

AFDELINGEN FOR
BÆRENDE KONSTRUKTIONER
DANMARKS TEKNISKE HØJSKOLE



STRUCTURAL RESEARCH LABORATORY
TECHNICAL UNIVERSITY OF DENMARK

Ole Holst

BEREGNING AF PLANE RAMMEKONSTRUKTIONER
MED GEOMETRISK IKKELINEARITET

RAPPORT NR. R 41 1973

Ole Holst

Beregning af plane rammekonstruktioner med geometrisk
ikkelinearitet.



Forord

Denne rapport udgør en del af den endelige rapport "Automatisk dimensionering af plane rammekonstruktioner", der skal udarbejdes som led i betingelserne for erhvervelsen af den tekniske licentiatgrad.

Studiet er udført på Afdelingen for Bærende Konstruktioner, DTH med professor, lic. techn. Julius Solnes som faglærer og professor, dr. tech. Mogens Peter Nielsen som medfaglærer.

Under udarbejdelsen af denne rapport har jeg haft mange værdifulde samtaler med mine kolleger lektor, lic. techn. Esben Byskov og stud. lic. Leif Otto Nielsen.

For arbejde i forbindelse med mangfoldiggørelsen af denne rapport takkes især ing. ass. Benny Leisten, tekn. ass. Esther Martens og ass. Inge Sørensen.

Lyngby, oktober 1973

Ole Holst

<u>Indholdsfortegnelse</u>	Side
1 Indledning	3
2 Beskrivelse af elementet	
2.1.1 Bogstaver, indices og symboler	4
2.1.2 Koordinater og fortegn	6
2.2 Flytningsfelt	6
2.3.1 Geometriske feltbetingelser	7
2.3.2 Geometriske randbetingelser	8
2.4 Fysiske feltbetingelser	8
2.5 Statistiske felt- og randbetingelser	9
2.6 Elasticitetsligningerne for elementet og deres løsning	11
2.6.1 Tværuddøjning og momentfordeling	11
2.6.2 Aksialforlængelse, geometrisk forkortelse og normalkraft	13
2.6.3 Elasticitetsligningerne med iterationsopskrift	15
3 Anvendelse af bjælkeelementet i rammekonstruktioner	
3.1 Forskellige tilnærmede teorier	18
3.2 Eksempler, alment	20
3.2.1 Eksempel "BEP" Dimensionsløst	21
3.2.2 Eksempel "SES PR2-1" Tekniske enheder	22
3.2.3 Eksempel "BLEICH CHARNIER" Engelske enheder	24
3.2.4 Eksempel "30 ETAGER 2 FAG" S.I. enheder	25
4 Konklusion	28
5 Litteratur	30
Appendiks I Figurer til eksempler	31
Appendiks II Cauchy-kontra Piola-Kirchhoff spændinger	45
Appendiks III Initialkrumning og geometrisk forspænding	46

1 Indledning.

På basis af et Lagrangetøjningsmål for plan tøjningstilstand (2 dimensionalt) gives ved hjælp af sætningen om stationær potentiel energi en konsistent udledning af de 1 dimensionale elasticitetsligninger for et bjælkeelement med foreskrevet jævnt fordelt tværbelastning.

Ved udledningen fremkommer udover den sædvanlige bjælkesøjle-differentialligning til bestemmelse af tværudbøjning og momenter også en differentialligning til bestemmelse af aksialforlængelse og normalkræfter. Den sidstnævnte ligning løses med fuld hensyntagen til tværudbøjning og -belastning.

Til løsning af de resulterende ikkelineære elasticitetsligninger for bjælkeelementet, angives en effektiv iterationsopskrift. Elasticitetsligningerne og iterationsopskriften afprøves i et EDBprogram til beregning af plane rammekonstruktioner på 4 plane rammer spændende fra 1 etage 1 fag til 30 etager 2 fag.

Ved at medtage visse og udelade andre af de ikkelineære led i de konsistente elasticitetsligninger, kan man lave et stort antal forskellige bjælketeorier. I de 4 gennemregnede eksempler undersøges, hvilke forskelle 5 ikkelineære samt den lineære bjælket teori giver i dels flytnings- dels snitkraftfordelingen, og til slut fremsættes en beslutningstabel for valg af teori.

2 Beskrivelse af elementet

2.1.1 Bogstaver, indices og symboler.

Bogstaver

A	Tværsnitsareal
$A_1 - A_3$	Stivhedsparametre
$C_0 - C_4$	Parametre i tværudbøjningsfunktion
B_1	Stivhedsparameter
E	Elasticitetsmodul
E_{ij}	Lagrangetøjningsmål
\bar{F}, \bar{F}_i	Foreskreven knudebelastning
I	Tværsnitsinertimoment
M, M_A, M_B	Moment
N, N_A, N_B	Normalkraft
$R_1 - R_3$	Initial knudebelastning
T_{rs}	Cauchy spænding
\hat{T}_{ij}	Piola-Kirchhoff spænding
W_{indre}	Tøjningsenergi for elementet = indre arbejde
W_s	Tøjningsenergi pr. udeformeret volumenenhed
W_{ydre}	Ydre arbejde
d	Divisor i stivhedsparametre
ds	Differentielt arealelement
$f(a, b, \dots)$	Funktion af a, b, ...
i	Inertiradius = I/A
kl	Stivhedsparameter
$k_1 - k_5$	Stivhedsparametre
l	Elementlængde
\bar{p}	Foreskreven jævnt fordelt tværbelastning
\bar{p}_d	Dimensionsløs $\bar{p} = \bar{p}l^2/\mu$
u_j	Flytningsfunktion
u_{j0}	Værdien af u_j på x_1 -aksen
v, v_i	Knudelflytning
v_A, v_B, v_F, v_N	Deformationsparametre
x_j	Referencekoordinater
z_j	Koordinater efter deformation

δ_G	Geometrisk aksialforkortelse
δ_N	Normalkraftbetinget aksialforlængelse
ϵ	Længdetøjning
κ	Krumningstøjning
μ	Bøjningsstivhedsparameter = EI/l
π_p	Potentiel energi for elementet
φ	Rotation af bjælkeakse i radianer

Nedre indices

A	Vedrørende punkt A, $x_1 = 0$
B	Vedrørende punkt B, $x_1 = l$

Øvre indeks

(n)	Værdi i iteration nummer n
-------	----------------------------

Symboler

δ	Variation
δ_{ij}	Kroeneckers delta
$\bar{\quad}$	Foreskreven værdi
'	Differentiation m.h.t. x_1
IV	Fjerde afledede m.h.t. x_1
\sim	Vektor

2.1.2 Koordinater og fortegn.

Beskrivelsen holdes i materielle reference koordinater x_j . Positive retninger for foreskrevne knudekræfter \bar{F}_i , knudeflytninger v_i , flytningsfunktioner u_j og jævnt fordelt tværbelastning \bar{p} , defineres alle i forhold til referencekonfigurationen, som er vist på fig. 1.

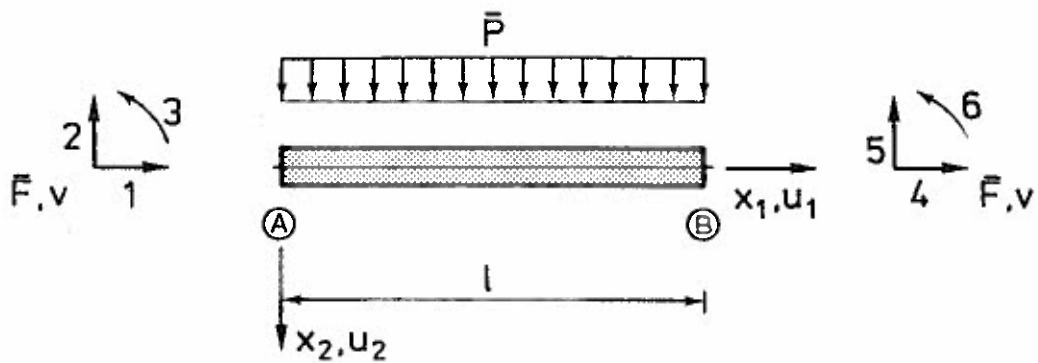


Fig. 1.

Bjælkeelementets egenskaber er uafhængige af x_1 , og tværsnittet er enkeltsymmetrisk om papirets plan.

2.2 Flytningsfelt.

Som grundlag for flytningsfeltet anvendes Bernoulli-Navier antagelsen, nemlig: normaler forbliver normaler af uforandret længde efter en deformation.

Det eksakte udtryk for dette plane flytningsfelt er

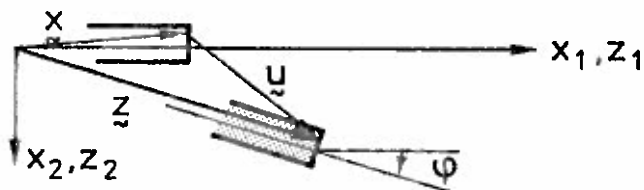


Fig. 2.

$$\tilde{z} = \tilde{x} + \tilde{y}$$

$$\begin{aligned} \text{hvor } u_1 &= u_{10} - \sin \varphi x_2 \\ u_2 &= u_{20} - (1 - \cos \varphi)x_2 \\ \tan \varphi &= u'_{20} / (1 + u'_{10}) \end{aligned} \quad (1)$$

$$\text{og } u_{10} = u_1(x_1, x_2 = 0), \quad u_{20} = u_2(x_1, x_2 = 0), \quad ' = \frac{d}{dx_1}$$

For at forenkle dette flytningsfelt antages yderligere, at vinkeldrejningerne φ er så små, at $\varphi \approx \tan \varphi \approx \sin \varphi$ og $\cos \varphi \approx 1$.

Antages endvidere, at $u'_{10} \ll 1$, d.v.s., at elementet ikke har elastikagtig opførsel, ledes man til følgende definition af et forenklet flytningsfelt

$$\begin{aligned} u_1 &= u_{10} - u'_{20} x_2 \\ u_2 &= u_{20} \end{aligned} \quad (2)$$

2.3.1 Geometriske feltbetingelser.

Da udledningen er baseret på referencekoordinater x_i , anvendes som tøjningsmål Lagrangetøjningerne E_{ij} for endelige flytninger givet ved

$$E_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \frac{\partial u_k}{\partial x_j} \right) \quad i, j, k = 1, 2$$

Indsættes det eksakte flytningsfelt (1) fås

$E_{12} = E_{21} = E_{22} = 0$, $E_{11} \neq 0$. Antagelsen om at normaler forbliver normaler af samme længde giver som forventet et tøjningsfelt, der udelukkende består af længdeændringer af fibre med oprindelig orientering i x_1 aksens retning.

Udnyttes det tilnærmede flytningsfelt (2) samt en af de antagelser, der førte til (2), nemlig $u'_{10} \ll 1$ fås følgende udtryk for Lagrangetøjningen E_{11}

$$\begin{aligned} E_{11} &= \epsilon - \kappa x_2 \\ \epsilon &= u'_{10} + \frac{1}{2}(u'_{20})^2 \\ \kappa &= u''_{20} \end{aligned} \quad (3)$$

Ligningerne (3) udgør de geometriske feltbetingelser.

Det bemærkes, at tøjningsmålene ϵ og κ kun er funktioner af x_1 , d.v.s. 1 dimensionale. I det følgende anvendes derfor for nemheds skyld notationen $u_1 = u_{10}(x_1)$ og $u_2 = u_{20}(x_1)$.

2.3.2 Geometriske randbetingelser.

De geometriske randbetingelser defineres ved

$$\begin{aligned} v_1 &= u_1(0) & v_4 &= u_1(1) \\ v_2 &= -u_2(0) & v_5 &= -u_2(1) \\ v_3 &= -u_2'(0) & v_6 &= -u_2'(1) \end{aligned} \quad (4)$$

Visse lineært uafhængige linearkombinationer af knudedeflytningerne v_i dukker hyppigt op i udledningen, hvorfor de defineres her under navnet deformationsparametre

$$\begin{aligned} v_F &= (v_5 - v_2)/1 \\ v_A &= -v_3 + (v_5 - v_2)/1 \\ v_B &= v_6 - (v_5 - v_2)/1 \\ v_N &= v_4 - v_1 \end{aligned} \quad (5)$$

I den sædvanlige tekniske bjælketeori er deformationstilstanden fuldt fastlagt ved angivelse af v_A , v_B og v_N . I den her udviklede teori kræves desuden kendskab til v_F samt den senere udledte parameter k_1 til fastlæggelse af deformationstilstanden.

2.4 Fysiske feltbetingelser.

Elementet antages hyperelastisk med en tøjningsenergifunktion pr. udeformeret volumenenhed, W_S defineret ved

$$W_S = \frac{1}{2}E E_{11}^2 \quad (6)$$

hvor E er elasticitetskoefficienten for enakset påvirkning.

Den til Lagrangetøjningen E_{ij} konjugerede Piola-Kirchoff spænding \tilde{T}_{ij} , får kun en komponent $\neq 0$ givet ved (Malvern [3] p. 283):

$$\tilde{T}_{11} = \frac{\delta W_S}{\delta E_{11}} = E \cdot \epsilon_{11} \quad (7)$$

Lad A være tværsnitsarealet og dS et differentielt arealelement. Tværsnittets inertimoment I og x_2 aksens nulpunkt defineres da ved

$$0 = \int_0^A x_2 \, dS \quad (8)$$

og

$$I = \int_0^A (x_2)^2 dS \quad (9)$$

Den 2-dimensionale fysiske feltbetingelse (7) kan herefter bekvemt formuleres 1-dimensionalt ved indførelse af snitkræfterne M og N (se fig. 3).

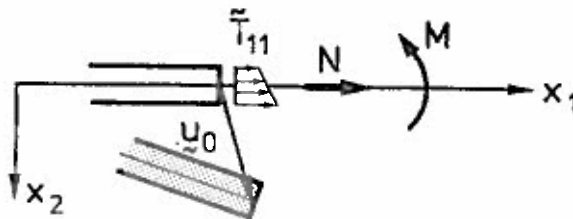


Fig. 3.

De geometriske feltbetingelser (3) samt definitionerne (8) og (9) udnyttes, og vi får

$$M = \int_0^A \tilde{T}_{11} x_2 \, dS = \int_0^A E(\epsilon - \kappa x_2) x_2 \, dS = -EI \kappa \quad (10)$$

og

$$N = \int_0^A \tilde{T}_{11} \, dS = \int_0^A D(\epsilon - \kappa x_2) \, dS = EA \epsilon \quad (11)$$

2.5 Statiske felt- og randbetingelser.

Ved hjælp af sætningen om stationær potentiel energi fås de statiske felt- og randbetingelser enkelt, systematisk og konsistent med de geometriske og fysiske betingelser.

"Hvis elementets potentielle energi $\pi_p = W_{\text{indre}} - W_{\text{ydre}}$, er opstillet under overholdelse af de geometriske og fysiske betingelser, fås de statiske betingelser ved at kræve variationen $\delta\pi_p = 0$ for et varierende flytnings-tøjningsfelt, der overholder de geometriske betingelser".

Vi må altså kræve

$$\delta\pi_p = \delta W_{\text{indre}} - \delta W_{\text{ydre}} = 0 \quad (12)$$

hvor (jfr. Malvern [3], p. 248)

$$\delta W_{\text{indre}} = \int_0^1 \int_0^A \tilde{T}_{11} \cdot \delta E_{11} \, dS \, dx_1 \quad (13)$$

og

$$\delta W_{\text{ydre}} = \int_0^1 \bar{p} \delta u_2 \, dx_1 + \bar{F}_i \delta v_i \quad i = 1, 6 \quad (14)$$

En variation δE_{11} , der overholder de geometriske feltbetingelser, fås fra (3) som

$$\delta E_{11} = \delta u_1' + u_2' \delta u_2' - \delta u_2'' \cdot x_2 \quad (15)$$

Ved hjælp af de fysiske feltbetingelser (10) (11) og delvis integration fås

$$\begin{aligned} \delta W_{\text{indre}} &= \int_0^1 \int_0^A \tilde{T}_{11} (\delta u_1' + u_2' \delta u_2' - \delta u_2'' x_2) \, dS \, dx_1 \\ &= \int_0^1 (N(\delta u_1' + u_2' \delta u_2') - M \delta u_2'') \, dx_1 \\ &= [N \delta u_1]_0^1 - [M \delta u_2']_0^1 - \int_0^1 (N' \delta u_1 - (M' + N u_2') \delta u_2') \, dx_1 \end{aligned}$$

Efter endnu en delvis integration fås sluttelig

$$\begin{aligned} \delta \pi_p &= [N \delta u_1]_0^1 - [M \delta u_2']_0^1 + [(M' + N u_2') \delta u_2]_0^1 \\ &\quad - \int_0^1 N' \delta u_1 \, dx_1 - \int_0^1 (M'' + (N u_2')' + \bar{p}) \delta u_2 \, dx_1 - \bar{F}_i \delta v_i = 0 \\ &\quad i = 1, 6 \quad (16) \end{aligned}$$

Indsættes i ovenstående ligning først et homogent δu_1 felt og derefter et homogent δu_2 felt fås de statiske feltbetingelser

$$\left. \begin{aligned} N' &= 0 \\ M'' + (N u_2')' + \bar{p} &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \quad (17)$$

$$M'' + Nu_2'' + \bar{p} = 0 \quad (18)$$

Herved er de to integraler i (16) altid 0. Indsættes i (16) derefter successivt for $i = 1, 6$ ($\delta v_i = \delta_{ij}$, $j = 1, 6$) fås ved anvendelse af en tilladelig variation i de geometriske randbetingelser, som fremkommer trivielt af (4), de statiske randbetingelser

$$\begin{aligned} \bar{F}_1 &= -N & \bar{F}_4 &= N \\ \bar{F}_2 &= M'_A - Nv_3 & \bar{F}_5 &= -M'_B + Nv_6 \\ \bar{F}_3 &= -M_A & \bar{F}_6 &= M_B \end{aligned} \quad (19)$$

hvor feltbetingelsen (17) allerede er indsat, idet den giver $N = N_A = N_B = \text{konstant}$.

2.6 Elasticitetsligningerne for elementet og deres løsning.

Elasticitetsligningerne for elementet fås fra de statiske randbetingelser (19) ved at udtrykke M_A , M_B , M'_A , M'_B og N som funktioner af v_i og \bar{p} .

Dette gøres ved at løse de statiske feltbetingelser (17) og (18) under anvendelse af de geometriske felt- og randbetingelser (3) og (4) samt de fysiske feltbetingelser (10) og (11).

Da de følgende udledninger er helt 1-dimensionale defineres herefter for nemhed : $x = x_1$

2.6.1 Tværudbøjning og momentfordeling.

Først løses feltbetingelsen (19), idet (10) og (3) indsættes, hvilket giver den velkendte bjælke-søjledifferentialligning

$$EIu_2^{IV} - Nu_2'' - \bar{p} = 0$$

eller

$$u_2^{IV} + k^2 u_2'' = \frac{\bar{p}}{EI} \quad , \quad k^2 = -\frac{N}{EI} \quad (20)$$

Stedvanligvis løses denne ligning under forudsætning af kendskab til værdien af N . Når N ikke a priori er kendt, bliver løsningen af elasticitetsligningerne iterativ.

Som parameter, der karakteriserer graden af normalkraftindflydelse på moment og tværubøjning anvendes

$$kl = \sqrt{\frac{-N}{EI}} l \quad (21)$$

Denne parameter, der ses at være stivhedsafhængig, er dimensionsløs og antager reel eller imaginær værdi, alt efter om der er tryk eller træk i elementet.

Den fuldstændige løsning til (20) samt første og anden afledede af løsningen, ser således ud. (smlg. B. Pedersen & E. Byskov [2])

$$u_2 = C_1 \sin kx/k + C_2 l \cos kx + C_3 x + C_4 l + \frac{1}{2}C_0 x^2/l \quad (22)$$

$$u_2' = C_1 \cos kx - C_2 kl \sin kx + C_3 + C_0 x/l \quad (23)$$

$$u_2'' = -(C_1 kl \sin kx + C_2 (kl)^2 \cos kx - C_0)/l \quad (24)$$

hvor

$$C_0 = \bar{p}l/(k^2 EI) = -\bar{p}l/N = \bar{p}_d/(kl)^2 \quad (25)$$

Der er ved opskrivningen af løsningen her sørget for, at de indgående koefficienter $C_0 - C_4$ er dimensionsløse og reelle for såvel reelle som imaginære værdier af kl .

For $kl = 0$ er differentialligningen (20) lineær og løsningen skifter type til et 3. gradspolynomium i x , som ikke behandles nærmere her. Løsningen (22) er singularær i $kl = 0$, hvilket giver numeriske problemer ved anvendelsen af (22) for $|kl|$ tæt på 0.

Løsning af randværdiproblemet for (20) giver følgende udtryk for koefficienterne C_1 , C_2 og C_3 . De geometriske randbetingelser (4) og (5) er udnyttet.

$$\begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-B_1/(kl)^2 & B_1/(kl)^2 & 0 \\ A_1/(kl)^2 & A_2/(kl)^2 & 0 \\ B_1/(kl)^2 & -B_1/(kl)^2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_A \\ v_B \\ v_F \end{bmatrix} + \frac{1}{2}C_0 \begin{bmatrix} 1 \\ (A_1+A_2)/(kl)^2 \\ -1 \end{bmatrix} \quad (26)$$

hvor

$$\begin{aligned} A_1 &= (kl \sin kl - (kl)^2 \cos kl)/d \\ A_2 &= (kl \sin kl - (kl)^2)/d \\ B_1 &= A_1 - A_2 \\ d &= 2 - 2 \cos kl - kl \sin kl \end{aligned} \quad (27)$$

Til analysebrug er C_4 unødvendig, men for fuldstændighedens skyld findes: $C_4 = -v_2/1 - C_2$.

Ved anvendelse af de fysiske og geometriske feltbetingelser (10) og (3) samt ovenstående udtryk for u_2'' kan vi opskrive udtrykkene for M og M' .

$$M = (C_1 kl \sin kx + C_2(kl)^2 \cos kx - C_0) \cdot \mu \quad (28)$$

$$M' = (C_1(kl)^2 \cos kx - C_2(kl)^3 \sin kx) \cdot \mu/1 \quad (29)$$

hvor

$$\mu = EI/1 \quad (30)$$

Indsættelse af $x = 0$ og $x = 1$ samt udtrykkene for C_0 , C_1 og C_2 giver efter reduktion

$$\begin{bmatrix} M_A \\ M_B \end{bmatrix} = \mu \begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ A_2 & A_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_A \\ v_B \end{bmatrix} - \bar{p}l^2 \begin{bmatrix} A_3 \\ A_3 \end{bmatrix} \quad (31)$$

hvor

$$A_3 = (2 - (A_1 + A_2))/(2(kl)^2) \quad (32)$$

og

$$\begin{bmatrix} M'_A \\ -M'_B \end{bmatrix} = \frac{\mu}{1} \begin{bmatrix} (kl)^2 - B_1 & B_1 \\ B_1 & (kl)^2 - B_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_A \\ v_B \end{bmatrix} + \frac{1}{2} \bar{p}l \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (33)$$

2.6.2 Aksialforlængelse, geometrisk forkortelse og normalkraft.

Den anden statiske feltbetingelse, $N' = 0$, (17), giver ved anvendelse af de geometriske - og fysiske feltbetingelser (3) og (11)

$$\frac{N}{EA} = \epsilon = u_1' + \frac{1}{2}(u_2')^2 = \text{konstant} \quad (34)$$

Denne ligning giver ved integration m.h.t. x fra 0 til 1 og indsættelse af de geometriske randbetingelser (3) og (4)

$$\frac{Nl}{EA} = \delta_N = v_N + \delta_G \quad (35)$$

hvor

$$\delta_N = \int_0^1 \epsilon \, dx \quad (36)$$

$$v_N = \int_0^1 u_1' dx = v_4 - v_1 \quad (37)$$

$$\delta_G = \frac{1}{2} \int_0^1 (u_2')^2 dx \quad (38)$$

Af ligning (35) ses, at den totale aksialforlængelse, $v_N = \delta_N - \delta_G$ er differencen mellem den lineære normalkraftbetingede aksialforlængelse δ_N og den ikke-lineære, geometriske aksialforkortelse δ_G . Det bemærkes, at δ_G ofte negligeres i geometrisk ikke-lineære bjælketeorier, (Przemiencky [1], B. Pedersen & E. Byskov [2], Argyris [6]). For at få en konsistent teori, må man dog medtage δ_G , som i øvrigt ved slanke konstruktioner kan blive væsentligt større end δ_N .

Ved udregningen af den konsistente geometriske forkortelse anvendes u_2' bestemt ud fra den ikke-lineære bjælkedifferentralligning (20). Gøres dette, fås følgende, lidt voldsomme, udtryk

$$\begin{aligned} \delta_G = & \frac{1}{2} l \left[\frac{1}{3} C_0^2 + C_3^2 + C_0 C_3 + \frac{1}{2} (C_1^2 + C_2^2 (kl)^2) + \right. \\ & \left. \frac{1}{2} (C_1^2 - C_2^2 (kl)^2) \cos kl \sin kl / kl - 2C_0 (C_1 (1 - B_1) / (kl)^2 \right. \\ & \left. + C_2 A_1) d / (kl)^2 - C_1 C_2 \sin^2 kl + 2C_3 (C_1 \sin kl / kl + C_2 (\cos kl - 1)) \right] \\ = & 1 (v_F^2 / 2 + f(v_A, v_B, \bar{p}_d, kl)) \quad (39) \end{aligned}$$

En tilnærmet værdi af δ_G fås ved at anvende u_2' bestemt ud fra den lineære bjælkedifferentralligning, der fremkommer af (20) ved at sætte $kl = 0$. Herved fås det simple udtryk:

$$\begin{aligned} \delta_G = & 1 (v_F^2 / 2 + (v_A^2 + v_B^2) / 15 + v_A v_B / 30 \\ & + \bar{p}_d (\bar{p}_d + 84(v_A + v_B)) / 60480) \quad (40) \end{aligned}$$

Ligning (40) er en god tilnærmelse til den konsistente geometriske forkortelse, når kl er lille.

Ønsker man at tage hensyn til den geometriske forkortelse, bør det ske ved hjælp af et af ovennævnte to udtryk og ikke ved så grov en tilnærmelse, som f.eks. hos Johnson & Brotton [7]

$$\delta_G = 1 v_F^2 / 2 \quad (41)$$

svarende til at regne $u_2' = \text{konstant} = v_F$. Derved tages kun hensyn til bidraget fra fastlegemedregningen, medens krumningsbidraget negligeres. I rammer med ikke fastholdt knudepunktsfigur er disse to bidrag af samme størrelsesorden. I rammer med fastholdt knudepunktsfigur er krumningsbidraget som regel betydeligt større end bidraget fra fastlegemedregningen.

2.6.3 Elasticitetsligningerne med iterationsopskrift.

Vi har nu fået bestemt M_A , M_B , M_A' , M_B' og N som funktioner af v_i og \bar{p} og kan derfor opstille elasticitetsligningerne ved indsættelse i de statiske randbetingelser (19).

Elasticitetsligningerne er da, idet øvre indeks i parentes hentyder til iterationsopskriften:

$$\begin{bmatrix} \bar{F}_1 \\ \bar{F}_2 \\ \bar{F}_3 \\ \bar{F}_4 \\ \bar{F}_5 \\ \bar{F}_6 \end{bmatrix}^{(n+1)} = \begin{bmatrix} k_1 & 0 & 0 & -k_1 & 0 & 0 \\ & k_2 & k_4 & 0 & -k_2 & k_4 \\ & & k_3 & 0 & -k_4 & k_5 \\ \text{symmetrisk} & & & k_1 & 0 & 0 \\ & & & & k_2 & -k_4 \\ & & & & & k_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \\ v_6 \end{bmatrix}^{(n)} + \begin{bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \\ -R_1 \\ R_2 \\ -R_3 \end{bmatrix}^{(n)} \quad (42)$$

$$\begin{aligned} \text{hvor } k_1 &= \frac{EA}{l} & R_1 &= -\frac{EA}{l} \delta_G \\ k_2 &= \frac{\mu}{l^2} 2 B_1 + \frac{N}{l} & R_2 &= \frac{1}{2} \bar{p} l \\ k_3 &= \mu A_1 & R_3 &= \bar{p} l^2 \cdot A_3 \\ k_4 &= \frac{\mu}{l} B_1 \\ k_5 &= -\mu A_2 \end{aligned} \quad (43)$$

I ligning (43) skal både matricen, kaldet stivhedsmatricen og vektoren med R_i , kaldet initiallastvektoren, som antydnet, opstilles på basis af $\delta_G^{(n)}$, $kl^{(n)}$, $N^{(n)}$ og $\delta_N^{(n)}$.

Til bestemmelse af $\delta_G^{(n)}$ haves principielt

$$\delta_G^{(n)} = 1 \cdot f(v_F^{(n)}, v_A^{(n)}, v_B^{(n)}, kl^{(n)}, \bar{p}_d) \quad (44)$$

hvor $kl^{(n)}$ ved hjælp af (21) og (35) samt indførelse af stivhedstallet $\frac{1}{i} = 1\sqrt{\frac{I}{A}}$ kan skrives som

$$kl^{(n)} = \sqrt{\frac{-N^{(n)}}{EI}} = \frac{1}{i} \sqrt{\frac{\delta_N^{(n)}}{1}} \quad (45)$$

Til bestemmelse af $\delta_N^{(n)}$ giver ukritisk anvendelse af (35)

$$\delta_N^{(n)} = v_N^{(n)} + \delta_G^{(n)}$$

Anvendelse af denne definition for $\delta_N^{(n)}$ giver dog en ubrugelig iterationsopskrift.

Betragtes den fjerde ligning i (42), som lyder

$$\bar{F}_4^{(n+1)} = \frac{EA}{l} (v_N^{(n+1)} + \delta_G^{(n)}) = N^{(n+1)} = \frac{EA}{l} \delta_N^{(n+1)}$$

ses, at den rette iterationssammenhæng mellem v_N , δ_N og δ_G er givet ved

$$\delta_N^{(n)} = v_N^{(n)} + \delta_G^{(n-1)} \quad (46)$$

Da både kl og N jfr. ligning (45) er bestemt af δ_N , ses at (43) kan opstilles alene med kendskab til deformationerne δ_N og δ_G .

Iterationen foregår nu ved først at skønne initiale værdier for $\delta_N^{(0)}$ og $\delta_G^{(0)}$, f.eks. 0, derefter opstille og løse elasticitetsligningerne (42) samt beregne værdierne af $\delta_N^{(1)}$ og $\delta_G^{(1)}$ udfra (44), (45) og (46). Værdierne $\delta_N^{(1)}$ og $\delta_G^{(1)}$ anvendes dernæst som initialværdier ved næste opstilling og løsning af elasticitetsligningerne og så fremdeles, indtil en passende relativ overensstemmelse mellem initialværdier og beregnede værdier af δ_N og δ_G er opnået.

Denne løsningsmetode kaldes en initialdeformationsmetode med deformationsafhængig stivhedsmatrix og initiallastvektor. En beslægtet løsningsmetode blot med konstant stivhedsmatrix og alle ikke-lineære effekter samlet i initiallastvektoren findes f.eks. hos J. Connor [4] under navnet "successive substitution".

Den her angivne metode kendetegnes ved, at stivhedsmatricen skal genereres og trianguleres for hver iteration, ved lavt

iterationstal til given nøjagtighed, samt ved at instabilitet på et givet lasttrin afsløres straks af singularitet i stivhedsmatricen. Metoden med konstant stivhedsmatrix behøver kun at generere og triangulere stivhedsmatricen en gang på bekostning af dels en mere kompliceret initiallastvektor, dels betydeligt flere nødvendige iterationer, især ved store værdier af P/P_{cr} , samt et dårligt instabilitetskriterium. Instabilitet røbes kun af manglende konvergens på et givet lasttrin.

En sammenligning mellem de 2 metoder over det nødvendige antal iterationer for en given ramme er foretaget i eksemplet "BLEICH CHARNIER".

I alle de efterfølgende eksempler på beregning af rammekonstruktioner udfra de konsistente elasticitetsligninger (42) med den her angivne løsningsmetode er der itereret til 1% relativ nøjagtighed på δ_N og δ_G . Hertil kræves 2-3 iterationer ud over den initiale gennemregning. Det viser sig, at δ_N normalt konvergerer før δ_G . Hvis man helt undlader at tage hensyn til δ_G , kan konvergens derfor normalt opnås en iteration tidligere. Besparelsen i regnetid ved at anvende en tilnærmet teori i stedet for den konsistente er dog ikke stor.

3. Anvendelse af bjælkeelementet i rammekonstruktioner.

3.1 Forskellige tilnærmede teorier.

De beskrevne elasticitetsligninger for et bjælkeelement med konsistent hensyntagen til endelige flytninger samt iterationsopskrift er afprøvet i et af forfatteren udviklet EDB program, til beregning af plane lineært elastiske rammekonstruktioner.

For at kunne vurdere, hvilke forskelle i flytnings- og snitkraftfelt, der opstår ved at udelade eller tilnærme visse af de ikke-lineære led i de konsistente elasticitetsligninger, er et antal eksempler blevet gennemregnet med 5 forskellige geometrisk ikke-lineære teorier samt den geometrisk lineære teori.

Teorierne, der falder i 3 grupper, betegnes med ISTAB = 0, 1, .. 5. En beslutningstabel viser de forskellige teoriers indhold.

Gruppe	ISTAB	NQROT	NKRAFT	KORDE	NLKRUM
III	5	1	1	1	1
	4	1	1	1	0
	3	1	1	0	0
II	2	1	0	1	0
	1	1	0	0	0
I	0	0	0	0	0

Tabel 1. Teoriindhold

I ovenstående tabel betegner:

NQROT : hvis 0 så er k_2 i ligning (43) beregnet med $N = 0$, ellers med $N = N^{(n)}$.

NKRAFT: hvis 0 så er A_1, A_2, A_3 og B_1 i ligning (43) beregnet fra (27) og (32) med $kl = 0$, d.v.s. $A_1 = 4, A_2 = -2, A_3 = -\frac{1}{12}$ og $B_1 = 6$, ellers med $kl = kl^{(n)}$

NKORDE: hvis 0 så er $\delta_G = 0$ ellers $\delta_G = \delta_G^{(n)}$

NLKRUM: hvis 0 så er δ_G beregnet med $kl = 0$ d.v.s. fra ligning (40) ellers med $kl = kl^{(n)}$ d.v.s. fra ligning (39).

Lidt mere udførligt kan de 3 teorigrupper beskrives således:

Gruppe I, ISTAB = 0

Dette er den sædvanlige, geometrisk lineære bjælke-teori, her medtaget til sammenligning og kontrol.

Gruppe II, ISTAB = 1,2

ISTAB = 1 er den enklest tænkelige måde, at tage hensyn til endelige flytninger på. Der tages her hensyn til de ekstra tværkræfter, der opstår på bjælkeenderne, når elementet er normalkraftpåvirket og har en fastlegemedrejning, $v_F \neq 0$. Denne teori er bl.a. foreslået af Przemieniecki [1].

ISTAB = 2 er en forbedring, der medtager den geometriske forkortelse δ_G , beregnet med $kl = 0$.

Gruppe III, ISTAB = 3, 4, 5.

For alle disse teorier gælder, at ISTAB = 1 er indeholdt, samt at momentfordelingen i bjælken er beregnet ud fra den ikke-lineære bjælkedifferentialligning (20). ISTAB = 3 tager ikke hensyn til den geometriske forkortelse. Denne teori er foreslået af blandt mange andre, Argyris [6]. ISTAB = 4 medtager desuden den geometriske forkortelse δ_G , beregnet med $kl = 0$, medens ISTAB = 5 medtager δ_G beregnet ud fra den ikke-lineære inhomogene bjælkedifferentialligning (20). Connor [4] har behandlet en ISTAB = 5 teori, dog beregner han δ_G fra den homogene bjælkedifferentialligning, d.v.s. han medtager ikke indflydelsen på δ_G fra evt. belastning uden for knuderne.

Hvor der i det følgende tales om klassisk stabilitetsteori, menes en ISTAB = 3 teori forenklet med kravet om, at alle aksialflytninger er identisk nul (B. Pedersen & E. Byskov [2]).

3.2 Eksempler, alment.

I det følgende gennemregnes og kommenteres 4 eksempler på plane rammekonstruktioner, 3 små og 1 stort.

Hvert eksempel præsenteres med en figur, der dels viser referencekonfigurationen, dels udbøjningsfiguren beregnet ved højeste lasttrin ud fra de konsistente elasticitetsligninger (ISTAB = 5). Bemærk at visse af udbøjningsfigurerne er forstørrede. Værdien af k_l hørende til udbøjningsfiguren er påskrevet hvert bjælkeelement.

Efter udbøjningsfiguren er der, for hver af de 3 små eksempler, gengivet udvalgte belastnings-flytningsrelationer samt Southwellplot til bestemmelse af den kritiske last.

Relationerne er udregnet i en række punkter, og alle 6 teorier er med på graferne, hver markeret med sit symbol.

Symbol	Teori	Gruppe
—◇ :	ISTAB = 5	III
x :	ISTAB = 4	
+ :	ISTAB = 3	
—△ :	ISTAB = 2	II
○ :	ISTAB = 1	
—□ :	ISTAB = 0	I

Tabel 2. Grafsymbolforklaring.

Af oversigtsgrunde er 3 af teorierne markerede med en knæklinie og et symbol nær enden af knæklinien, medens de 3 øvrige er markeret udelukkende med symboler.

I eksempel 2 og 4 er rammekonstruktionens egenvægt medregnet, dog er de i eksempel 2 viste belastnings-flytningsrelationer rensede for egenvægtsbidrag.

Til Southwellplottene er kun benyttet flytningsparametre, der også beskriver udknækningsfiguren efter den klassiske stabilitetsteori. De øvrige flytningsparametre dner ikke til Southwellplot. (Nærmere om Southwellplot, se f.eks. Timoshenko [8])

p. 191 eller Roorda [10]).

Ved sammenligningen mellem de forskellige teorier, må det erindres, at den bedste af teorierne, den konsistente, ikke er eksakt, men er behæftet med fejl, der stammer fra afvigelserne mellem virkeligheden og de antagelser, der er gjort i udledningen.

I eksemplerne efterkontrolleres en af de vigtigste antagelser, nemlig antagelsen om små rotationer, $\varphi \ll 1$. Af følgeantagelserne $\varphi = \tan \varphi = \sin \varphi$ og $\cos \varphi = 1$ er det $\cos \varphi = 1$ antagelsen, der introducerer den største relative fejl.

3.2.1 Eksempel "BEP", fig. 4.

Dette eksempel er hentet fra B. Pedersen & E. Byskov [2], hvor det er beregnet for et enkelt belastningstrin, svarende til det maksimale i denne fremstilling. For at få $ISTAB = 3$ til at svare til teorien i [2] er arealerne på konstruktionselementerne valgt så store, at normalkrafttøjningerne er forsvindende. Herved bliver elementernes slankhedstal usædvanligt store.

Af fig. 6 og fig. 7 ses, at uafstivet translation og rotation inden for hver teorigruppe følges ad, dog bliver flytningerne fra $ISTAB = 3$ noget for store, især ved store værdier af P/P_{cr} .

Southwell plottet fig. 5 viser $P_{cr} = 4,44 \frac{EI}{a^2}$ for gruppe III teorierne. Det bemærkes, at dette eksempel ikke har nogen udknækningslast i klassisk forstand, da konstruktionen har udbøjninger på ethvert lasttrin. P_{cr} er da den last, ved hvilken udbøjningerne bliver uendeligt store. Dette gælder også for de følgende eksempler.

Af fig. 8 fremgår, at teorierne $ISTAB = 0, 1$ og 3 som ventet ikke giver nogen nedbøjning af søjlen, hvorimod $ISTAB = 2, 4$ og 5 giver betydelige nedbøjninger. Disse nedbøjninger stammer udelukkende fra medtagelsen af den geometriske forkortelse, δ_G . $ISTAB = 4$ og 5 ses at give omtrent samme resultat. Bemærk moderate kl værdier.

Beregnes snitkraftfordelingen fra de forskellige teorier, viser

det sig, at gruppe I og II giver momenter, der er meget for små. I forhold til den konsistente ISTAB = 5 teori giver ISTAB = 3 og 4 momenter, der er h.h.v. 27% og 10% større. Uoverensstemmelsen er størst i søjlen.

Normalkræfterne er ens inden for grupperne. Gruppe I og II giver normalkræfter, der er ca. 5% større end gruppe III.

Største værdi af rotationen φ indtræffer ved søjlens top for ISTAB = 3 med $\varphi_{\max} = 0,518$ og for ISTAB = 4,5 med $\varphi_{\max} = 0,427$. Antagelsen $\cos \varphi = 1$ giver herved en fejl på h.h.v. ca. 14% og ca. 10%.

På grund af de store φ værdier ved maximallasten må der sættes spørgsmålstegn ved resultaternes kvantitative værdi. Ved 7/8 af maximallasten er den største fejl ved $\cos \varphi = 1$ antagelsen dog allerede faldet til 2%.

3.2.2 Eksempel "SES-PR2-1" fig. 9, fig. 10.

Dette eksempel er hentet fra en forsøgsopstilling lavet af S. Svensson [9]. I sin rapport viser Svensson belastningsflytningsrelationer samt Southwellplot for den vandrette flytning af øverste højre rammehjørne ved 3 forskellige ekscentriciteter af belastningen. Desværre er E-modul og ekscentriciteter ikke oplyst.

Anvendes $EI = 2,1 \cdot 10^6 \cdot \frac{1}{12} \cdot 3,0 \cdot 0,1^3 \text{ kpcm}^2 = 525 \text{ kpcm}^2$ fås de i fig. 9 og fig. 10 viste udbøjningsfigurer ved ekscentriciteter på 1 cm h.h.v. 2 cm. Ud fra de 2 figurer ses bl.a., at fordobling af ekscentricitet mere end fordobler flytningerne.

Ved Southwellplottet finder Svensson $P_{cr} = 2,29 \text{ kp}$. Ved beregning med $EI = 525 \text{ kpcm}^2$ findes $P_{cr} = 2,41 \text{ kp}$. For at opnå overensstemmelse ved de følgende belastningsflytningsgrafer, er det derfor antaget, at den virkelige EI har været $EI = 525 \times 2,29/2,41 \text{ kpcm}^2 = 498 \text{ kpcm}^2$, hvilket f.eks. svarer til en unøjagtighed i tykkelsesbestemmelsen af tværsnittet på ca. 1,6%.

Sammenligning mellem den eksperimentelt fundne belastningsflyt-

ningsrelation for den vandrette flytning af øverste højre hjørne og den beregnede, viser god overensstemmelse for den laveste af Svensson's ekscentriciteter med $EI = 498 \text{ kpcm}^2$ og en ekscentricitet på 0,5 cm. Disse værdier er derfor anvendt ved udregning af de viste belastningsflytningsrelationer.

Lignende god overensstemmelse er fundet for de andre 2 ekscentriciteter. Disse resultater er dog ikke medtaget her.

Fra fig. 11 ses, at alle teorierne i gruppe III giver god overensstemmelse med den eksperimentelt fundne relation, ligesom det tilhørende Southwellplot på fig. 12, som ventet, giver $P_{cr} = 2,29 \text{ kp}$ for gruppe III.

Fig. 13 viser den lodrette nedbøjning af knude 6. Det ses, at kun $ISTAB = 4,5$ giver en tilfredsstillende flytningsbestemmelse ved store værdier af P/P_{cr} . Desværre er der i [9] kun optegnet belastningsflytningsrelation for den vandrette flytning af knude 6, men fotografier af konstruktionen i belastet, udbøjet tilstand viser god overensstemmelse med de her optegnede udbøjningsfigurer.

Rotationen af knude 4, som vist på fig. 14, er særdeles interessant, idet den er et eksempel på reversering af flytninger ved monoton belastningsforøgelse. Bjælken i 1-etage starter med at have positiv krumningsfordeling, men ved belastningsforøgelse bliver krumningerne i højre ende snart negative.

Dette fænomen, der skyldes den geometriske ikke-linearitet, er for en enkelt bjælkesøjle bl.a. behandlet hos Timoshenko [8] pp. 34, 191.

Snitkraftfordelingen fra gruppe I er uantagelig. Den har endog jfr. ovenstående forkerte fortegn på nogle af momenterne. Op til $P/P_{cr} = 1/2$ er moment- og normalkraftfordeling fra gruppe II antagelig. Over $P/P_{cr} = 1/2$ kan kun gruppe III teorier bruges. Ved højeste belastningsstrin er normalkraftfordelingen inden for gruppe III ens. $ISTAB = 4,5$ viser næsten identiske momentfordelinger, medens $ISTAB = 3$ giver op til 8% større momenter.

Den maksimale rotation, $\varphi_{\max} = 0,0314$, indtræffer i knude 6 og giver en maksimal relativ fejl fra $\cos \varphi = 1$ antagelsen på mindre end $5 \cdot 10^{-4}$.

Som et kuriosum til dette eksempel bemærkes, at gruppe III teorier, der ikke medtager virkningen af imaginære kl værdier, ved $P/P_{cr} \sim 0,9$ pludseligt bliver instabile. Kun når den i dette tilfælde gunstige virkning af imaginære kl værdier medtages, kan belastningsflytningsrelationerne beregnes helt tæt op mod $P/P_{cr} = 1$.

3.2.3 Eksempel "BLEICH CHARNIER", fig. 15.

Denne 1-etage 1-fags plane ramme med charnier understøtninger, belastet med enkeltkræfter P i hvert rammehjørne ses bl.a. hos Bleich [5] og Timoshenko [8] p. 66.

Klassisk stabilitetsanalyse giver $P_{cr} = 1,82 EI/l^2 = 1176$ kips med de aktuelle data.

Hos J. Connor [4] er relationen mellem den vandrette flytning af rammehjørnerne og belastningen undersøgt og optegnet for en lille ekstra vandret kraft, $Q = P/1000$ i det venstre rammehjørne. Denne relation svarer nøje til den på fig. 16 viste relation. Til sammenligning mellem Connor's løsningsmetode "successive substitution" og den her angivne er påskrevet det nødvendige antal iterationer i hvert belastningspunkt. Heraf ses dels, at den her angivne metode kræver færre iterationer til 1% konvergens end "successive substitution" til 5%, dels at "successive substitution" ikke er praktisk anvendelig ved laste meget tæt på den kritiske last.

Den vandrette flytning af venstre rammehjørne er anvendt til Southwellplottet, der giver en god bestemmelse af P_{cr} . Gruppe III giver $P_{cr} = 1160$ kips, hvilket er lidt mindre end den klassiske brudlast på 1176 kips.

Forskellen skyldes, at bøjningsmomenter i overliggeren, formindsker h.h.v. forøger normalkraften i venstre h.h.v. højre rammeben. Uden at tage hensyn til dette forhold giver den klassiske stabilitetsteori flg. ligning til bestemmelse af kl:

$$kl \tan kl = 6$$

Hvis man tager hensyn til denne effekt fås, idet højre ben bliver hårdest belastet:

$$kl \tan kl = 6 / (1 + 24(\frac{1}{1})^2)$$

Med de aktuelle værdier fås da, $kl = 1,34$ og dermed $P_{cr} = (kl)^2 EI/l^2 = 1,795 EI/l^2 = 1160$ kips, som også Southwell-plottet viste.

Fig. 18, der viser nedbøjningen af det venstre ramnehjørne, er en god illustration af ovennævnte effekt.

Alle teorier incl. den geometrisk lineære følges ad helt op til 95% af brudlasten på grund af det lave slankhedstal på 23,4. Hertil er hele nedbøjningen normalkraftbetinget. Over 95% niveauet viser ISTAB = 3 den ovennævnte aflastning af venstre rammeben, medens ISTAB = 4 og 5 viser det intuitivt rigtige, at selv om normalkraften aflastes ved øgning af P, forøges den lodrette nedbøjning kraftigt på grund af den geometriske forkortelse.

Af fig. 16 og fig. 19 ses i øvrigt, at rotation og uafstivet translation inden for hver teorigruppe følges godt ad, samt at der er god overensstemmelse mellem gruppe II og gruppe III op til $P/P_{cr} = 1/2$.

Den maximale rotation $\phi_{max} = 0.01$, hvilket giver en relativ fejl fra $\cos \phi = 1$ antagelsen på mindre end $5 \cdot 10^{-5}$.

3.2.4 Eksempel "30-ETAGER 2 FAG". fig. 20, fig. 21, fig. 22.

Dette sidste eksempel viser en højhusramme belastet med en realistisk jævnt fordelt etagelast virkende samtidig med en ækvivalent vandret jordskælvsbelastning. Fig. 20 viser belastningen, LOADCASE No. 2, og fig. 21 viser profiler og enkelte karakteristiske slankhedstal. Eksemplet er taget fra J. Solnes & O. Holst [11] og kun beregnet for brugslasten, hvorfor nogen belastningsflytningsrelation ikke er optegnet. Derimod er eksemplet blevet underkastet en egensvingningsanalyse, hvis resultater præsenteres sammen med uddrag af de øvrige resultater.

De 3 laveste egensvingninger undersøgtes, og det viste sig, at gruppe II og III gav 4-5% større egensvingningstider end gruppe I med en tendens til mindre øgning ved højere egensvingningstider.

Da den ækvivalente vandrette jordskælvsbelastning er afhængig af grundsvingningstiden, er de følgende resultater af sammenligningsgrunde baseret på en og samme grundsvingningstid, $T = 4,84$ sek. Med denne konstante vandrette belastning viser det sig, at alle ikke-lineære teorier giver ca. samme værdier for rotationer, rotationsdel af lodrette translationer samt vandrette translationer, idet der dog er en interessant gruppering af teorier. Teori ISTAB = 1 og 3 giver 10,7% større værdier og ISTAB = 2, 4 og 5 giver 9,4% større værdier for ovennævnte flytningskomponenter end den lineære teori, ISTAB = 0. Grupperingen går her på medtagelse eller udeladelse af geometrisk forkortelse, medens kl værdier ingen rolle spiller.

Ser man derimod på de lodrette translationer, excl. rotationsdelen, er der ingen forskel på ISTAB = 0, 1 og 3, medens den øvrige gruppering går på medtagelse eller udeladelse af kl i den geometriske forkortelse. ISTAB = 5 giver 5,7% større og ISTAB = 4 og 2 giver 2,3% større værdier for ovennævnte flytningskomponenter end ISTAB = 0, 1 og 3. Ovennævnte sammenligning mellem flytninger og teorier er kun foretaget for de 3 øverste knuder i konstruktionen, men da flytningerne i øverste etage er stærkt afhængige af flytningerne i alle underliggende etager, er der god grund til at antage lignende forhold for alle øvrige flytninger i konstruktionen.

Snitkraftfordelingen følger ikke samme gruppering som flytningsfordelingen. Det viser sig, at gruppe II og III teorier giver identiske normalkræfter og momenter inden for nogle få promille. Normalkræfterne i bjælkerne og midtersøjlen er ens i alle 3 grupper. I ydersøjlerne giver de ulineære teorier forøgede tryk i venstre søjle og formindskede tryk i højre søjle. Bidragene er lige store med modsat fortegn i hver etage, voksende fra 0 kN i toppen til 143 kN i bunden, svarende til trykforøgelser på mellem 0 og 4% og trykformindskelser på mellem 0 og 13%. For momenterne er billedet mere broget. Forøgelserne af positive og negative momenter i bjælker er op til 10% og i søjler op til 20%.

Der er en tendens til at de største relative forøgelser sker omtrent halvvejs oppe og i højre side, hvor trykaflastningen sker.

Til sidst skal det nævnes, at reaktionernes moment om midtersøjlels bund ved lineær beregning er på 23,55 MNm og ved ikke-lineær beregning 25,91 MNm, en forøgelse på 10%.

Den maximale rotation $\varphi_{\max} = 5 \cdot 10^{-3}$, hvilket giver en aldeles forsvindende fejl fra $\varphi \ll 1$ antagelsen.

Det bemærkes, at gruppe II og III teorier alle giver praktisk taget samme flytnings-, egenverdi- samt snitkraftbestemmelse med undtagelse af aksialflytninger i afstivede retninger. Hvis korrekte aksialflytninger i afstivede retninger ikke tillægges stor værdi i en analyse, kan man altså nøjes med en ISTAB = 1 teori, når man ønsker at tage hensyn til geometrisk ikke-linearitet i plane rammer til husbygningsformål.

4. Konklusion.

Der er foretaget en konsistent udvikling af elasticitetsligningerne med hensyntagen til geometrisk ikke-linearitet for et plant bjælkeelement med foreskrevne knudekræfter og jævnt fordelt tværbelastning. Til løsning af ligningerne er anvist en effektiv iterationsmetode, der giver god og hurtig konvergens. Anvendes elasticitetsligningerne og løsningsmetoden for elementet i et program til beregning af rammekonstruktioner, vil normale husbygningskonstruktioner konvergere efter 2 iterationer ud over den initiale gennemregning.

Et antal tilnærmede elasticitetsligninger er afprøvet. Det bemærkes, at tilnærmelserne kun gav små besparelser i nødvendige antal iterationer og total regnetid på datamat.

Følgende fællestræk for tilnærmelserne noteres.

Translationer i uafstivede retninger og rotationer er næsten uafhængig af, om man tager hensyn til geometrisk forkortelse eller ej, medens bestemmelse af translationer i afstivede retninger kræver hensyn til geometrisk forkortelse.

Flytningsbestemmelsen er mere krævende med hensyn til finhed af teori end snitkraftbestemmelsen.

På basis af de gennemregnede eksempler voves følgende beslutningstabel med hensyn til valg af teori til beregning af uafstivede rammekonstruktioner, hvor geometrisk ikke-linearitet ønskes tilgodeset.

Tabellen viser et talpar, (ISTABF, ISTABS), hvor ISTABF er mindstekrav til teori, når både flytnings- og snitkraftbestemmelse ønskes korrekt, medens ISTABS er mindstekrav til teori, når snitkræfterne har størst interesse.

$\frac{1}{i}$	$\frac{P}{P_{cr}}$	$ kl _{max} \leq 1$	$1 < kl _{max} \leq 2$	$2 < kl _{max}$
≤ 100	$\leq \frac{1}{2}$	(1,1)	(3,3)	(3,3)
	$> \frac{1}{2}$	(1,1)	(3,3)	(5,3)
> 100	$\leq \frac{1}{2}$	(2,1)	(4,3)	(5,3)
	$> \frac{1}{2}$	(4,3)	(4,3)	(5,5)

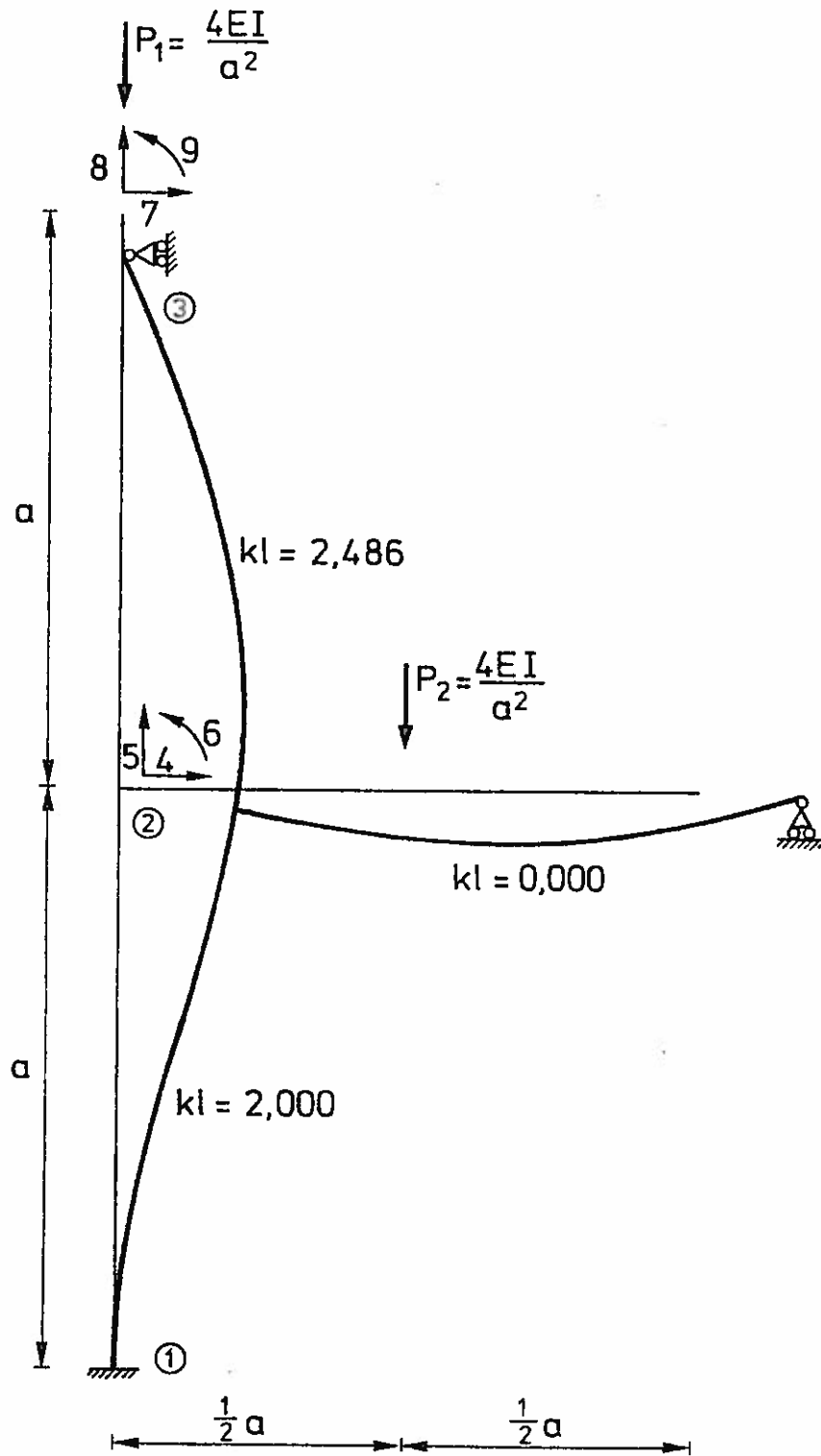
Tabel 3. Beslutningstabel for valg af teori.

Tabellen må kun opfattes som vejledende, og parametergrænserne skal tages med nogen varsomhed. Hvis det ikke a priori er muligt at skønne sikre værdier af ovenstående parametre, anbefales at bruge den konsistente teori, der, forudsat den er implementeret, ikke koster meget mere end de tilnærmede.

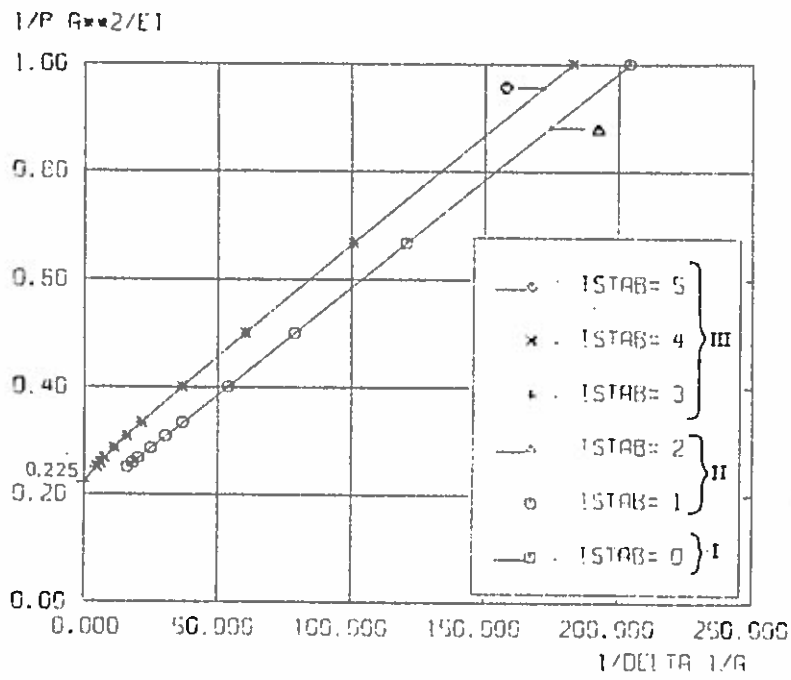
5. Litteratur.

- [1] Przemieniecki, J.S.: "Theory of Matrix Structural Analysis" McGrawHill, 1968.
- [2] Pedersen, B.E. & Byskov, E.: "Forelæsningsnotat vedrørende søjler", Polyteknisk Forlag, 1972.
- [3] Malvern: "Introduction to the Mechanics of a Continuous Medium", Prentice Hall, 1969.
- [4] Connor, J.J. & Logcher, R.D.: "Nonlinear Analysis of Elastic Framed Structures", Journal of the Structural Division, ASCE, Vol. 94 No. St6, June 1968, pp. 1525-1545.
- [5] Bleich, H.: "Buckling Strength of Metal Structures", McGrawHill, 1952.
- [6] Argyris, J.H.: "Recent Advances in Matrix Methods of Structural Analysis", Pergamon Press, 1964, pp. 115-145.
- [7] Johnson, D. & Brotton, D.M.: "A Finite Deflection Analysis for Space Structures", Dept. of Civil Engr. U. of Surry, England, 1966.
- [8] Timoshenko, S.P. & Gere, J.M.: "Theory of Elastic Stability", McGrawHill, Int. Student Edition, 1961.
- [9] Svensson, S.E.: "Illustration af nogle stabilitetsfænomener med brug af simple modeller", Sagsrapport 2/73, Afdelingen for Bærende Konstruktioner, Dth, under udgivelse 1973.
- [10] Roorda, J.: "Some Thoughts on the Southwell Plot", Journal of the Engineering Mechanics Division, ASCE, Vol. 93 No. EM6, Dec. 1967, p. 37-48.
- [11] Solnes, J. & Holst, O.L.: "Optimization of Frames Structures under Earthquake Loads", Proc. of Fifth World Conference on Earthquake Engineering, Rome 1973, paper 376.

Appendiks I. Figurer til Eksempler.



FLYTNING X 1
 $\frac{l}{i} = \sqrt{\frac{A}{I}} \cdot a \approx 30000$
BEP EKSEMPEL
Fig. 4

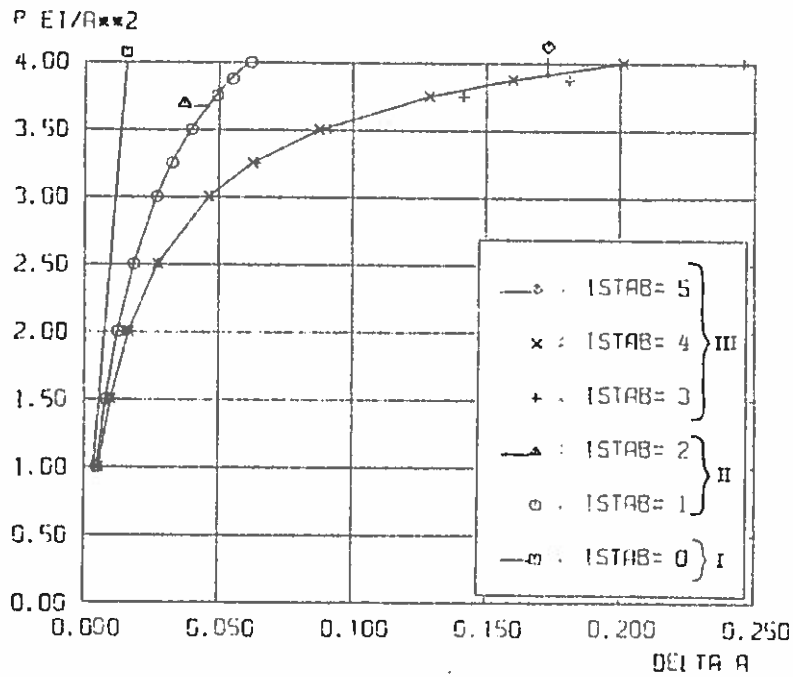


SOUTHWELL PLOT

BEP, IDIS=4

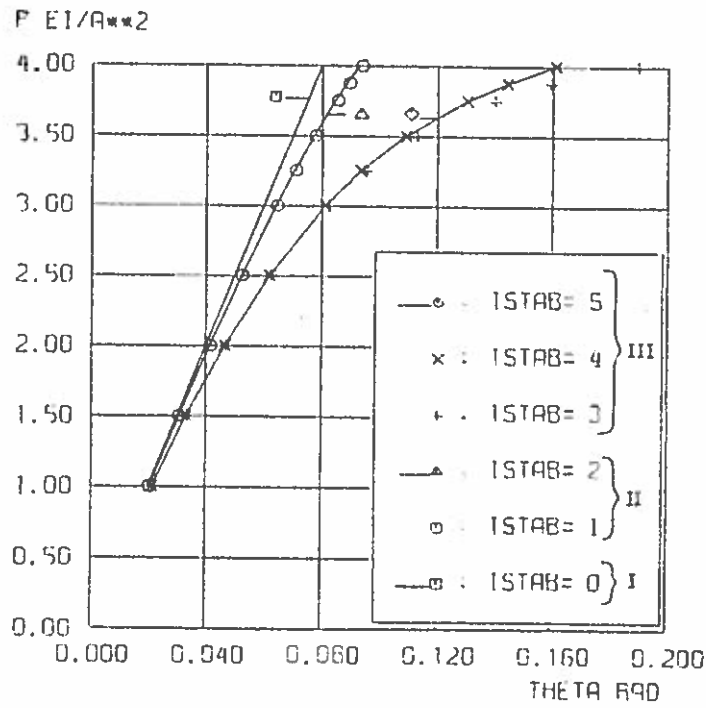
$$P_{cr} = 1/0,225 = 4,44 \frac{EI}{a^2}$$

Fig. 5



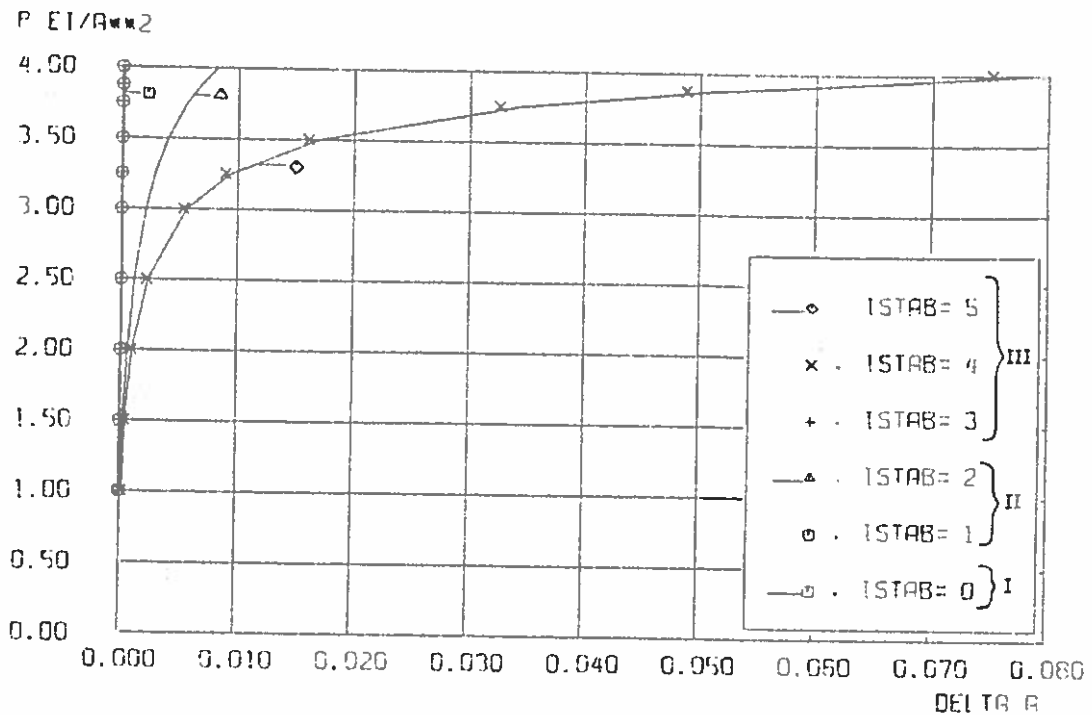
BEP, IDIS=4, vandret flytning af knude ②

Fig. 6



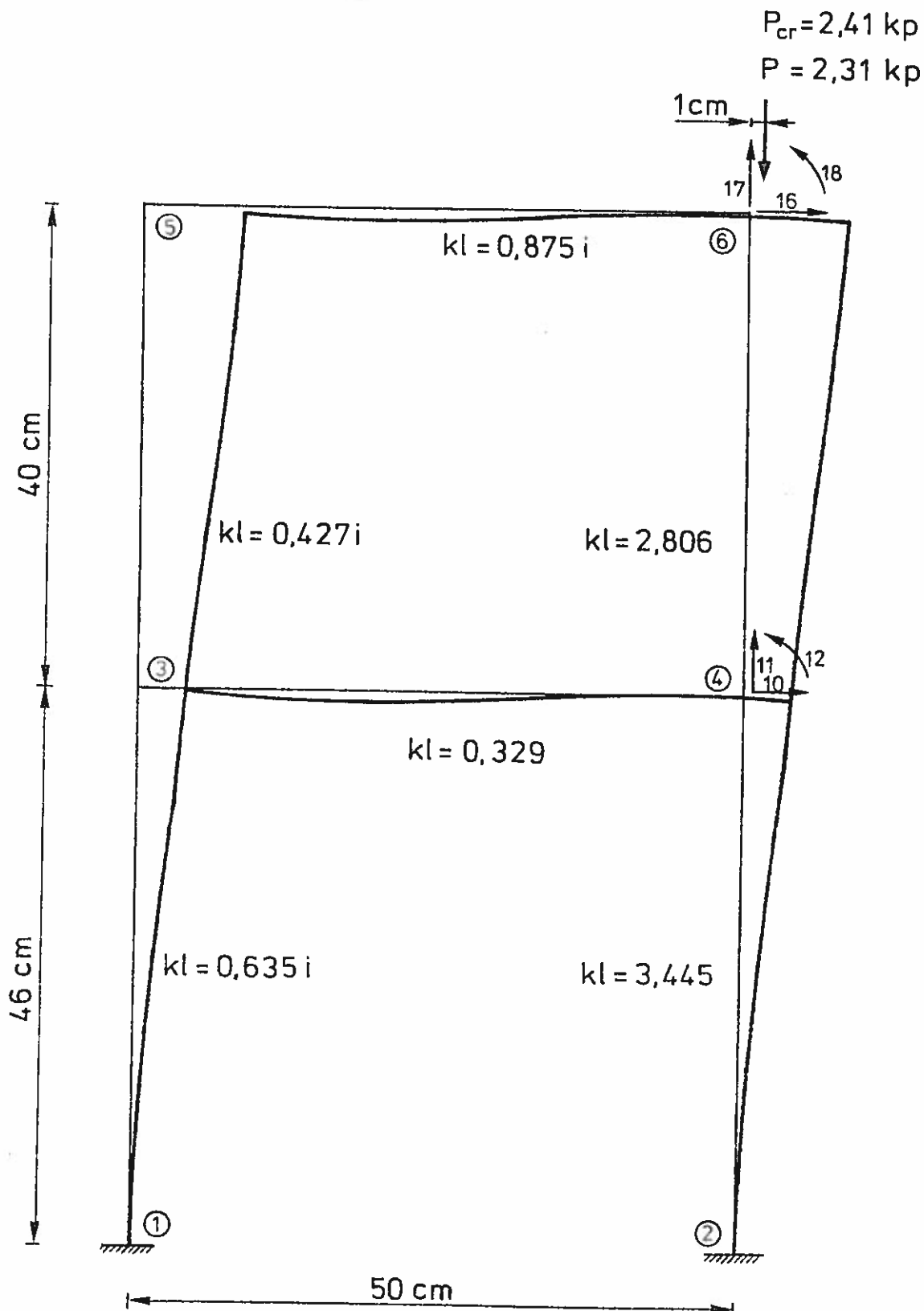
BEP.IDIS=-6 , Drejning af knude ②

Fig. 7



BEP.IDIS=-8 , Lodret nedbøjning af knude ③

Fig. 8



FLYTNING X 1

E modul = $2,1 \times 10^6$ kp/cm²

$I = 2,5 \times 10^{-4}$ cm⁴

SES PR2-1

Fig.9

$$A = 0,3 \text{ cm}^2 = 0,1 \times 3,0 \text{ cm}^2$$

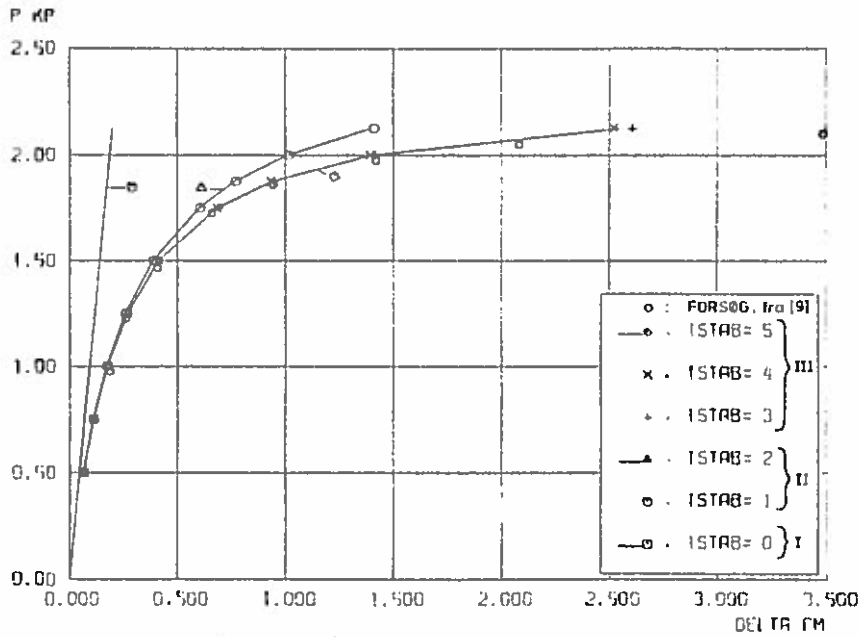
$$\frac{l}{i_{\min}} = \sqrt{\frac{A}{I}} \quad l_{\min} = 1400$$



FLYTNING X 1

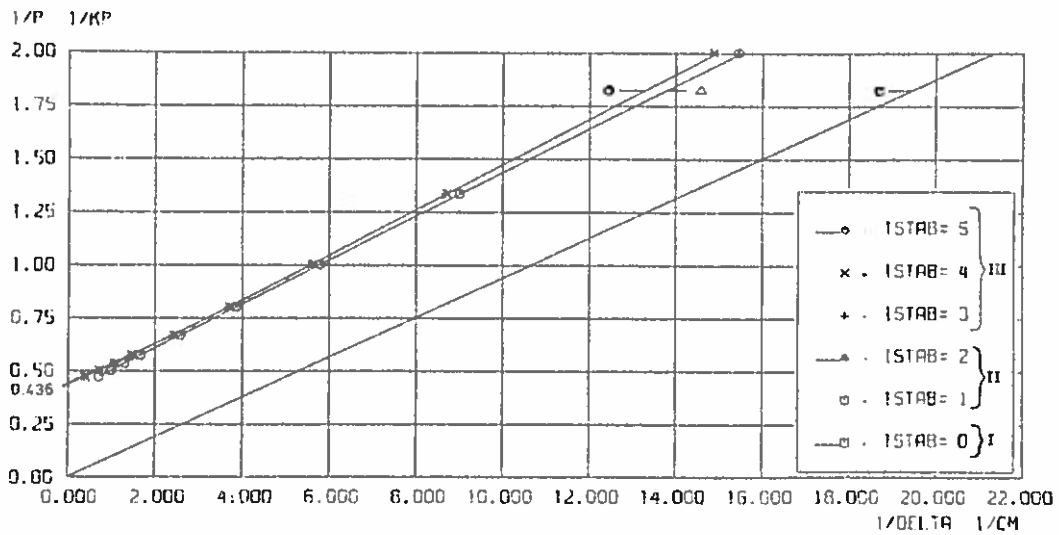
SES PR2-1

Fig. 10



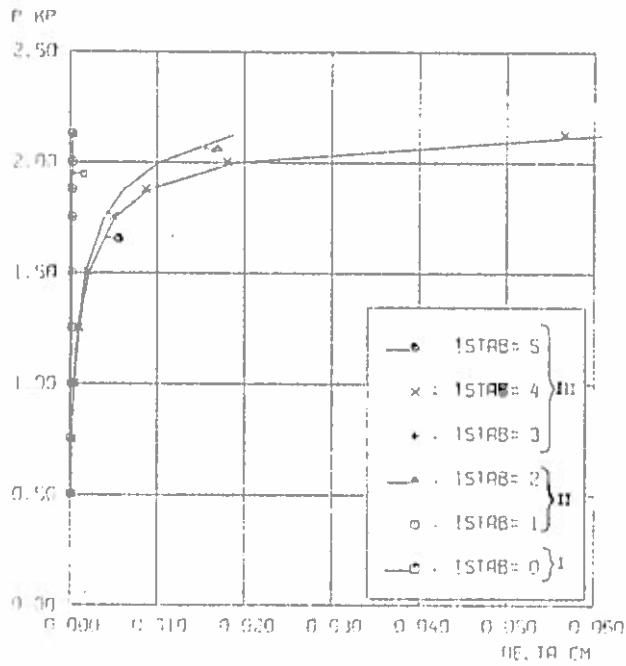
SES-PR2-1, IDIS=16, EC=.5CM, Vandret udbøjning af knude ⑥

Fig. 11



SOUTHWELL PLOT, SES-PR2-1, IDIS=16, EC=0.5cm, $I=2,38 \times 10^{-4} \text{ cm}^4$, $E=2,1 \times 10^6 \text{ kp/cm}^2$
 Gruppe III: $P_{cr} = 1/436 \text{ kp} = 2.29 \text{ kp}$

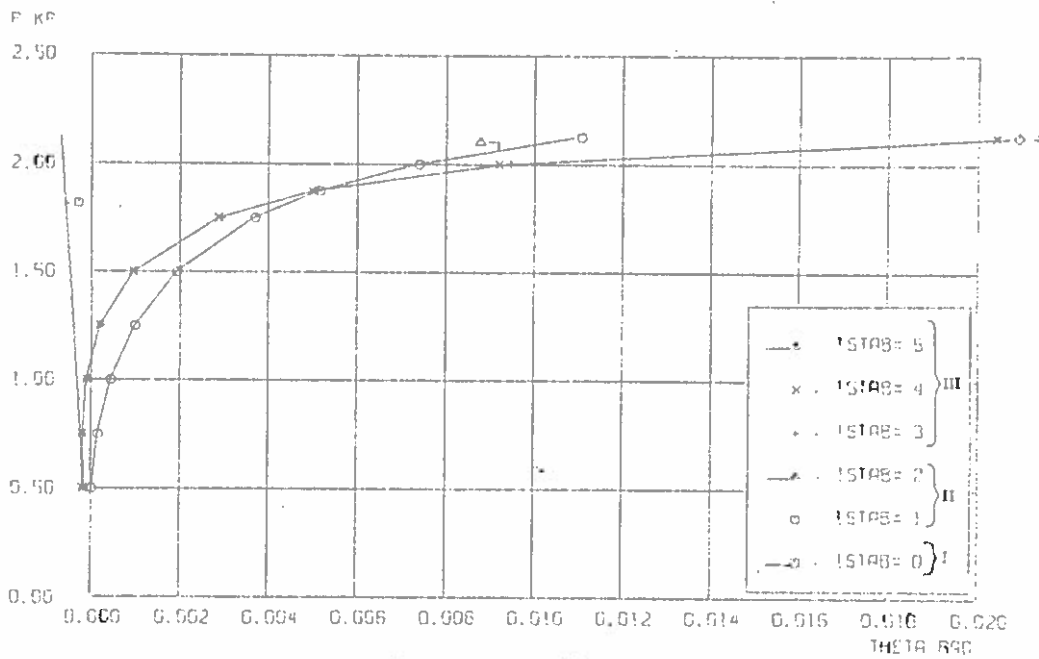
Fig. 12



SES-PR2-1. IDIS = -17. EC = .5CM

Lodret nedbøjning af knude ⑥

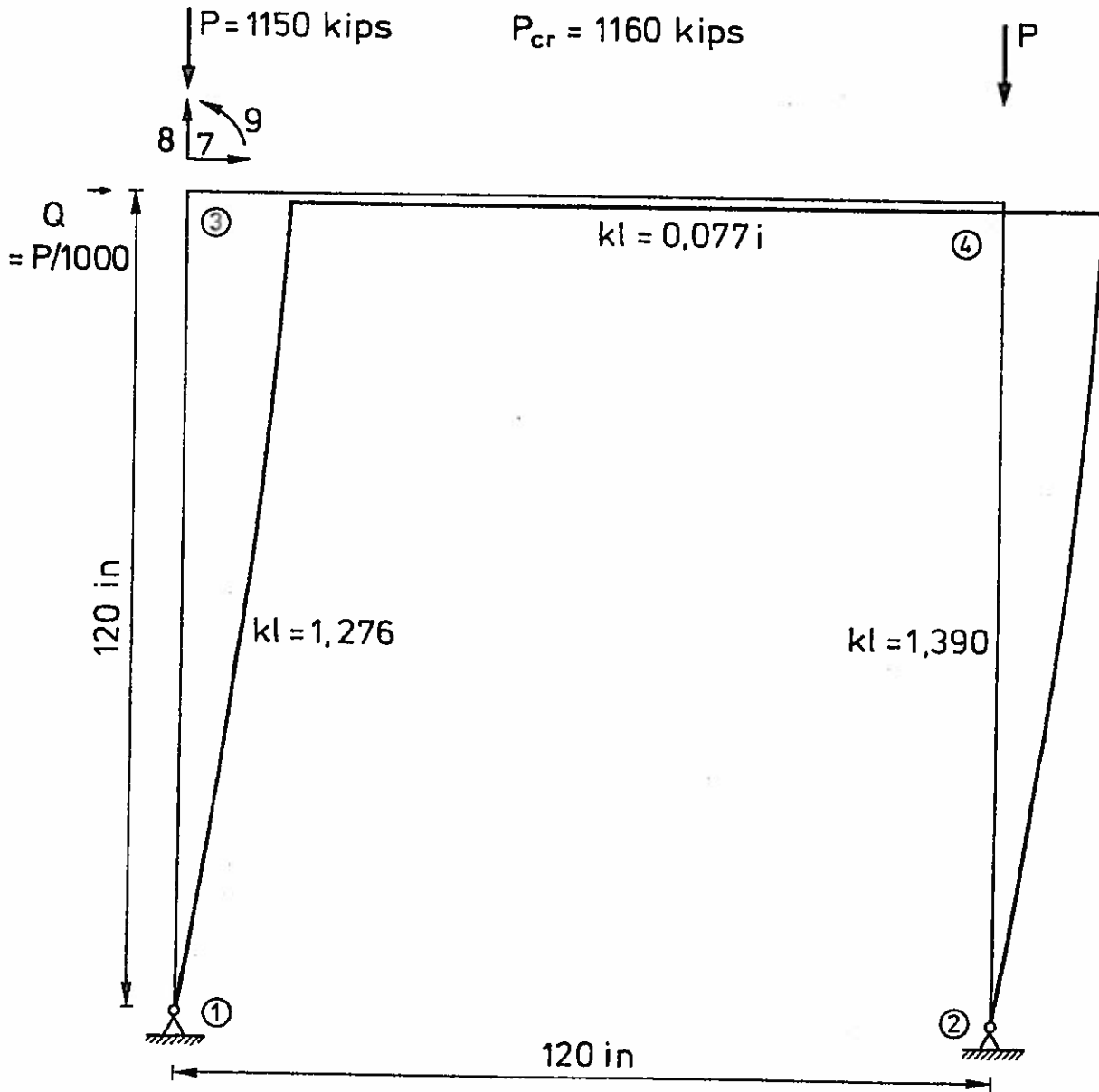
Fig. 13



SES-PR2-1. IDIS = -12. EC = .5CM

Rotation af knude ④

Fig. 14



FLYTING X 3

$E = 3 \cdot 10^4$ ksi

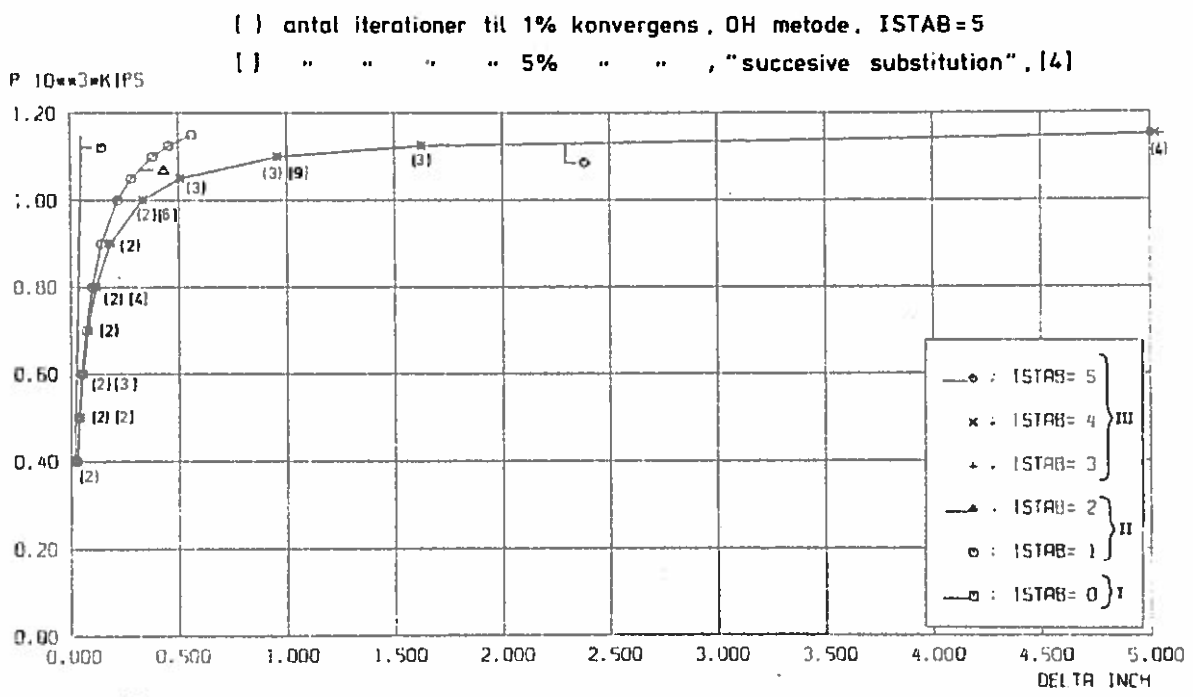
$I = 310,1$ in.⁴

$A = 11,77$ in.²

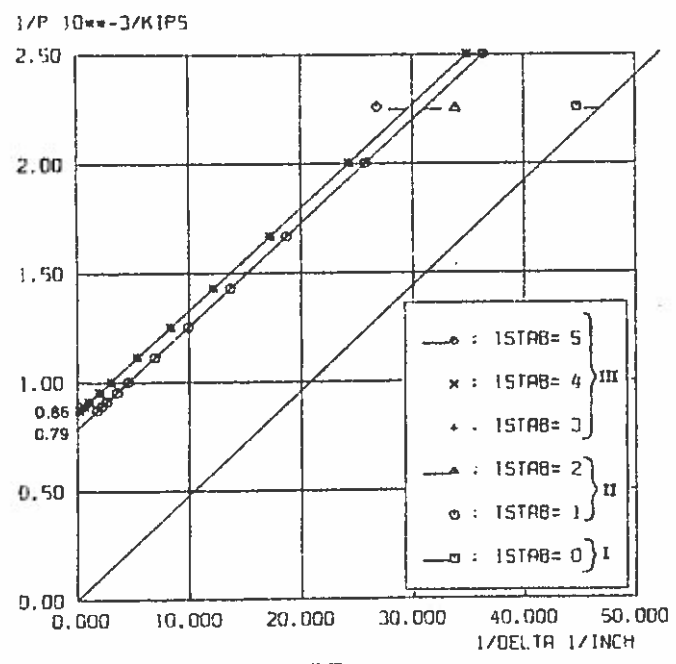
$\frac{l}{i} = \sqrt{\frac{A}{I}}$ $l = 23,4$

BLEICH CHARNIER

Fig. 15



BLEICH CHARNIER IDIS= 7 . Vandret flytning af knude ③
 Fig. 16



Southwell plot, $Q = \frac{1}{1000} P$:

Gruppe III: $P_{cr} \approx 1/86 \times 10^3$ kips
 = 1160 kips

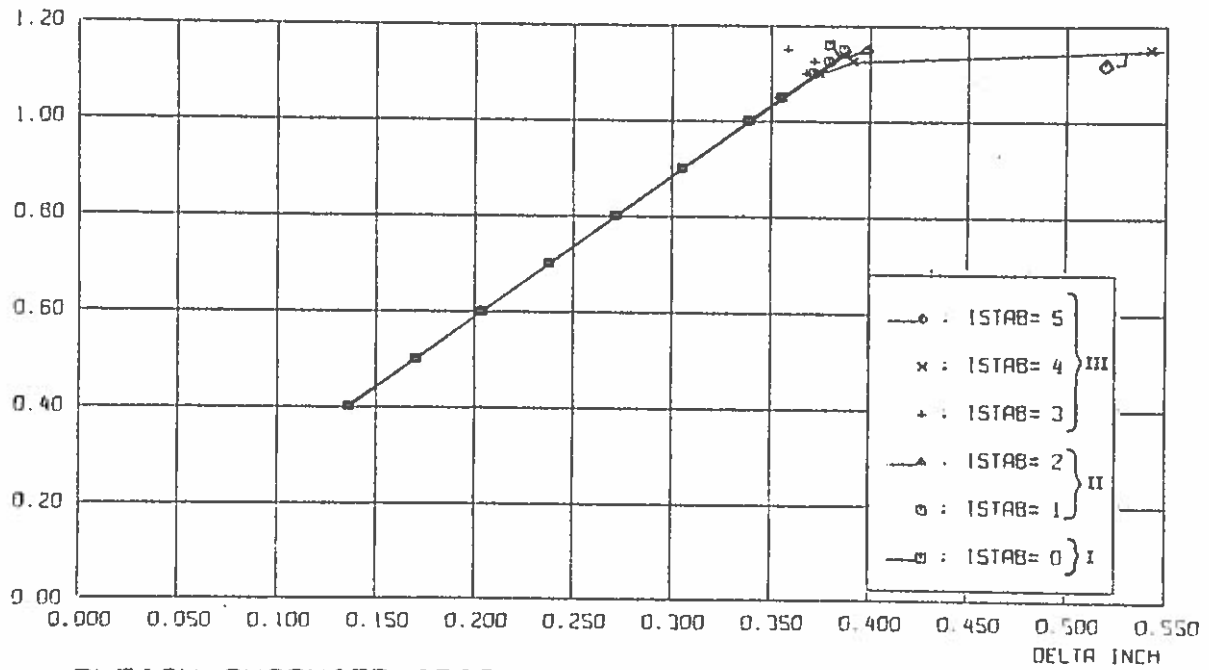
Gruppe I: $P_{cr} = 1/79 \times 10^3$ kips
 = 1265 kips

Klassisk stabilitetsanalyse, $Q = 0$:

$P_{cr} = 1176$ kips

SOUTHWELL PLOT
 BLEICH CHARNIER, IDIS=7
 Fig. 17

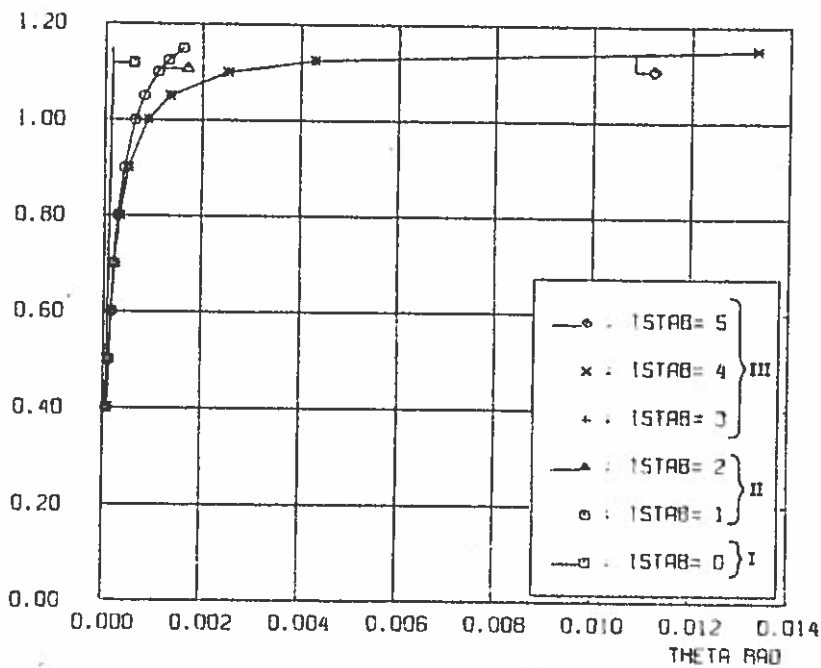
P 10**3**KIPS



BLEICH CHARNIER IDIS=-8 , Lodret nedbøjning af knude ③

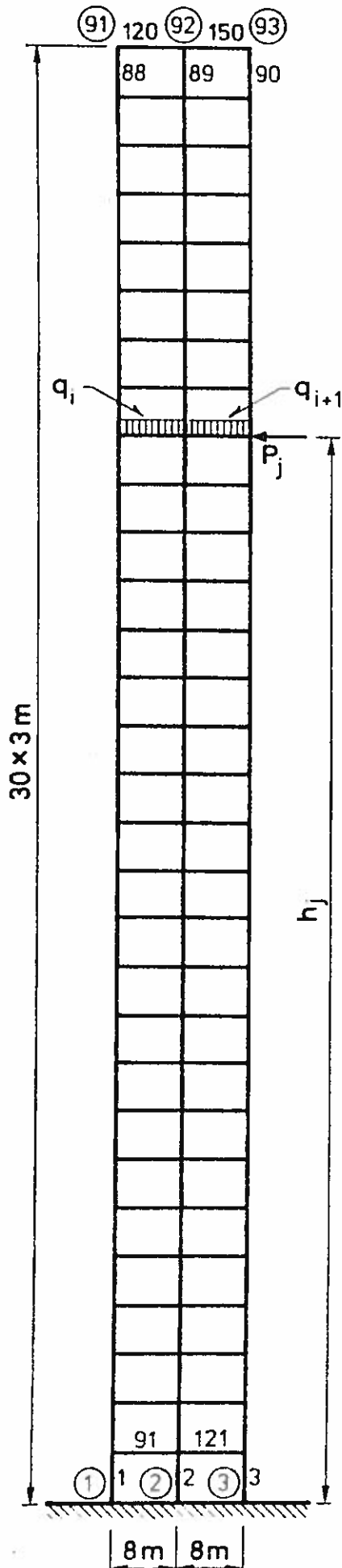
Fig. 18

P 10**3**KIPS



BLEICH CHARNIER IDIS=-9 , Drejning af knude ③

Fig. 19



LOAD CASE NO. 1

$$q_i = 25 \text{ kN/m}^* \text{ (} i=91,160 \text{)}$$

$$P_j = 0 \text{ (} j=1,93,3 \text{)}$$

Allowable stresses:

Beams: (IPE profiles)

$$r_{\text{bending}} = 1.57 \text{ kN/m}^2$$

$$r_{\text{compression}} = 1.25 \text{ kN/m}^2$$

Columns: (HE-B profiles)

$$r_{\text{bending}} = 2.36 \text{ kN/m}^2$$

$$r_{\text{compression}} = 1.89 \text{ kN/m}^2$$

LOAD CASE NO. 2

$$q_i = 18.75 \text{ kN/m (} i=91,160 \text{)}$$

$$P_j = \frac{0.0675}{\sqrt[3]{T}} \cdot \frac{h_j w_j}{\sum h_j w_j} \cdot \sum w_j$$

where w_j is the total weight concentrated at the j -th floor, and T is the fundamental period of the frame.

Lateral deflection of node no. 91 (93) is equal to or less than 1/200 times height of frame.

Allowable stresses:

Beams: (IPE profiles)

$$r_{\text{bending}} = 2.16 \text{ kN/m}^2$$

$$r_{\text{compression}} = 1.73 \text{ kN/m}^2$$

Columns: (HE-B profiles)

$$r_{\text{bending}} = 3.24 \text{ kN/m}^2$$

$$r_{\text{compression}} = 2.59 \text{ kN/m}^2$$

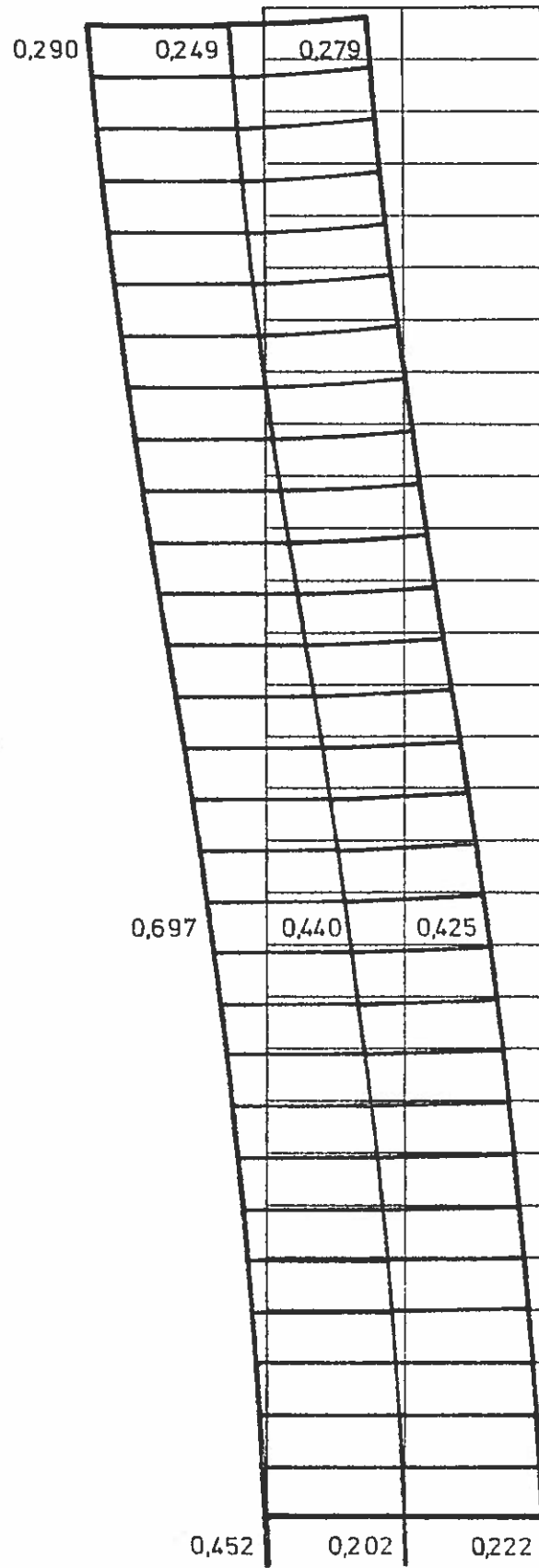
$$E = 2.1 \cdot 10^8 \text{ kN/m}^2 \text{ (Young's modulus)}$$

* SI units

Fig. 20. 30 etager, 2 fag ; belastninger

					$\frac{l}{i}$
88	89	90	1. Beams	: IPE 400	48.5
			2. Center columns	: HE-B 240	29.1
			3. Outer columns	: HE-B 180	39.2
			1	400	
			2	260	
			3	200	
			1	450	
			2	260	
			3	240	
			1	450	
			2	280	
			3	240	
			1	450	
			2	320	
			3	260	
			1	450	43.2
			2	400	17.6
37	38	39	3	280	24.8
			1	500	
			2	500	
			3	300	
			1	500	
			2	600	
			3	340	
			1	550	
			2	700	
			3	400	
			1	550	35.7
			2	900	8.2
1	2	3	3	450	15.7

Fig. 21. 30 etager, 2 fag ; dimensioner og udvalgte slankhedstal



FLYTNING X 20
30 ETAGER 2 FAG, MED UDVALGTE KL VÆRDIER.
Fig. 22

Appendiks II. Cauchy-kontra Piola-Kirchhoff spændinger.

Til dimensioneringsformål har man brug for Cauchy spændingen T_{rs} i stedet for Piola-Kirchhoff spændingen \tilde{T}_{ij} . Det vises her, under hvilke forudsætninger de 2 spændingsmål er lige store.

Lad z_i betegne koordinaterne til et punkt i det deformede legeme med referencekoordinaterne x_i målt i samme koordinat-system. Med flytningsmålet (2) fås da:

$$z_1 = x_1 + u_{10} - u_{20}'x_2$$

$$z_2 = x_2 + u_{20}$$

Mellem T_{rs} og \tilde{T}_{ij} eksisterer flg. eksakte relation (Malvern [3] p. 223)

$$T_{rs} = \frac{1}{\det\left(\frac{\partial z_k}{\partial x_l}\right)} \frac{\partial z_r}{\partial x_i} \tilde{T}_{ij} \frac{\partial z_s}{\partial x_j}$$

Bag tøjningsmålet (2) ligger antagelserne $u_{10}' \ll 1$, $u_{20}' \ll 1$. Antages yderligere $u_{20}''x_2 \ll 1$ fås

$$\frac{\partial z_1}{\partial x_1} = \frac{\partial z_2}{\partial x_2} = 1 \quad \text{og} \quad \frac{\partial z_1}{\partial x_2} = \frac{\partial z_2}{\partial x_1} = 0,$$

d.v.s.

$$T_{rs} = \tilde{T}_{rs}$$

eller

$$T_{11} = \tilde{T}_{11}, \quad T_{12} = T_{21} = T_{22} = 0$$

Da vi fra starten har antaget, at normaler ikke forandrer længde under deformationen, kan snitkræfterne M og N direkte anvendes til dimensioneringsformål under de givne antagelser.

Appendiks III. Initialkrumning og geometrisk forspænding.

A III. 1 Tilføjelse til bogstavliste.

- N_f Geometrisk normalkraftforspænding.
- u_{2f} Initialtværuddbøjning
- u_{2m} Momentbetinget tværuddbøjning
- v_f Initialvinkeldrejning
- v_{Nf} Initialforlængelse svarende til N_f
- δ_{Gf} Geometrisk forkortelse fra initialkrumning κ_f
- ϵ_f Initiallængdetøjning
- κ_f Initialkrumning

A III. 2 Udledning af ændringer.

Til dimensioneringsformål har man ofte brug for dels at kunne beregne bjælkeelementet med en vis normbestemt spændingsfri initialkrumning κ_f , dels at kunne regne med en geometrisk forspændingskraft, d.v.s. en normalkraft forspænding N_f fremkommet ved, at elementets evt. initialkrummede længde er forskellig fra den teoretiske længde i konstruktionen.

I dette appendiks vises, hvilke ændringer en konstant initialkrumning κ_f og en konstant normalkraftforspænding N_f medfører i de tidligere udledte elasticitetsligninger. Sidste del af ligningsnummer refererer til selve rapporten.

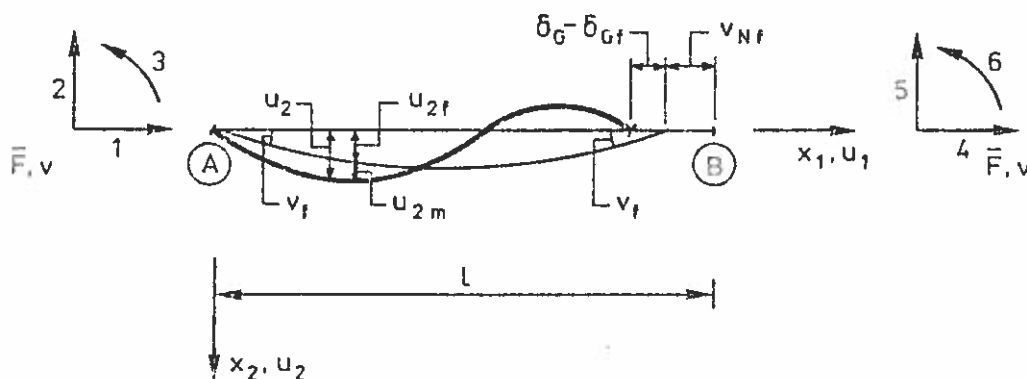


Fig. A III-1

En konstant initialkrumning κ_f svarer til endevinkeldrejningerne $v_f = -1 \cdot \kappa_f/2$ og initialudbøjningen bliver

$$u_{2f} = v_f (x - x^2/1)$$

med $u_{2f}'(0) = -u_{2f}'(1) = v_f$

og $u_{2f}'' = -2v_f/1 = \kappa_f$

Idet u_{2m} er den momentbetingede tværudbøjning fås følgende udtryk for den totale tværudbøjning u_2

$$u_2 = u_{2f} + u_{2m}$$

Ændringen i de geometriske feltbetingelser bliver

$$E_{11} = \epsilon - \kappa \cdot x_2$$

$$\epsilon = u_{10}' + \frac{1}{2}(u_2')^2 - \epsilon_f \quad (\text{A III-3})$$

$$\kappa = u_2'' - \kappa_f = u_2'' - u_{2f}'' = u_{2m}''$$

i det der regnes med konstant initiallængdetøjning ϵ_f og konstant initialkrumning κ_f .

De geometriske randbetingelser vedrørende tværudbøjningen skal opstilles i u_{2m} . Vi får

$$\begin{aligned} v_2 &= -u_{2m}(0) & v_5 &= -u_{2m}(1) = -u_2(1) \\ v_3 &= -u_{2m}'(0) & v_6 &= -u_{2m}'(1) \\ &= -u_2'(0) + u_{2f}'(0) & &= -u_2'(1) + u_{2f}'(1) \\ &= -u_2'(0) + v_f & &= -u_2'(1) - v_f \end{aligned} \quad (\text{A III-4})$$

Deformationsparametrene (5) er uændrede.

Med de indførte tøjningsmål er de fysiske feltbetingelser (10) og (11) uændrede.

Hele udledningen af de statiske felt- og randbetingelser er uændret bortset fra 2 af de statiske randbetingelser, der på grund af ændrede geometriske randbetingelser bliver til

$$\bar{F}_2 = M_A' - Nv_3 + Nv_f \quad \bar{F}_5 = -M_B' + Nv_6 + Nv_f \quad (\text{A III-19})$$

Indsættes i den statiske feltbetingelse (18) den fysiske feltbetingelse (10) og den geometriske feltbetingelse (A III-3) fås følgende differentiaalligning

$$u_{2m}^{IV} + k^2 u_2'' = \frac{\bar{p}}{EI}$$

Indsættes her $u_2'' = u_{2f}'' + u_{2m}''$ og ordnes fås

$$\begin{aligned} u_{2m}^{IV} + k^2 u_{2m}'' &= \frac{\bar{p}}{EI} - k^2 u_{2f}'' \\ &= \frac{\bar{p} + N \cdot \kappa_f}{EI} \end{aligned} \quad (\text{A III-20})$$

Dette er principielt den samme differentiaalligning som (20), blot er der tilføjet et belastningsled $N \cdot \kappa_f$. I det de geometriske randbetingelser er givet i u_{2m} , bliver de eneste ændringer i afsnittet om tværudbøjning og moment at erstatte u_2 med u_{2m} og \bar{p} med $\bar{p} + N \cdot \kappa_f$.

De vigtigste resultater fra dette afsnit med hensyn til opstilling af elasticitetsligningerne er

$$\begin{bmatrix} M_A \\ M_B \end{bmatrix} = \mu \begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ A_2 & A_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_A \\ V_B \end{bmatrix} - (\bar{p} + N\kappa_f) l^2 \begin{bmatrix} A_3 \\ A_3 \end{bmatrix} \quad (\text{A III-31})$$

og

$$\begin{bmatrix} M'_A \\ -M'_B \end{bmatrix} = \frac{\mu}{l} \begin{bmatrix} (kl)^2 - B_1 & B_1 \\ B_1 & (kl)^2 - B_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_A \\ V_B \end{bmatrix} + \frac{1}{2}(\bar{p} + N\kappa_f) l \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (\text{A III-33})$$

I afsnittet om aksialdeformationerne får vi

$$\frac{N}{EA} = \epsilon = u_1' + \frac{1}{2}(u_2')^2 - \epsilon_f = \text{konstant} \quad (\text{A III-34})$$

og ved integration m.h.t. x fra 0 til l

$$\frac{Nl}{EA} = \delta_N = v_N + \delta_G - \delta_{Gf} + v_{Nf} \quad (\text{A III-35})$$

Hvor det erindres, at δ_G skal beregnes udfra den totale udbøjningskurve u_2

$$\delta_G = \frac{1}{2} \int_0^l (u_2')^2 dx \quad (\text{A III-38})$$

d.v.s. ud fra (39) eller (40) med $v_A = -v_3 + v_F + v_f$,
 $v_B = v_6 - v_F + v_f$ og $\bar{p}_d = (\bar{p} + N\kappa_f)l^3/EI$

De nye parametre δ_{Gf} og v_{Nf} er givet ved

$$-\delta_{Gf} + v_{Nf} = \int_0^l -\epsilon_f dx \quad (\text{A III-38.1})$$

Hvis der ikke er nogen geometrisk forspænding, er $N_f = v_{Nf} = 0$,
 og ligning (A III-35) giver i den udeformede konstruktion,
 $v_N = 0$

$$0 = 0 + \delta_G - \delta_{Gf} + 0$$

eller

$$\delta_{Gf} = \delta_G(v_A = v_B = v_f, v_F = kl = \bar{p}_d = 0)$$

hvilket jævnfør ligning (40) giver

$$\delta_{Gf} = 1v_f^2/6 \quad (\text{A III-38.2})$$

Hvis der kræves forspænding, $N = N_f$, har vi til bestemmelse af
 v_{Nf}

$$\frac{N_f l}{EA} = 0 + \delta_G - \delta_{Gf} + v_{Nf}$$

eller

$$v_{Nf} = \frac{N_f l}{EA} + \delta_{Gf} - \delta_G(v_A = v_B = v_f, kl = \frac{-N_f}{EI}l, \bar{p}_d = -(kl)^2 l \cdot \kappa_f)$$

Tilsammen opsummeres virkningerne af initialkrumning og geometrisk forspænding i følgende ændringer i elasticitetsligningerne

$$R_1 = -\frac{EA}{l}(\delta_g - \delta_{Gf} + v_{Nf})$$

$$R_2 = (\bar{p} + N \cdot \kappa_f)l^2 A_3 \quad (\text{A III-43})$$

Bemærk at $R_2 = \frac{1}{2}\bar{p}l$ er uændret, thi selv om vi i momentdifferentialligningen får en regningsmæssig ekstra tværbelastning på $N \cdot \kappa_f$, bliver der, som ventet, ikke nogen resulterende ydre tværreaktioner. Bidragene fra (A III-19) og (A III-33) udligner hinanden.

Iterationsopskriften til elasticitetsligningerne (42) påvirkes ikke, thi ændringerne i ligning (43) er konstante, uafhængige af v_i .

Structural Research Laboratory
Technical University of Copenhagen, Denmark

REPORTS

- | | | |
|-------|---|---------------------|
| R 1. | Askegaard, Vagn and P. Thoft-Christensen: Spændingsoptiske lag og tøjningsmålere. 1967. | Out of print |
| R 2. | Møllmann, H.: The Principle of Virtual Work for Continuous Systems Derived by a Direct Method. 1968. | |
| R 3. | Askegaard, Vagn: Production and Application of Model Materials with Desired Physical Constants. 1968. | |
| R 4. | Møllmann, H.: The Analysis of Shallow Cables. 1968. | |
| R 5. | Dyrbye, Claës: Damped Vibrations of Slender Beams. 1968. | Out of print |
| R 6. | Møllmann, H.: Analysis of Plane Prestressed Cable Structures. 1969. | |
| R 7. | Nielsen, Leif Otto: Beregning af bjælker og rammer dynamisk påvirket ud over det elastiske område. 1968. | Out of print |
| R 8. | Bræstrup, Mikael W.: On the Theory of Plastic Plates. 1969. | Out of print |
| R 9. | Nielsen, Leif Otto: Uniqueness Problems and Minimum Principles in the Dynamic Theory of Plasticity. 1969 | Out of print |
| R 10. | Byskov, Esben: Two Nearly Polygonal Holes. Mathematical Crack Problems. 1969. | |
| R 11. | Bræstrup, Mikael W.: The Cosserat Surface and Shell Theory. 1970. | Out of print |
| R 12. | Askegaard, Vagn: Anvendelse af modelanalyse. 1970. | |
| R 13. | Solnes, Julius: The Spectral Character of Earthquake Motions. 1970. | Out of print |
| R 14. | Bræstrup, Mikael W.: Yield Lines in Discs, Plates and Shells. 1970. | Out of print |
| R 15. | Møllmann, J.: Beregning af hængekonstruktioner ved hjælp af deformationsmetoden. 1970. | Out of print |
| R 16. | Byskov, Esben: The Calculation of Stress Intensity Factors Using the Finite Element Method with Cracked Elements. 1970. | |
| R 17. | Askegaard, V.: Grundlaget for adhæsion. 1970. | |
| R 18. | Summaries of Lecture Notes on Experimental Stress Analysis. 1970. | Out of print |
| R 19. | Sørensen, Hans Christian: Forskydning i jernbetonbjælker. 1970. | |
| R 20. | Sørensen, Hans Christian: Forskydningsforsøg med 12 jernbetonbjælker med T-tværsnit. 1971. | |
| R 21. | Møllmann, H.: Analysis of Hanging Roofs Using the Displacement Method. 1971. | Out of print |
| R 22. | Haurbæk, Poul E.: Dæmpede svingninger i spændbetonbjælker. Svingningsforsøg med simpelt understøttede bjælker. | Publication pending |

- R 23. Bræstrup, M.W.: Yield-line Theory and Limit Analysis of Plates and Slabs. 1971.
- R 24. Dyrbye, Claës: Pendulum Vibrations. 1971. Out of print
- R 25. Møllmann, H.: Analytical Solution for a Cable Net over a Rectangular Plan. 1971.
- R 26. Nielsen, J.: Silotryk. 1972.
- R 27. Askegaard, V., M. Bergholdt and J. Nielsen: Problems in connection with pressure cell measurements in silos. 1972.
- R 28. Ramirez, H. Daniel: Buckling of plates by the Ritz methods using piecewise-defined functions. 1972.
- R 29. Thomsen, Kjeld & Henning Agerskov: Behaviour of butt plate joints in rolled beams assembled with prestressed high tensile bolts. 1972.
- R 30. Julius Solnes and Ragnar Sigbjörnsson: Structural response to stochastic wind loading. 1972.
- R 31. H.J. Larsen og H. Riberholt: Forsøg med uklassificeret konstruktionstræ. 1972.
- R 32. Vagn Askegaard: Programme and methods of teaching of experimental mechanics. 1972. Out of print
- R 33. Julius Solnes and Ole Holst: Weight optimization of framed structures under earthquake loads. 1972.
- R 34. Rostam, Steen and Esben Byskov: Cracks in Concrete Structures. A Fracture Mechanics Approach. 1973.
- R 35. Sørensen, Hans Chr.: Efficiency of Bent-up Bars as Shear Reinforcement. 1973.
- R 36. Krenk, Steen: Singulær integralformulering af nogle plane friktionsfri kontaktproblemer. 1973.
- R 37. Philipsen, Claus: An investigation of the stability of columns with thin-walled open cross-section. 1973.
- R 38. Theilgaard, Esko: Integralligningsmetoder anvendt på problemer inden for bygningsstatikken. 1973.
- R 39. Henrichsen, Lars: Linearly viscoelastic finite elements. 1973.
- R 40. Bryndum, Mads: Litteraturstudium vedrørende let konstruktionsbeton. 1973.
- R 41. Holst, Ole: Beregning af plane rammekonstruktioner med geometrisk ikkelinearitet. 1973.