninger:

$$B = C_5 y_h \ln r_h + C_6 x_h \ln r_h + C_9 \theta_h y_h \ln r_h + C_{10} \theta_h x_h \ln r_h \quad (5.121)$$

$$\sigma_{\theta\theta} = C_5 \frac{\sin \theta_h}{r_h} + C_6 \frac{\cos \theta_h}{r_h} + C_9 \frac{\theta_h \sin \theta_h}{r_h} + C_{10} \frac{\theta_h \cos \theta_h}{r_h} \quad (5.122)$$

$$\sigma_{r\theta} = -C_5 \frac{\cos \theta_h}{r_h} + C_6 \frac{\sin \theta_h}{r_h} - C_9 \frac{\sin \theta_h + \theta_h \cos \theta_h}{r_h} - C_{10} \frac{\cos \theta_h - \theta_h \sin \theta_h}{r_h} \quad (5.123)$$

Ligningerne (5.122-123) giver altid entydige løsninger.

For tilfældet  $\lambda = 1$  kan man benytte spændingsfunktionerne

$$B = C_1 r_h^2 \sin 2\theta_h + C_2 r_h^2 \cos 2\theta_h + C_7 r_h^2 \theta_h + C_4 r_h^2 \quad (5.124)$$

med spændingerne

$$\sigma_{\theta\theta} = C_1 2 \sin 2\theta_h + C_2 2 \cos 2\theta_h + C_7 2\theta_h + C_4 \cdot 2 \quad (5.125)$$

$$\sigma_{r\theta} = -C_1 2 \cos 2\theta_h + C_2 2 \sin 2\theta_h - C_7, \quad (5.126)$$

og

$$B^e = \ln r_h (C_5 r_h^2 \sin 2\theta_h + C_6 r_h^2 \cos 2\theta_h + C_{11} r_h^2 \theta_h + C_8 r_h^2) + \theta_h (C_5 r_h^2 \cos 2\theta_h - C_6 r_h^2 \sin 2\theta_h) \quad (5.127)$$

med spændingerne

$$\sigma_{\theta\theta} = C_5 3 \sin 2\theta_h + C_6 3 \cos 2\theta_h + C_{11} 3\theta_h + C_8 3 + \theta_h (C_5 2 \cos 2\theta_h - C_6 2 \sin 2\theta_h) + \ln r_h (C_5 2 \sin 2\theta_h + C_6 2 \cos 2\theta_h + C_{11} 2\theta_h + C_8 2) \quad (5.128)$$

$$\sigma_{r\theta} = -C_5 3 \cos 2\theta_h + C_6 3 \sin 2\theta_h - C_{11} + \theta_h (C_5 2 \sin 2\theta_h + C_6 2 \cos 2\theta_h) - \ln r_h (C_5 2 \cos 2\theta_h - C_6 2 \sin 2\theta_h + C_{11}) \quad (5.129)$$

Søges spændingsfunktionen dannet ud fra lign. (5.124), fås

$$\begin{bmatrix} 0 & 4 \cos 2\alpha & 0 & 4 \\ 4(\sin 2\alpha - 2\alpha \cos 2\alpha) & 0 & 0 & 0 \\ -4 \cos 2\alpha & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 4 \sin 2\alpha & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_7 \\ C_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{\theta\theta}^\alpha + \sigma_{\theta\theta}^{-\alpha} \\ (\sigma_{\theta\theta}^\alpha - \sigma_{\theta\theta}^{-\alpha}) + 2\alpha(\sigma_{r\theta}^\alpha + \sigma_{r\theta}^{-\alpha}) \\ \sigma_{r\theta}^\alpha + \sigma_{r\theta}^{-\alpha} \\ \sigma_{r\theta}^\alpha - \sigma_{r\theta}^{-\alpha} \end{bmatrix} \quad (5.130)$$

som har entydige løsninger, undtagen hvor  $\alpha = \frac{\pi}{2}$ ,  $\alpha = \pi$  eller  $\sin 2\alpha = 2\alpha \cos 2\alpha$ . Den sidste betingelse er den samme som ved behandlingen af momentet virkende på hjørnet og synes efterhånden at fortjene en nærmere undersøgelse, der dog ikke vil blive foretaget i denne afhandling. Man kan måske undre sig over, at der er entydige løsninger, da man almindeligvis kræver momentligevægten opfyldt ude i hjørnet. Dertil er kun at svare, at løsningen er en grænseværdi, der medfører en singularitet helt ude i hjørnet. Man finder

$$B_2^1 = r_h^2 \left[ \left( \frac{\sin 2\theta_h - 2\theta_h \cos 2\alpha}{4(\sin 2\alpha - 2\alpha \cos 2\alpha)} + \frac{1}{4} \right) \sigma_{\theta\theta}^\alpha + \left( \frac{-\sin 2\theta_h + 2\theta_h \cos 2\alpha}{4(\sin 2\alpha - 2\alpha \cos 2\alpha)} + \frac{1}{4} \right) \sigma_{\theta\theta}^{-\alpha} \right. \\ \left. + \left( \frac{2\alpha \sin 2\theta_h - 2\theta_h \sin 2\alpha}{4(\sin 2\alpha - 2\alpha \cos 2\alpha)} + \frac{\cos 2\theta_h - \cos 2\alpha}{4 \sin 2\alpha} \right) \sigma_{r\theta}^\alpha \right. \\ \left. + \left( \frac{2\alpha \sin 2\theta_h - 2\theta_h \sin 2\alpha}{4(\sin 2\alpha - 2\alpha \cos 2\alpha)} - \frac{\cos 2\theta_h - \cos 2\alpha}{4 \sin 2\alpha} \right) \sigma_{r\theta}^{-\alpha} \right] \quad (5.131)$$

Hvor  $\alpha = \frac{\pi}{2}$  fås

$$B_2^2 = r_h^2 \left[ \left( \frac{\sin 2\theta_h + 2\theta_h}{4\pi} + \frac{1}{4} \right) \sigma_{\theta\theta}^\alpha + \left( -\frac{\sin 2\theta_h + 2\theta_h}{4\pi} + \frac{1}{4} \right) \sigma_{\theta\theta}^{-\alpha} \right. \\ \left. + \left( \frac{\sin 2\theta_h}{4} - \frac{1}{2\pi} (\ln r_h (\cos 2\theta_h + 1) - \theta_h \sin 2\theta_h) \right) \sigma_{r\theta}^\alpha \right. \\ \left. + \left( \frac{\sin 2\theta_h}{4} + \frac{1}{2\pi} (\ln r_h (\cos 2\theta_h + 1) - \theta_h \sin 2\theta_h) \right) \sigma_{r\theta}^{-\alpha} \right] \quad (5.132)$$

og den homogene løsning

$$B_1^2 = C r_h^2 (\cos 2\theta_h + 1) = C \cdot 2 r_h^2 \cos^2 \theta_h = C \cdot 2 x_h^2 \quad (5.133)$$

hvilket svarer til rent tryk parallelt med randen.

For  $\alpha = \pi$  fås:

$$B_2^3 = r_h^2 \left[ \left( \frac{-\sin 2\theta_h + 2\theta_h}{8\pi} + \frac{1}{4} \right) \sigma_{\theta\theta}^\alpha + \left( -\frac{-\sin 2\theta_h + 2\theta_h}{8\pi} + \frac{1}{4} \right) \sigma_{\theta\theta}^{-\alpha} \right. \\ \left. + \left( -\frac{\sin 2\theta_h}{4} + \frac{1}{4\pi} (\ln r_h (\cos 2\theta_h - 1) - \theta_h \sin 2\theta_h) \right) \sigma_{r\theta}^\alpha \right. \\ \left. + \left( -\frac{\sin 2\theta_h}{4} - \frac{1}{4\pi} (\ln r_h (\cos 2\theta_h - 1) - \theta_h \sin 2\theta_h) \right) \sigma_{r\theta}^{-\alpha} \right] \quad (5.134)$$

og lign. (5.133) som homogen løsning.

Hvor  $\sin 2\alpha = 2\alpha \cos 2\alpha$  fås

$$B_2^4 = r_h^2 \left[ \left( \frac{\ln r_h (\sin 2\theta_h - 2\theta_h \cos 2\alpha) + \theta_h \cos 2\theta_h}{8\alpha^2 \sin 2\alpha} + \frac{4\alpha^2 - 1}{16\alpha^3} \theta_h + \frac{1}{4} \right) \sigma_{\theta\theta}^\alpha \right. \\ \left. + \left( -\frac{\ln r_h (\sin 2\theta_h - 2\theta_h \cos 2\alpha) + \theta_h \cos 2\theta_h}{8\alpha^2 \sin 2\alpha} - \frac{4\alpha^2 - 1}{16\alpha^3} \theta_h + \frac{1}{4} \right) \sigma_{\theta\theta}^{-\alpha} \right. \\ \left. + \left( \frac{\ln r_h (\alpha \sin 2\theta_h - \theta_h \sin 2\alpha) + \theta_h \alpha \cos 2\theta_h - \alpha^2 \cos 2\alpha + \alpha^2 \cos 2\theta_h - \theta_h \alpha \cos 2\alpha}{4\alpha^2 \sin 2\alpha} \right) \sigma_{r\theta}^\alpha \right. \\ \left. + \left( \frac{\ln r_h (\alpha \sin 2\theta_h - \theta_h \sin 2\alpha) + \theta_h \alpha \cos 2\theta_h + \alpha^2 \cos 2\alpha - \alpha^2 \cos 2\theta_h - \theta_h \alpha \cos 2\alpha}{4\alpha^2 \sin 2\alpha} \right) \sigma_{r\theta}^{-\alpha} \right] \quad (5.135)$$

og den homogene løsning er

$$B_1^4 = C r_h^2 (\sin 2\theta_h - 2\theta_h \cos 2\alpha) \quad (5.136)$$

Weinel og Massonet søger at danne spændingsfunktionen ud fra den spændingsfunktion, en kraft på en uendelig halvplan frembringer. Ved hjørnet svarer dette til, at man konsekvent søger løsninger af formen lign. (5.132), hvor disse i stedet for skulle have været på en af de tre øvrige former. Derfor foreslås, at man benytter følgende korrektionsled hvor  $\alpha \neq \frac{\pi}{2}$ :

for  $\alpha = \pi$ :

$$B^k = B_2^3 - B_2^2 \quad (5.137)$$

for  $\sin 2\alpha = 2\alpha \cos 2\alpha$ :

$$B^k = B_2^4 - B_2^2 \quad (5.138)$$

og ellers:

$$B^k = B_2^1 - B_2^2, \quad (5.139)$$

hvor  $\sigma_{\theta\theta}^{\alpha}$ ,  $\sigma_{\theta\theta}^{-\alpha}$ ,  $\sigma_{r\theta}^{\alpha}$  og  $\sigma_{r\theta}^{-\alpha}$  er de 'fiktive' spændinger ved hjørnet.

Ovenstående korrektioner må også kunne benyttes ved Shermans ligninger, da disse er baseret på en spændingsfunktion, der er dannet på samme måde som Weinels og Massonets. Der er en simpel forbindelse mellem ovenstående 'fiktive' spændinger og Shermans tæthedsfunktioner.

Konklusionen af disse betragtninger må være, at spændingssingulariteter ved hjørnet hidrørende fra den partikulære løsning 'næsten' altid kan findes, men at tingene stiller sig noget anderledes ved singulariteter fra den homogene løsning. Som problemet er formuleret, kan fiktive kræfter ikke frembringe homogene løsninger, der indeholder en singularitet ved hjørnet. Derfor må de homogene spændingstilstande indføres i beregningerne på anden vis, f.eks. på den i 'den anbefalede metode' skitserede måde.

Williams har også undersøgt egenværdierne ved bøjning af plader. Fig. 5.19 gengiver de resultater, han har offentliggjort i [W-3].

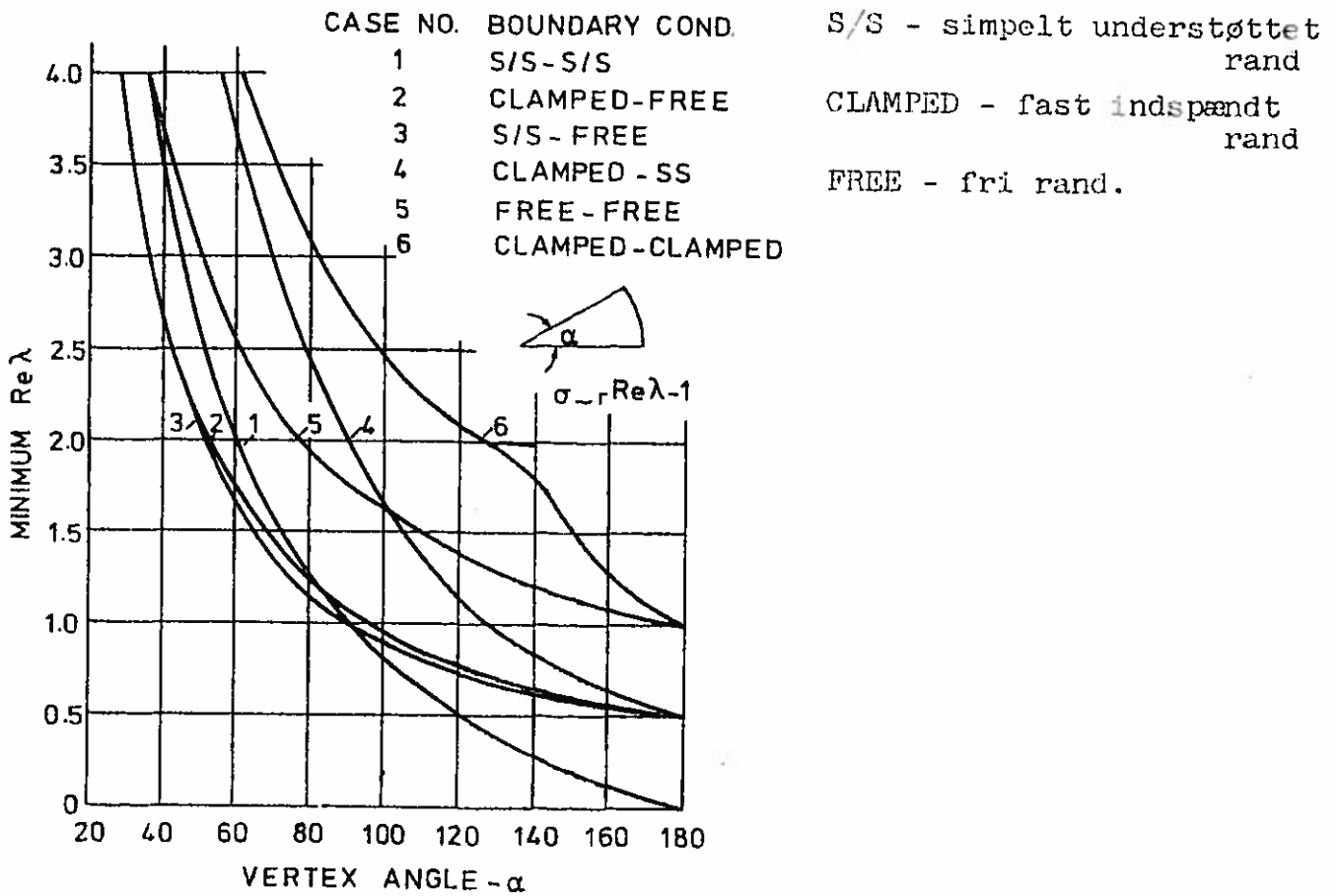


fig. 5.19

Det fremgår af tilfælde 3, at der ved skæve plader kommer uendelig store spændinger ved de stumpvinklede pladehjørner. Den skitserede metode skulle give mulighed for at tage sådanne singulariteter i regning.

Hvis beregning med sådanne singulariteter viser sig effektive, åbner der sig meget store muligheder, f.eks. til at løse det meget konstruerede problem, der fremgår af fig. 5.20, hvor spændingstilstanden søges



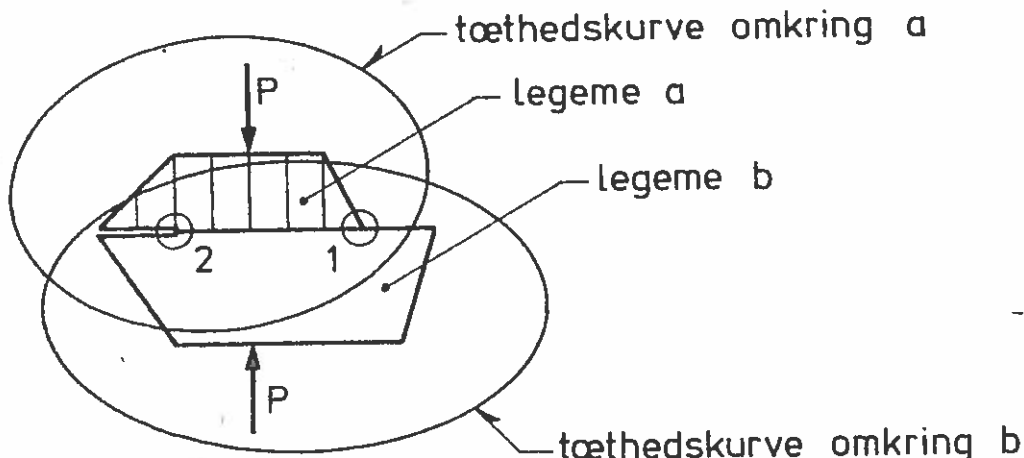


fig. 5.20

i de viste 2 legemer, der antages at være af forskelligt materiale. Spændingssingulariteten hidrørende fra enkeltkræfterne behandles på sædvanlig måde. Der kan forventes geometrisk bestemte singulariteter i pkt. 1 og pkt. 2. I disse punkter skal man søge egenverdierne i en  $8 \times 8$  matrice, idet der som ekstrabetingelser kommer, at flytningerne, forskydningskraften og normalkraften vinkelret på de 2 legemers berøringsflade skal være ens i berøringsfladen. Den øvrige spændingsfunktion tænkes derefter frembragt ved hjælp af en tøthedskurve rundt om hvert legeme.

### 5.5 Forslag til yderligere undersøgelser.

Det teoretiske arbejde med spændingssingulariteter er udført efter de afsluttende regnemaskinekursler, hvorfor benyttelse af korrektionsleddene (ligningerne (5.137-139)) ikke er afprøvet. En sådan afprøvning ville være ønskelig.

Set med en bygningsingeniørs øjne, bør en beregningsmetode kunne bruges på legemer med hjørner, og da erfaringerne fra det harmoniske tilfælde viste, at man ville få dårlige resultater, hvis man ikke tog hensyn til spændingssingulariteter, er der ikke foretaget beregninger af områder med huller. Behandlingen i kap. 5.4 af singulariteter gør det muligt at tage hensyn til spændingssingulariteterne, der f.eks. ved spændingsfri rand giver anledning til uendelig store spændinger, hvis hjørnevinklen er større end  $180^\circ$ .

En beregning af områder med huller vil derfor være ønskelig. Det samme gælder en dybere teoretisk undersøgelse af de partikulære spændingstilstande ved hjørner og en behandling af hjørner med krumme sider.

En undersøgelse af metodernes brugbarhed på plader burde også foretages.

### 5.6 Konklusion.

Problemkomplekset ved den biharmoniske ligning er så stort, at det har været umuligt at behandle det hele. Derfor er afhandlingen koncentreret om visse specielle problemer i dette kompleks.

De foretagne undersøgelser tyder på, at man, hvis tæthedskurven er identisk med randkurven, bør tilstræbe en bedre tilnærmelse af tæthedsfunktionen, end der er forsøgt i dette arbejde. Visse korrektionsled ved hjørner kan evt. komme på tale. At have tæthedskurven liggende udenfor randen viser sig at give udmærkede resultater. Der skal gøres opmærksom på, at der udelukkende er brugt enkelprecision, hvilket vil sige, at beregningerne er udført med 6 betydende cifre. Dette er ikke meget, da ligningssystemerne tenderer mod at blive singulære. Der mangler mange undersøgelser, inden mulighederne af den anbefalede metode kan siges at være fuldstændigt udforsket. Tiden tillader desværre ikke forfatteren at fortsætte disse undersøgelser.

## 6. Sammenfattende konklusion.

For både Laplace's ligning og den biharmoniske ligning gælder det, at der er opnået bedre resultater, hvor tæthedskurven ligger uden for randen end på randen. Da programmeringsarbejdet er lettere i det første tilfælde, og da det også i dette tilfælde er simpelt at afprøve resultaternes kvalitet ved udregning af randværdier i mellempunkter, må det på nuværende udviklingstrin tilrådes, at man benytter 'den anbefalede metode'. Resultaterne, der er opnået af forfatteren ved andre metoder, har været dårlige - dog med undtagelse af forsøgene med Jaswon og Ponter's metode [J-1] ved fri vridning. Det må være nødvendigt at tage hensyn til singulariteter.

Hovedparten af regnemaskinearbejdet er kørt på en IBM-360 på Danmarks tekniske Højskole. Der er benyttet enkelprecision og sprogene algol W og fortran IV.

## Resuméer.

### Dansk.

I afhandlingen er integralligningsmetoder søgt anvendt ved løsning af Laplace's ligning og den biharmoniske ligning.

Det gennemgås, hvorledes beregning af fri vridning og bøjning med forskydning af prismatiske, elastiske legemer og beregning af membrankræfter i elliptiske paraboloideskaller fører til Laplace's ligning. Beregning af membrankræfter i elliptiske paraboloideskaller får den fyldigste behandling med forslag til partikulære systemer til overførsel af resulterende vandrette kræfter på huller, samt angivelse af spændingsfunktionerne svarende til påvirkning med koncentrerede momenter og enkeltkræfter på ovennævnte skaller.

Forsøg med eksisterende numeriske metoder til løsning af de styrende integralligninger omtales. Derefter udvikles en ny numerisk metode, der fører til et system af lineære ligninger, for hvilket antallet af ubekendte i almindelighed er forskelligt fra antallet af ligninger. Det vises, hvorledes løsningen bestemmes ud fra dette system af ligninger. En behandling af singulariteter i den harmoniske funktion ved hjørner gør det muligt at beregne sådanne singulariteter. F. eks. angives spændingssingulariteten ved et retvinklet hjørne i en elliptisk paraboloideskal.

Under behandlingen af den biharmoniske ligning omtales plane elastostatistiske problemer og bøjning af elastiske plader. Også her omtales beregninger udført på traditionel måde, og der opstilles en ny beregningsmetode af lignende type som den, der blev omtalt i forbindelse med Laplace's ligning. Der foretages også her en undersøgelse af forholdene ved hjørner.

Summary.

In the present thesis integral equation methods are used in order to solve the Laplace equation and the biharmonic equation.

It is shown how the calculation of the Saint Venant torsion problem, the calculation of prismatic elastic bodies subjected to bending with shear, and the calculation of membrane forces in elliptic paraboloid shells leads to the Laplace equation.

The most thorough treatment is given to the calculation of membrane forces in elliptic paraboloid shells, including proposals of particular systems corresponding to the transfer of resulting horizontal forces at holes as well as the statement of stress functions corresponding to the action of concentrated moments and forces upon the above mentioned shells.

Tests with existing numerical methods for the solution of the governing integral equations are reported. A new numerical method is also proposed. This method results in a system of linear equations in which the number of unknowns is generally different from the number of equations. It is shown how the solution is determined from this system of equations. An investigation of the singularities of the harmonic function at corners makes it possible to calculate such singularities. As an example, the stress singularity at rectangular corners of an elliptic paraboloid shell is determined.

In the treatment of the biharmonic equation plane elastostatic problems and bending of elastic plates are mentioned.

Existing methods for the numerical solution of the governing integral equations are considered. A new numerical method of the same type as the above method for the Laplace equation is also developed. Here too the conditions at corners (i.e. the singularities of the biharmonic function at these points) are examined.

Litteratur.

- [A-1] Andersen, A.F. - Bohr, H. - Petersen, R.: 'Matematisk analyse IV'. Jul. Gjellerups Forlag - København - 1947.
- [B-1] Babuška, I. - Rektorys, K. - Vycichlo, F.: 'Mathematische elastizitätstheorie der ebenen probleme'. Akademie Verlag - Berlin - 1960.
- [B-2] Barés, R.: 'Berechnungstabeln für platten und wandscheiben'. Bauverlag G m b.H. - Wiesbaden/Berlin - 1971.
- [C-1] Christiansen, S.: 'Numerisk bestemmelse af elastostatiske spændinger i en skive med huller ved brug af integralligninger'. Report nr. 3 - Laboratory of applied mathematical physics - The Technical University of Denmark - 1970.
- [F-1] Flügge, W.: 'Stresses in shells'. Springer Verlag - Berlin/Heidelberg/New York - 1967.
- [F-2] Fox, L.: 'An introduction to numerical linear algebra'. Clarendon Press - Oxford - 1967.
- [F-3] Frank, P. - v.Mises, R.: 'Die differential - und integralgleichungen I'. Mary S. Rosenberg - New York - 1943.
- [F-4] Fröberg, C.E.: 'Introduction to numerical analysis'. Addison - Wesley Publishing co. inc. - London - 1965.
- [G-1] Gravesen, S.: 'Plane elasticitetsteoretiske problemer'. Afdelingen for Bærende Konstruktioner. F.36 - 1972.
- [J-1] Jaswon, M.A. - Ponter, A.R.: 'An integral solution of the torsion problem'. Royal Society of London. Proceedings Serie A. nr. 273 pp. 237-246 - 1963.
- [J-2] Jaswon, M.A.: 'Integral equation methods in potential theory I'. Royal Society of London. Proceedings Serie A. nr. 275 pp. 23-32 - 1963.
- [J-3] Jaswon, M.A. - Maiti, M. - Symm, G.T.: 'Numerical biharmonic analysis and some applications'. Int. j. of solids and structures. Vol. 3 pp. 309-322 - 1967.

- [J-4] Jaswon, M.A. - Maiti M.: 'An integral equation formulation of plate bending problems'. J. of engineering mathematics. Vol. 2 nr. 1 pp. 83-93 - 1968.
- [J-5] Johansen, K.W.: 'Bøjningsfri spændingstilstande i skaller'. Bygningsstatistiske meddelelser. Vol. 9 pp. 61-84 - 1937.
- [K-1] Kandler, P.: 'Numerische behandlung des Saint Venant torsionsproblems bei beliebigen querschnittsbereichen mit hilfe von integralgleichungen'. Der Deutschen Akademie der Wissenschaften zur Berlin. Mitteilungen. Bd. 9 hft. 9/10 pp. 190-199 - 1967.
- [K-2] Kantarovich, L.V. - Krylov, V.I.: 'Approximate methods of higher analysis'. P. Noordhoff Ltd. - Groningen - 1958.
- [L-1] Laboratoriet for anvendt matematisk fysik: 'Integralfremstilling af felter og deres anvendelse'. I.F.R. noter - november 1968.
- [L-2] Lo, C.C. - Niedenfuhr, F.W.: 'Singular integral equations for torsion'. AMSC. Vol. 96 nr. EM4 pp. 535-542 - 1970.
- [L-3] Lovitt, W.V.: 'Linear integral equations'. Dover Publications inc. - New York - 1950.
- [M-1] Massonet, C.: 'Resolution graphomécanique des problèmes généraux de l'élasticité plané'. Bull. CERES. Liège Vol. IV nr. 3 - 1949.
- [M-2] Massonet, C.E.: 'Numerical use of integral procedures'. Cap. 10 i Zienkiewicz, O.C. - Holister, G.S.: 'Stress analysis'. John Wiley & Sons ltd. - 1965.
- [M-3] Miche: Verhandlungen des II int. kongresses f. techn. mechanik. pp. 126-130 - Zürich - 1926.
- [M-4] Mikhlin, S.G.: 'Integral equations'. Pergamon Press - London - 1964.
- [M-5] Muskhelishvili, N.I.: 'Some basic problems of the mathematical theory of elasticity'. P. Noordhoff ltd. - Groningen - 1953.

- [M-6] Møllmann, H.: 'A study in the theory of suspension structures'. Akademisk Forlag - København - 1965.
- [O-1] Oliveira, E.R.A.: 'Plane stress analysis by a general integral method'. AMSC. Vol. 94 nr. EM 1 pp. 79-101 - 1968.
- [R-1] Rim, K. - Henry, A.S.: 'Improvement of an integral equation method in plane elasticity through modification of source density representation'. N.A.S.A. Contractor Report CR - 1273 - 1969.
- [R-2] Rizzo, F.J.: 'An integral equation approach to boundary value problems of classical elastostatics'. Q. appl. Math. Vol. XXV, nr. 1 - 1967.
- [S-1] Segedin, C.M. & Bricshell, G.A.: 'Integral equation method for a corner plate'. AMSC. Vol. 94 nr. ST 1, pp. 41-52 - 1968.
- [S-2] Sokolnikoff, I.S.: 'Mathematical theory of elasticity'. Mc Graw-Hill - London - 1956.
- [S-3] Symm, G.T.: 'Integral equation methods in potential theory II'. Royal Society of London. Proceedings Serie A nr. 275 pp. 33-46 - 1963.
- [S-4] Sternberg E. & Koiter W.T.: 'The wedge under a concentrated couple: a paradox in the two dimensional theory of elasticity J. of Appl. Mechanics. pp. 575-581. - 1958
- [T-1] Timoshenko, S. & Goodier, J.N.: 'Theory of elasticity'. Mc Graw-Hill - London - 1951.
- [T-2] Timoshenko, S. & Woinowsky - Krieger, S.: 'Theory of plates and shells'. Mc Graw-Hill - London - 1959.
- [T-3] Tychonoff - Samarski, A.A.: 'Differential-gleichungen der mathematischen physik'. VEB Deutschen Verlag der Wissenschaften - 1959.
- [U-1] Uberoi, S.B.S.: 'Viscous resistance of ship and ship models'. Report nr. Hy-13. Hydro - og aerodynamisk Laboratorium - Lyngby - Danmark - 1969.
- [V-1] Villadsen, J.: 'Nogle moderne matematiske metoder II'. Polyteknisk Forlag - København - 1967.



- [W-1] Weinel E.: 'Die integral gleichungen des ebenen spannungszustande und der plattentheorie'. Zeitschrift für angewandte mathematik und mechanik. Bd. 11 hft. 5 pp. 349-360 - 1931.
- [W-2] Williams, M.L.: 'Stress singularities resulting from various boundary conditions in angular corners of plates in extension'. J. of appl. Mechanics. Vol. 19 pp 526-528 - dec. 1952.
- [W-3] Williams, M.L.: 'Surface stress singularities resulting from various boundary condition in angular corners of plates under bending'. Proceedings of the first U.S. National Congress of Applied Mechanics - Chicago Illinois - 1951.
- [W-4] Windisch, E.: 'Eine numerische methode zur lösung des torsionsproblems'. Acta Mechanica. Vol. 4 pp. 190-199 - 1967.
- [Y-1] Yosida: 'Linear integral equations'. Interscience Publishers inc. - New York - 1960.

Structural Research Laboratory  
Technical University of Copenhagen, Denmark

REPORTS

- |       |   |                     |
|-------|---|---------------------|
| R 1.  | Askegaard, Vagn and P. Thoft-Christensen: Spændingsoptiske lag og tøjningsmålere. 1967.                                 | Out of print        |
| R 2.  | Møllmann, H.: The Principle of Virtual Work for Continuous Systems Derived by a Direct Method. 1968.                    |                     |
| R 3.  | Askegaard, Vagn: Production and Application of Model Materials with Desired Physical Constants. 1968.                   |                     |
| R 4.  | Møllmann, H.: The Analysis of Shallow Cables. 1968.   |                     |
| R 5.  | Dyrbye, Claës: Damped Vibrations of Slender Beams. 1968.  | Out of print        |
| R 6.  | Møllmann, H.: Analysis of Plane Prestressed Cable Structures. 1969.   |                     |
| R 7.  | Nielsen, Leif Otto: Beregning af bjælker og rammer dynamisk påvirket ud over det elastiske område. 1968.                | Out of print        |
| R 8.  | Bræstrup, Mikael W.: On the Theory of Plastic Plates. 1969.   | Out of print        |
| R 9.  | Nielsen, Leif Otto: Uniqueness Problems and Minimum Principles in the Dynamic Theory of Plasticity. 1969                | Out of print        |
| R 10. | Byskov, Esben: Two Nearly Polygonal Holes. Mathematical Crack Problems. 1969.   |                     |
| R 11. | Bræstrup, Mikael W.: The Cosserat Surface and Shell Theory. 1970.   | Out of print        |
| R 12. | Askegaard, Vagn: Anvendelse af modelanalyse. 1970.  |                     |
| R 13. | Solnes, Julius: The Spectral Character of Earthquake Motions. 1970.   | Out of print        |
| R 14. | Bræstrup, Mikael W.: Yield Lines in Discs, Plates and Shells. 1970.   | Out of print        |
| R 15. | Møllmann, J.: Beregning af hængekonstruktioner ved hjælp af deformationsmetoden. 1970.                                  | Out of print        |
| R 16. | Byskov, Esben: The Calculation of Stress Intensity Factors Using the Finite Element Method with Cracked Elements. 1970. |                     |
| R 17. | Askegaard, V.: Grundlaget for adhæsion. 1970.   |                     |
| R 18. | Summaries of Lecture Notes on Experimental Stress Analysis. 1970.   | Out of print        |
| R 19. | Sørensen, Hans Christian: Forskydning i jernbetonbjælker. 1970.   |                     |
| R 20. | Sørensen, Hans Christian: Forskydningsforsøg med 12 jernbetonbjælker med T-tværsnit. 1971.                              |                     |
| R 21. | Møllmann, H.: Analysis of Hanging Roofs Using the Displacement Method. 1971.  | Out of print        |
| R 22. | Haurbæk, Poul E.: Dæmpede svingninger i spændbetonbjælker. Svingningsforsøg med simpelt understøttede bjælker.          | Publication pending |

II

- R 23. Bræstrup, M.W.: Yield-line Theory and Limit Analysis of Plates and Slabs. 1971.
- R 24. Dyrbye, Claës: Pendulum Vibrations. 1971. Out of print
- R 25. Møllmann, H.: Analytical Solution for a Cable Net over a Rectangular Plan. 1971.
- R 26. Nielsen, J.: Silotryk. 1972.
- R 27. Askegaard, V., M. Bergholdt and J. Nielsen: Problems in connection with pressure cell measurements in silos. 1972.
- R 28. Ramirez, H. Daniel: Buckling of plates by the Ritz methods using piecewise-defined functions. 1972.
- R 29. Thomsen, Kjeld & Henning Agerskov: Behaviour of butt plate joints in rolled beams assembled with prestressed high tensile bolts. 1972.
- R 30. Julius Solnes and Ragnar Sigbjörnsson: Structural response to stochastic wind loading. 1972.
- R 31. H.J. Larsen og H. Riberholt: Forsøg med uklassificeret konstruktionstræ. 1972.
- R 32. Vagn Askegaard: Programme and methods of teaching of experimental mechanics. 1972. Out of print
- R 33. Julius Solnes and Ole Holst: Weight optimization of framed structures under earthquake loads. 1972.
- R 34. Rostam, Steen and Esben Byskov: Cracks in Concrete Structures. A Fracture Mechanics Approach. 1973.
- R 35. Sørensen, Hans Chr.: Efficiency of Bent-up Bars as Shear Reinforcement. 1973.
- R 36. Krenk, Steen: Singulær integralformulering af nogle plane friktionsfri kontaktproblemer. 1973.
- R 37. Philipsen, Claus: An investigation of the stability of columns with thin-walled open cross-section. 1973.
- R 38. Theilgaard, Esko: Integralligningsmetoder anvendt på problemer inden for bygningsstatikken. 1973.