

AFDELINGEN FOR
BÆRENDE KONSTRUKTIONER
DANMARKS TEKNISKE HØJSKOLE



STRUCTURAL RESEARCH LABORATORY
TECHNICAL UNIVERSITY OF DENMARK

Leif Otto Nielsen

SPÆNDINGSHYBRIDE FINITE ELEMENTER
TIL SVINGNINGSPROBLEMER

RAPPORT NR. R 61 1975

Spændingshybride finite elementer
til svingningsproblemer

1. Indledning.

Anvendt på statiske kontinuumsproblemer har spændingshybride elementer vist sig at være et værdifuldt supplement til de sædvanlige flytningselementer, se f.eks. Pian og Tong [1]. Dette skyldes dels, at det spændingshybride element ofte giver nøjagtigere resultater, dels at det kan være simplere at vælge de felter, det spændingshybride element er baseret på fremfor de felter, flytningselementet er baseret på. Medens det spændingshybride element er baseret på et spændingsfelt i elementets indre, der opfylder de dergældende ligevægtsbetingelser samt et flytningfelt på elementets rand, er flytningselementet baseret på et kontinuert flytningfelt defineret i hele elementet. For både det spændingshybride element og flytningselementet gælder, at der skal være flytningskontinuitet mellem naboelementer. Da flytningselementets felter opfylder de geometriske betingelser betegnes flytningselementet ofte det kompatible element.

En vigtig egenskab ved flytningselementet, der simplificerer dets anvendelse ved dynamiske problemer, er, at dets stivhedsmatrix er den samme i såvel det statiske som det dynamiske tilfælde. Det vises i det følgende, hvorledes det spændingshybride element skal opbygges for at bevare denne egenskab. Dungar m.fl. [2] forudsætter denne egenskab uden at eftervise den. Tabarrok's [3] spændingshybride element har frekvensafhængig stivhedsmatrix. Tong m.fl. [5] opbygger nogle hybride elementer med frekvensuafhængige stivhedsmatricer, men disse indeholder ikke i almindelighed det spændingshybride element.

Som i ovennævnte artikler benyttes i det følgende den sædvanlige 1. ordens teori, hvor flytninger og tøjninger regnes infinitesimale, og hvor ligevægtsbetingelserne opstilles ud fra det udeformerede legemes geometri.

2. Kontinuummekanisk grundlag.

Der betragtes et 3-dimensionalt legeme V med overfladen A i det retvinklede kartesiske højrekoordinatsystem x_1, x_2, x_3 . Normalen n_i til A er rettet bort fra legemet V , se fig. 1. På randdelen A_T er randspændingerne $\bar{T}_i(x_i, t)$ foreskrevet, medens flytningerne $\bar{u}_i(x_i, t)$ er foreskrevet på resten af randen A_U . I legemets indre V er belastningen $\bar{q}_i(x_i, t)$ foreskrevet.

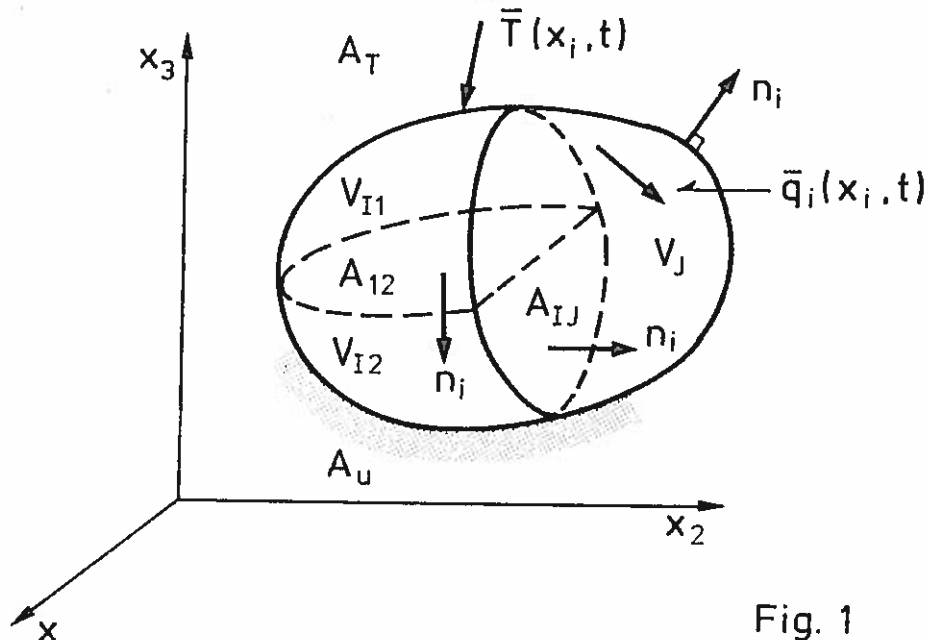


Fig. 1

Legemet deles i 2 elementer I og J af fladen A_{IJ} med normalen n_i rettet fra I til J . Element I har volumen V_I og overfladen A_I , der som A opspaltes i A_{IU} og A_{IT} . Analogt for element J . For at kunne undersøge virkningen af diverse diskontinuiteter ikke alene mellem elementerne, men også i elementernes indre, indføres fladen A_{12} , som deler element I i 2 dele V_{I1} og V_{I2} . Normalen n_i til A_{12} er rettet fra V_{I1} til V_{I2} . V_{I1} og V_{I2} har overfladen A_{I1} henholdsvis A_{I2} .

Kravene til kontinuitet og differentiabilitet er ikke nødvendigvis de samme hen over A_{12} , hen over A_{IJ} og i den øvrige del af legemets indre: $V_{I1} + V_{I2} + V_J$.

Legemets massefylde betegnet $\rho = \rho(x_i)$.

Påvirkningerne på legemet antages at variere harmonisk med tiden

t, d.v.s.:

$$\bar{T}_i(x_i, t) = \bar{T}_i(x_i) \sin \omega t \quad \text{på } A_T \quad (2.1)$$

$$\bar{q}_i(x_i, t) = \bar{q}_i(x_i) \sin \omega t \quad \text{i } V \quad (2.2)$$

$$\bar{u}_i(x_i, t) = \bar{u}_i(x_i) \sin \omega t \quad \text{på } A_U \quad (2.3)$$

hvor ω er den cykliske frekvens.

I det følgende angives amplituden af en størrelse ofte uden argument, f.eks. betegnes $\bar{T}_i(x_i)$ med \bar{T}_i , medens argumenterne x_i og t altid medtages, hvis de begge indgår, som f.eks. i $\bar{T}_i(x_i, t)$.

2.1 Stationær komplementær energi.

Idet spændingstensoren betegnes σ_{ij} , flytningsvektoren u_i , og der betragtes et lineærelastisk materiale med en positiv definit komplementær tøjningsenergi $\frac{1}{2} C_{ijkl} \sigma_{ij} \sigma_{kl}$ ($C_{ijkl} = C_{jikl} = C_{klij}$) bliver funktionalen π_C for variationsprincippet stationær komplementær energi:

$$\pi_C(\sigma_{ij}, u_i) = \int_{V_{I1}+V_{I2}+V_J} (\frac{1}{2} C_{ijkl} \sigma_{ij} \sigma_{kl} - \frac{1}{2} \rho \omega^2 u_i u_i) dV - \int_{A_U} \bar{u}_i \sigma_{ij} n_j dA \quad (2.4)$$

med ligevægtsbetingelserne som sidebetingelser:

$$\sigma_{ij,j} + \bar{q}_i + \rho \omega^2 u_i = 0 \quad \text{i } V_{I1}+V_{I2}+V_J \quad (2.5)$$

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ji} \quad \text{i } V_{I1}+V_{I2}+V_J \quad (2.6)$$

$$(\sigma_{ij}^{(2)} - \sigma_{ij}^{(1)}) n_j = 0 \quad \text{på } A_{I2}+A_{IJ} \quad (2.7)$$

$$\sigma_{ij} n_j = \bar{T}_i \quad \text{på } A_T \quad (2.8)$$

$\sigma_{ij}^{(2)}$ er spændingerne umiddelbart op ad den tilknyttede flade på den side af fladen, fladenormalen peger mod. $\sigma_{ij}^{(1)}$ er de tilsvarende spændinger på den anden side af fladen.

Variationsprincippet kontrolleres ved, at dets eulerligninger skal give resten af de fysiske, statiske og geometriske betingelser, som ikke indgår i sidebetingelserne. Eulerligningerne fremkommer ved at kræve π_C stationær:

$$\delta \pi_c = \frac{\partial \pi_c}{\partial \sigma_{ij}} \delta \sigma_{ij} + \frac{\partial \pi_c}{\partial u_i} \delta u_i = 0$$

for faste værdier af σ_{ij} og u_i og alle variationer $\delta \sigma_{ij}$ og δu_i , der er tilladelige, d.v.s. $\sigma_{ij} + \delta \sigma_{ij}$ og $u_i + \delta u_i$ skal opfylde sidebetingelserne og $\pi(\sigma_{ij} + \delta \sigma_{ij}, u_i + \delta u_i)$ skal have en endelig værdi. Specielt skal $\delta \sigma_{ij} = \delta u_i = 0$ være tilladelige.

(2.4-8) viser da, at der ikke stilles kontinuitetskrav til at tilladeligt flytningsfelt u_i , medens et tilladeligt spændingsfelt skal have partielle afledede (ifølge (2.5)) i $V_{I1}+V_{I2}+V_J$ og opfylde en vis form for kontinuitet hen over $\Lambda_{12}+A_{IJ}$ nemlig (2.7).

Ud fra $\delta \pi_c = 0$ får man eulerligningerne:

$$C_{ijkl} \sigma_{kl} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) \quad \text{i } V_{I1}+V_{I2}+V_J \quad (2.9)$$

$$u_i = \bar{u}_i \quad \text{på } A_u \quad (2.10)$$

$$u_i^{(2)} = u_i^{(1)} \quad \text{på } A_{12}+A_{IJ} \quad (2.11)$$

der udgør resten af de fysiske, statiske og geometriske betingelser (med tøjningerne elimineret) for det betragtede legeme ged.

2.2 Modificeret komplementær energi.

Variationsprincippet stationær komplementær energi (2.4-8) danner grundlag for ligevægtselementet. Når dette modificeres ved at inddrage ligevægtsbetingelserne for spændinger på elementrandene i funktionalen får man det funktional, hvorpå det spændingshybride element er baseret. Altså: spændingsrandbetingelsen (2.8) indrages fuldstændigt, medens spændingskontinuitetsbetingelsen (2.7) stadig skal gælde hen over flader i elementernes indre, men ikke mellem elementerne. Man får da følgende funktional for det spændingshybride element:

$$\begin{aligned} \pi_{cm}(\sigma_{ij}, u_i, n_i) = & \int_{V_{I1}+V_{I2}+V_J} (\frac{1}{2} C_{ijkl} \sigma_{ij} \sigma_{kl} - \frac{1}{2} \rho \omega^2 u_i u_i) dV \\ & - \int_{A_I} n_i^I \sigma_{ij} n_j dA - \int_{A_J} n_i^J \sigma_{ij} n_j dA \\ & + \int_{A_{IT}^I} n_i^I \bar{T}_i dA + \int_{A_{JT}^J} n_i^J \bar{T}_i dA \end{aligned} \quad (2.12)$$

hvor lagrangemultiplikatorerne $\eta_i^I = \eta_i^I(x_i)$, $x_i \in A_I$ og $\eta_i^J = \eta_i^J(x_i)$, $x_i \in A_J$ skal opfylde:

$$\eta_i^I = \eta_i^J \quad \text{på } A_{IJ} \quad (2.13)$$

$$\eta_i^I = \bar{u}_i \quad \text{på } A_{Iu} \quad (2.14)$$

$$\eta_i^J = \bar{u}_i \quad \text{på } A_{Ju} \quad (2.15)$$

Sidebetingelserne til variationsprincippet med funktionalen (2.12) er da (2.5-6), (2.13-15) samt

$$(\sigma_{ij}^{(2)} - \sigma_{ij}^{(1)})n_j = 0 \quad \text{på } A_{12} \quad (2.16)$$

Lagrangemultiplikatorerne η_i^I og η_i^J tolkes ved at kræve $\pi_{cm}(\sigma_{ij}, u_i, \eta_i)$ stationær. Det viser sig, at:

$$\eta_i^I = u_i \quad \text{på } A_I \quad (2.17)$$

$$\eta_i^J = u_i \quad \text{på } A_J \quad (2.18)$$

η_i^I betegnes derfor element I's randflytninger.

Tolkningen af η_i^I som flytninger (2.17) medfører, at u_i og η_i kan vælges afhængigt eller uafhængigt efter behag i (2.12) med tilhørende sidebetingelser svarende til om (2.17-18) er indsat i disse eller ej.

Funktionalen (2.12) med tilhørende sidebetingelser viser, at der ikke stilles kontinuitetskrav til et tilladeligt flytningsfelt u_i , at et tilladeligt randflytningsfelt η_i skal være kontinuert over A_{IJ} og endelig, at tilladeligt spændingsfelt skal have partielle afledede i V_1+V_2 , ikke opfylde nogen kontinuitetskrav over fladen A_{IJ} , men derimod opfylde spændingskontinuitetsbetingelsen på flader i elementernes indre (ifølge (2.16)).

Følgende form af (2.12) kan være nyttig. Den er baseret på, at randflytningsfeltet η_i^I udstrækkes kontinuert og med partielle afledede over hele element I:

$$\pi_{cm}(\sigma_{ij}, u_i, \eta_i) = \int_{V_{I1}+V_{I2}+V_J} (\frac{1}{2}C_{ijkl}\sigma_{ij}\sigma_{kl} - \frac{1}{2}\rho\omega^2 u_i u_i)$$

$$\begin{aligned}
 & - \eta_{i,j} \sigma_{ij} + \eta_i \bar{q}_i + \rho \omega^2 u_i \eta_i) dV \\
 & + \int_{A_{IT}} \eta_i^I \bar{T}_i dA + \int_{A_{JT}} \eta_i^J \bar{T}_i dA \quad (2.19)
 \end{aligned}$$

3. Elementmetodeligninger.

3.1 Generelt.

Elementmetodeligningerne baseret på et variationsprincip fremkommer på følgende måde:

- a. I hvert element vælges de felter, der ifølge variationsprincippetets funktional π kan variere, normalt på nær nogle parametre q_n^I ($n = 1, 2, \dots$ DOFEL = degrees of freedom pr. element og $I = 1, 2, \dots$ NEL = number of elements). De valgte felter skal være tilladelige for vilkårlige værdier af parametrene q_n^I , altså opfylde sidebetingelserne og diverse kontinuitets- og differentiabilitetskrav. Herved fås sædvanligvis nogle bånd mellem parametrene q_n^I . De uafhængige parametre betegnes q_m ($m = 1, 2, \dots$ DOFOS = degrees of freedom of system).
- b. De valgte felter indsættes i funktionalen π . Herved bliver π en funktion af parametrene q_m .
- c. Elementmetodeligningerne fås nu ved at kræve $\pi(q_m)$ stationær, d.v.s. der fremkommer DOFOS ligninger:

$$\frac{\partial \pi}{\partial q_m} = 0 \quad m = 1, 2, \dots \text{DOFOS} \quad (3.1)$$

3.2 Hybridt element.

Det hybride element baseres på variationsprincippet med funktionalen (2.12) og sidebetingelserne (2.5-6), (2.13-15) og (2.16-18).

Idet $\{a\}$ betegner en søjlevektor, $[a]$ en matrix og de transponerede betegnes $\{a\}^T$ og $[a]^T$, skrives de valgte felter i element I på formen:

$$\{u\}_I = [N]_I \{v\}_I \quad i \ V_I \quad (3.2)$$

$$\{\sigma\}_I = \{\sigma^s\}_I + \{\sigma^d\}_I \quad i \ V_I \quad (3.3)$$

$$\{\sigma^s\}_I = [P]_I \{\beta\}_I + \{\sigma 1\}_I \quad \text{i } V_I \quad (3.4)$$

$$\{\sigma^d\}_I = \rho \omega^2 [PS]_I \{v\}_I \quad \text{i } V_I \quad (3.5)$$

hvor de frie parametre består af spændingsparametrene $\{\beta\}_I$ og knudeflytningerne $\{v\}_I$. Spændingsbidraget $[P]_I \{\beta\}$ tilfredsstiller de homogene statiske betingelser $\sigma_{ij,j} = 0$ i V_I , $\{\sigma 1\}_I$ er en partikulær løsning til de statiske betingelser i V_I $\sigma_{ij,j} + \bar{q}_i = 0$, medens $[PS]_I$ er valgt således, at spændingsbidraget $\{\sigma^d\}_I$ er i ligevægt med inertikraftbidraget forårsaget af det valgte flytningsfelt. Ifølge afsnit (2.2) skal flytningerne ikke være kontinuerte i elementets indre, men kun over elementrandene. Dette sidste krav omformuleres til kontinuitet i knudeflytninger ved at vælge $[N]_I$ således på elementets rand, at kontinuitet af knudeflytninger i alle knuder, der er fælles for 2 elementer, medfører kontinuitet af flytninger langs hele den fælles elementrand.

Både her og senere er afhængigheden af ω^2 angivet eksplicit.

Ud fra (3.3-5) bestemmes elementets randspændinger $\{T\}_I$:

$$\{T\}_I = [F]_I \{\beta\}_I + \{T1\}_I + \rho \omega^2 [FS]_I \{v\}_I \quad (3.6)$$

$\{T\}_I$ er matrixformen af snitspændingerne $T_i = \sigma_{ij} n_j$. Matricerne $[F]_I$, $\{T1\}_I$ og $[FS]_I$ er bestemt ved normalen n_j til elementets rand samt af henholdsvis $[P]_I$, $\{\sigma 1\}_I$ og $[PS]_I$.

De valgte felter (3.2-5) indsættes i funktionalen (2.12). Herved fås:

$$\begin{aligned} \pi_{cm}(\beta_I, v_I) = & \sum_{I=1}^{NEL} \left(\frac{1}{2} \{\beta\}_I^T [H]_I \{\beta\}_I + \omega^2 \{\beta\}_I^T [HS]_I \{v\}_I \right. \\ & + \frac{1}{2} \omega^4 \{v\}_I^T [HSS]_I \{v\}_I + \{\beta\}_I^T \{H1\}_I + h1_I \\ & - \{v\}_I^T [G]_I \{\beta\}_I + \{v\}_I^T (\{R1\}_I + \omega^2 \{R1S\}_I) \\ & \left. - \frac{1}{2} \omega^2 \{v\}_I^T ([m]_I + [ms]_I) \{v\}_I \right) \end{aligned} \quad (3.7)$$

hvor

$$[H]_I = \int_{V_I} [P]_I^T [C] [P]_I dV \quad (3.8)$$

$$[HS]_I = \int_{V_I} \rho [P]_I^T [C] [PS]_I dV \quad (3.9)$$

$$[HSS]_I = \int_{V_I} \rho^2 [PS]_I^T [C] [PS]_I dV \quad (3.10)$$

$$\{H1\}_I = \int_{V_I} [P]_I^T [C] \{\sigma 1\}_I dV \quad (3.11)$$

$$h1_I = \frac{1}{2} \int_{V_I} \{\sigma 1\}_I^T [C] \{\sigma 1\}_I dV \quad (3.12)$$

$$[G]_I = \int_{A_I} [N]_I^T [F]_I dA = \int_{V_I} [B]_I^T [P] dV \quad (3.13)$$

$$\{R1\}_I = \int_{A_I} [N]_I^T \{T1\}_I dA + \int_{A_{IT}} [N]_I^T \{\bar{T}\} dA \quad (3.14)$$

$$\{R1S\}_I = \int_{V_I} \rho [PS]_I^T [C] \{\sigma 1\}_I dV \quad (3.15)$$

$$[m]_I = \int_{V_I} \rho [N]_I^T [N] dV \quad (3.16)$$

$$[ms]_I = \int_{A_I} \rho ([N]_I^T [FS]_I + [FS]_I^T [N]_I) dA \quad (3.17)$$

$[G]_I$ kan udtrykkes som volumenintegral ud fra (2.19), idet $[B]_I$ i $\{e\}_I = [B]_I \{v\}_I$ bestemmer flytningsgradient- eller tøjningsfordelingen $\{e\}_I$ svarende til randflytningsfeltet n_I^I udstrakt over elementet.

Medens spændingsparametrene alle er uafhængige er der bånd mellem knudedeflytningerne, idet elementerne skal hænge sammen i knuderne og opfylde de geometriske randbetingelser. Dette udtrykkes ved:

$$\{v\}_I = [L]_I \{v\} \quad I = 1, 2, \dots, NEL \quad (3.18)$$

hvor matricen $[L]_I$ angiver, hvorledes element I 's knudedeflytninger bestemmes ud fra et sæt uafhængige knudedeflytninger $\{v\}$, når de geometriske randbetingelser er opfyldt i knuderne.

Når $\pi_{cm}(\beta_I, v)$ kræves stationær m.h.t. $\{\beta\}_I$ fås:

$$\delta \pi_{cm} = \delta \{\beta\}_I^T ([H]_I \{\beta\}_I + \omega^2 [HS]_I \{v\}_I + \{H1\}_I - [G]_I^T \{v\}_I)$$

Forudsat $[H]_I$ kan inverteres fås heraf:

$$\{\beta\}_I = [H]_I^{-1} ([G]_I^T \{v\}_I - \omega^2 [HS]_I \{v\}_I - \{H1\}_I) \quad (3.19)$$

(3.19) indsættes i (3.7), hvorved fås:

$$\begin{aligned} \pi_{cm}(v_I) = & - \sum_{I=1}^{NEL} (\frac{1}{2} \{v\}_I^T ([k]_I - \omega^2 [mt]_I - \omega^4 [mss]_I) \{v\}_I \\ & - \{v\}_I^T (\{R\}_I + \omega^2 \{RS\}_I) + h_I) \end{aligned} \quad (3.20)$$

hvor

$$[k]_I = [G]_I [H]_I^{-1} [G]_I^T \quad (3.21)$$

$$[mt]_I = -[m]_I - [ms]_I + [C]_I [H]_I^{-1} [HS]_I + [HS]_I [H]_I^{-1} [G]_I^T \quad (3.22)$$

$$[mss]_I = [HSS]_I - [HS]_I^T [H]_I^{-1} [HS]_I \quad (3.23)$$

$$\{R\}_I = \{R1\}_I + [G]_I [H]_I^{-1} [H1]_I \quad (3.24)$$

$$\{RS\}_I = \{R1S\}_I - [HS]_I^T [H]_I^{-1} [H1]_I \quad (3.25)$$

$$h_I = -h1_I + \frac{1}{2} [H1]_I^T [H]_I^{-1} [H1]_I \quad (3.26)$$

Idet knuderne sammenkobles ifølge (3.18) fås af (3.20) følgende elementmetodeligninger:

$$([K] - \omega^2 [MT] - \omega^4 [MSS]) \{v\} = \{R\} + \omega^2 \{RS\} \quad (3.27)$$

hvor

$$[K] = \sum_{I=1}^{NEL} [L]_I^T [k]_I [L]_I \quad (3.28)$$

$$[MT] = \sum_{I=1}^{NEL} [L]_I^T [mt]_I [L]_I \quad (3.29)$$

$$[MSS] = \sum_{I=1}^{NEL} [L]_I^T [mss]_I [L]_I \quad (3.30)$$

$$\{R\} = \sum_{I=1}^{NEL} [L]_I^T \{R\}_I \quad (3.31)$$

$$\{RS\} = \sum_{I=1}^{NEL} [L]_I^T \{RS\}_I \quad (3.32)$$

De globale massematricer [MT] og [MSS] opbygges åbenbart på samme måde af de lokale massematricer [mt]_I henholdsvis [mss]_I, som den globale stivhedsmatrix [K] af de lokale stivhedsmatricer [k]_I. Tilsvarende opbygges det dynamiske højresidebidrag {RS} af de dynamiske højresidebidrag {RS}_I fra de enkelte elementer som {R} af {R}_I.

Til sammenligning anføres elementmetodeligningerne for det statiske tilfælde ([K] og {R} som i (3.27)):

$$[K] \{v\} = \{R\} \quad (3.33)$$

og at flytningselementet baseret på (3.2) ville have medført elementmetodeligninger af formen

$$([K_f] - \omega^2 [M]) \{v\} = \{R_f\} \quad (3.34)$$

hvor $[M]$ er opbygget af $[m]_I$ (se (3.16)) som $[K]$ af $[k]_I$. Den globale stivhedsmatrix $[K_f]$ og højresiden $\{R_f\}$ for flytningselementet afviger sædvanligvis fra $[K]$ og $\{R\}$ svarende til det spændingshybride element.

Leddene $\omega^2([M] - [M^T])\{v\}$, $\omega^4[MSS]\{v\}$ og $\omega^2\{RS\}$ synes derfor at være en art korrektionsled, når man sammenligner kompatible og spændingshybride elementer.

4. Inkonsistente elementer.

Ved et konsistent element forstås et element baseret på et variationsprincip. Sædvanligvis søger man at opstille konsistente elementer, idet løsninger baseret på disse konvergerer mod den korrekte løsning med finere elementinddeling, når man overholder visse regler ved valget af felterne i elementet, se f.eks. Strang og Fix [4]. Inkonsistente elementer kan dog have samme egenskab, f.eks. når de er opnået ved at bortkaste led i funktionalen, som forsvinder, når elementstørrelsen går mod nul. Sådanne inkonsistente elementer undersøges i dette afsnit.

De følgende argumenter negligerer singularitetsproblemer.

For at beregne π_{cm} ifølge (2.19) med en fejl der går mod nul, er det åbenbart blot nødvendigt at kende følgende af de ubekendte størrelser i et enkelt punkt af hvert element, f.eks. i dets tyngdepunkt, nemlig σ_{ij} , u_i , $\eta_{i,j}$ og η_i , samt η_i i et punkt på elementranden A_{IT} .

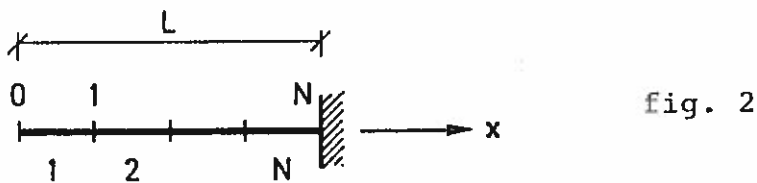
Når dette princip udnyttes i forbindelse med de valgte felter (3.2-5), forsvinder $[HS]_I$, $[HSS]_I$ og $\{R1S\}$, idet $[PS]_I$ uden tab af generalitet vælges til nul i integrationspunktet. (Konstanterne i $[PS]_I$ kan vælges vilkårligt, idet $[PS]_I$ kun indgår differenteret i ligevægtsbetingelserne, se (3.5) med kommentarer). Herved fås $[mt]_I = -[m]_I - [ms]_I$, der, såfremt u_i er kontinuert og har partielle afledede i V_I og er lig η_i på A_I , yderligere reduceres til $[mt]_I = [m]_I$ (ses af (2.19), idet man nu kan vælge $\eta_i = u_i$ i V_I).

$[MSS]$ og $\{RS\}$ i (3.27) repræsenterer altså tillægsled, der kan medtages uafhængigt af hinanden efter forgodtbefindende. De kan er

det tilladt, i stedet for [MT] i (3.27), at bruge massematricen [M] svarende til det kompatible element, hvis flytningsfelt på elementets rand er identisk med det spændingshybride elements rand-flytningsfelt.

5. Eksempler.

Det spændingshybride element udviklet i afsnit 3 anvendes til at bestemme den laveste egenfrekvens for en homogen stang, fri i den ene ende og fastholdt i den anden, se fig. 2.



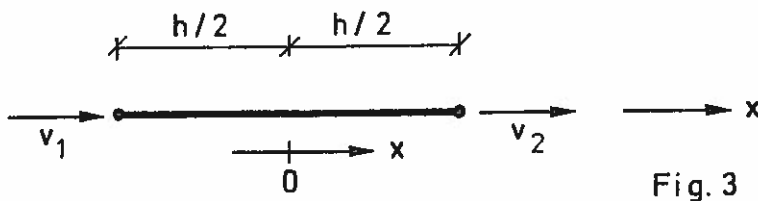
Stangen inddeles i N elementer af længden h. Stangens tværsnitsareal betegnes F og dens elasticitetsmodul E. Som fysisk betingelse anvendes $\sigma_{xx} = E\epsilon_{xx}$. Den eksakte værdi for den laveste egenfrekvens er da

$$\omega^2 = \frac{\pi^2}{4} \frac{E}{\rho L^2} \tag{5.1}$$

Der undersøges 3 elementer ST1, ST2 og ST3. Den statiske del af spændingsfeltet er for alle 3 elementer bestemt ved:

$$[P]_I = 1 \tag{5.2}$$

Den dynamiske del af spændingsfeltet er bestemt af flytningsfeltet. Flytningsfelterne er forskellige for de 3 elementer selvom knudeflytningerne $\{v\}_I^T = \{v_1 \ v_2\}$ er de samme, nemlig flytningerne af elementenderne i x-retningen, se fig. 3.



Flytningsfelter:

$$ST1: [N]_I = \begin{cases} [1 \ 0] & x = -\frac{h}{2} \\ [\frac{1}{2} \ \frac{1}{2}] & -\frac{h}{2} < x < \frac{h}{2} \\ [0 \ 1] & x = \frac{h}{2} \end{cases} \tag{5.3}$$

$$\text{ST2: } [N]_I = \begin{cases} [1 & 0] & -\frac{h}{2} \leq x < 0 \\ [0 & 1] & 0 \leq x \leq \frac{h}{2} \end{cases} \quad (5.4)$$

$$\text{ST3: } [N]_I = \left[\frac{1}{2} - \frac{x}{h} \quad \frac{1}{2} + \frac{x}{h} \right] \quad -\frac{h}{2} \leq x \leq \frac{h}{2} \quad (5.5)$$

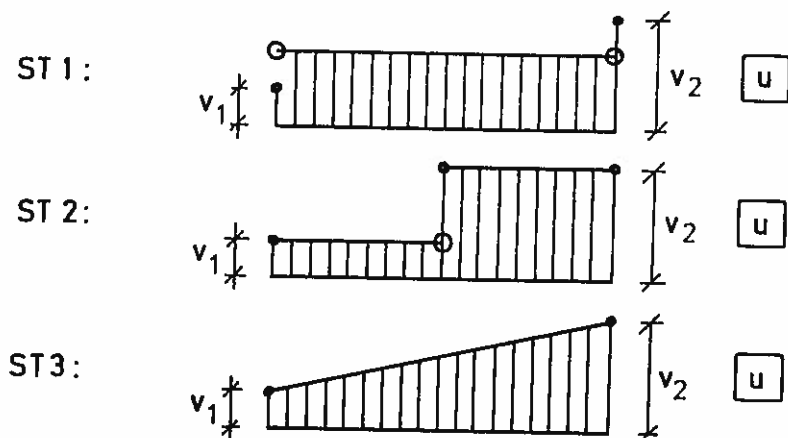


Fig. 4

Flytningsfelterne er tilladelige, da der ikke kræves kontinuitet m.h.t. x . Det skal dog være muligt for de valgte flytningsfelter at konvergere mod et kontinuert flytningsfelt, når elementstørrelsen går mod nul, da det virkelige flytningsfelt faktisk er kontinuert. Flytningsfelterne i ST1 og ST2 har denne egenskab, medens kontinuiteten på forhånd er opfyldt i ST3.

Elementerne er anvendt dels med dels uden tillægsmassetricen $[MSS]$, se (3.27). Det sidstnævnte giver ifølge afsnit 4 stadig konvergerende løsninger.

På fig. 5 er fejlen på de egenfrekvenser, der er bestemt ved hjælp af elementerne ST1, ST2 og ST3 afbildet som funktion af antallet af elementer, der er omvendt proportional med elementstørrelsen h . Da punkterne (evt. bortset fra de groveste elementinddelinger) omtrent ligger på rette linier i den valgte dobbeltlogaritmiske afbildning, kan fejlen $\Delta\omega$ på frekvensen ω skrives på formen

$$\Delta\omega = ch^p \quad (5.6)$$

hvor p (konvergensthastigheden) bestemmer liniens hældning, medens c (begyndelsesfejlen) bestemmer, hvor højt i diagrammet linien er placeret.

Fig. 5 viser i øvrigt, at ST3 med tillægsmasse har en konvergensthastighed på ca. 4, medens alle de øvrige elementer har en kon-

vergenshastighed på ca. 2. Disse konvergenshastigheder er teoretisk korrekte, som det fremgår af afsnit 6.

6. Konvergens.

Af hensyn til vurderingen af et givet element eller i forbindelse med udvikling af nye elementer er teoretiske kriterier for konvergenssegenskaberne naturligvis et stærkt besparende hjælpemiddel.

For flytningselementer er konvergenssegenskaberne velkendte, se f.eks. Strang og Fix [4], medens det ikke er tilfældet for de her undersøgte spændingshybride elementer.

Den i det følgende anvendte metode til bestemmelse af konvergenshastigheden for fejlen på egenfrekvensen er besværlig og ikke særlig generel. Derfor angives der også et udtryk for fejlen på egenfrekvensen, der ud fra ubeviste antagelser, som dog synes rimelige, giver en simpel bestemmelse af konvergenshastigheden.

6.1 Teoretisk konvergenshastighed.

Stivhedsmatricen $[k]_I$, massematricen $[m]_I$ og tillægsmassematricen $[mss]_I$ for elementet ST1 er:

$$[k]_I = f \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \text{ hvor } f = \frac{EF}{h} \quad (6.1)$$

$$[m]_I = f_t \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \text{ hvor } f_t = \frac{\rho F h}{4} \quad (6.2)$$

$$[mss]_I = f_s \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \text{ hvor } f_s = \frac{\rho^2 h^3 F}{48E} \quad (6.3)$$

Elementmetodeligningerne (3.27) kan da skrives på formen:

$$f(-v_{j-1} + 2v_j - v_{j+1}) - (\omega^2 f_t + \omega^4 f_s)(v_{j-1} + 2v_j + v_{j+1}) = 0 \quad (6.4)$$

hvor $j = 0, 1, 2 \dots N-1$, v_j er flytningen af knude j , $v_{-1} = v_1$ og $v_N = 0$.

Løsningen til (6.4) har formen:

$$v_j = c \cdot \cos \frac{j\pi}{2N} \quad (6.5)$$

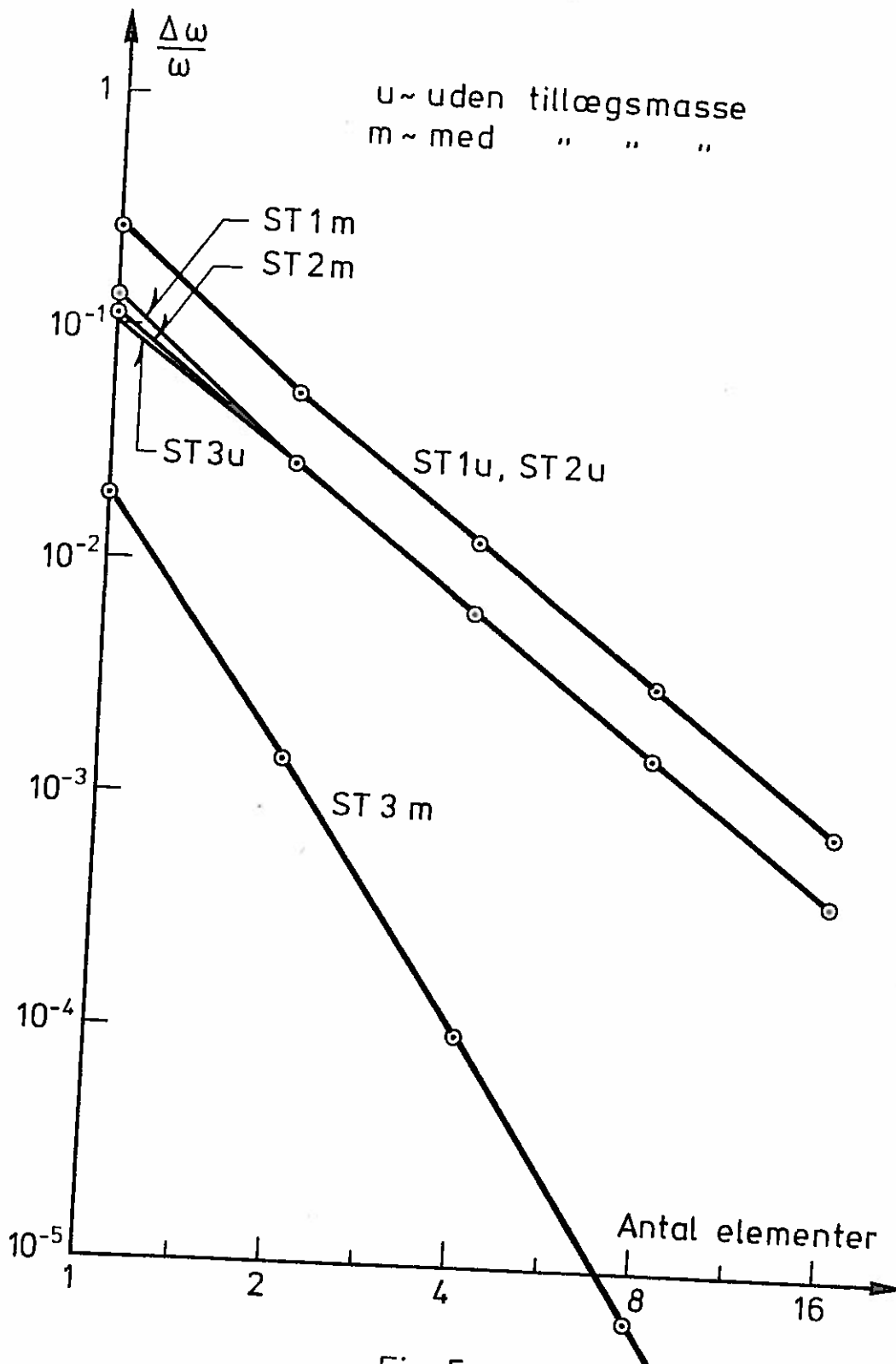
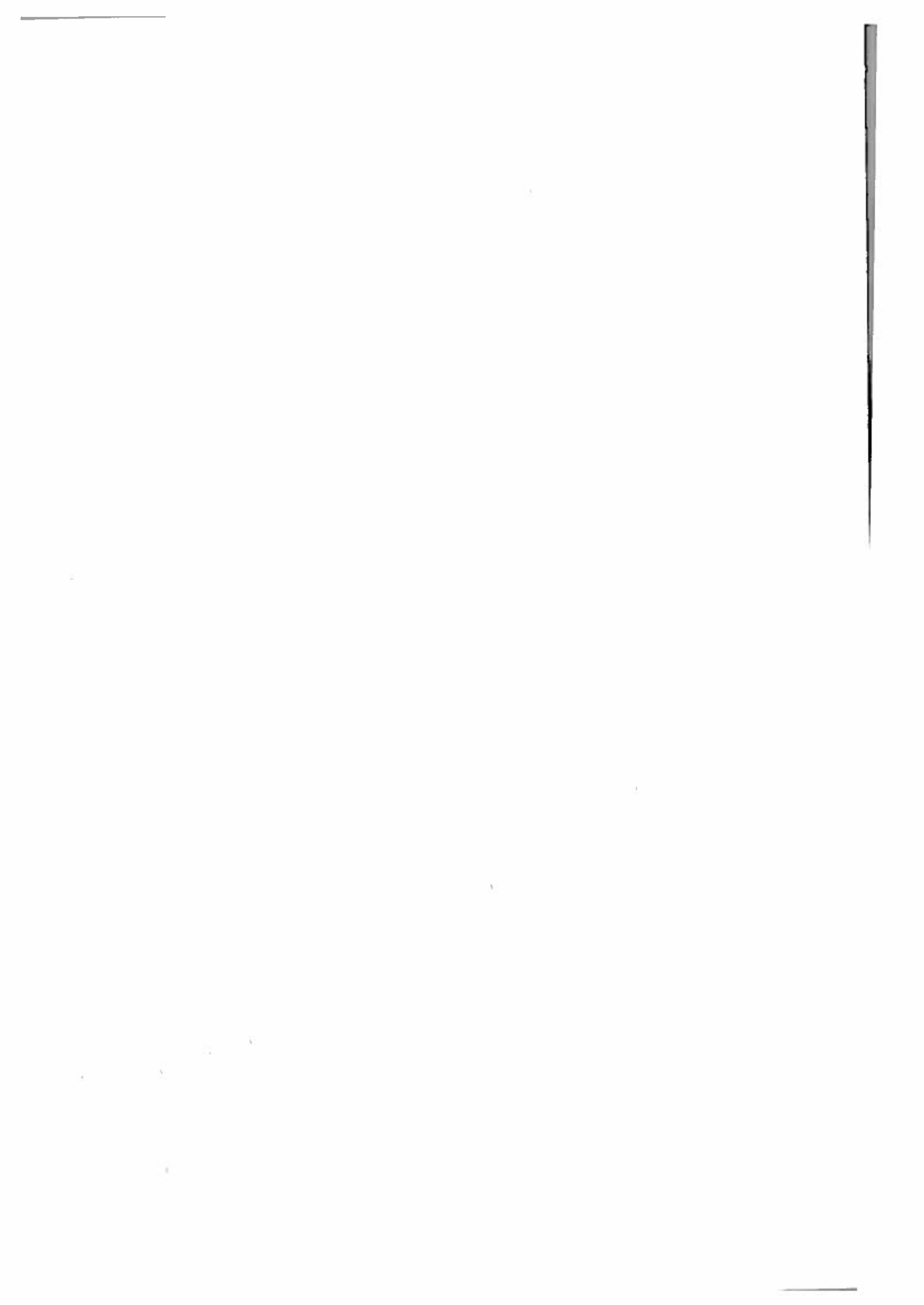


Fig. 5



hvor c er en konstant. Når (6.5) indsættes i (6.4) fås:

$$f_1 \sin^2 \alpha - (\omega^2 f_2 + \omega^4 f_3) \cos^2 \alpha = 0 \quad (6.6)$$

med $\alpha = \frac{\pi}{4N}$. Af (6.6) fås:

$$\omega^2 = \frac{\pi^2 E}{4\rho L^2} + O(h^2) \quad (6.7)$$

Når ω^2 ifølge (6.7) sammenlignes med det eksakte udtryk (5.1), ser man, at fejlen på $\omega^2 = O(h^2)$, d.v.s.:

$$\Delta\omega = O(h^2) \quad (6.8)$$

Udelades tillægsmassen, d.v.s. f_3 sættes lig nul, fås ligeledes resultatet (6.8).

For elementerne ST2 og ST3 forløber beregningerne analogt og giver de i afsnit 5 angivne, numerisk bestemte konvergensthastigheder.

6.2 Postuleret konvergenzkriterium.

I dette afsnit 6.2 betegnes den eksakte løsning σ_{ij} , $u_i = \eta_i$, ω^2 , medens elementløsningen betegnes med øvre indeks h , altså σ_{ij}^h , u_i^h , η_i^h , $(\omega^h)^2$. Forskellen mellem den eksakte og elementløsningen betegnes $\Delta\sigma_{ij}$, Δu_i , $\Delta\eta_i$, $\Delta(\omega^2)$, d.v.s. $\sigma_{ij} - \sigma_{ij}^h = \Delta\sigma_{ij}$ o.s.v.

Af udtrykkene (3.27) og (3.20) ses, at for fri svingninger er:

$$\pi_{cm}(\sigma_{ij}^h, u_i^h, \eta_i^h, (\omega^h)^2) = 0 \quad (6.9)$$

hvoraf følger:

$$\pi_{cm}(\sigma_{ij}, u_i, \eta_i, \omega^2) = 0 \quad (6.10)$$

Af (6.10) og (2.12) fås:

$$\pi_{cm}(\sigma_{ij}, u_i, \eta_i, (\omega^h)^2) = \Sigma \int_{V_I} \frac{1}{2} \rho \Delta\omega^2 u_i u_i dV \quad (6.11)$$

I venstre side af (6.11) indføres elementløsningen og forskellene mellem denne og den eksakte. (6.11) giver da:

$$\int_{V_I} \frac{1}{2} \rho \Lambda (\omega^2) u_i u_i dV = \pi_{cm}(\sigma_{ij}^h, u_i^h, \eta_i^h, (\omega^h)^2) + \pi_{cm}(\Delta \sigma_{ij}^h, \Delta u_i^h, \Delta \eta_i^h, (\omega^h)^2) \\ + \sum_I \left(\int_{V_I} (C_{ijkl} \sigma_{ij}^h \Delta \sigma_{kl} - \rho (\omega^h)^2 u_i^h \Delta u_i) dV \right. \\ \left. \int_{A_I} (\eta_i^I)^h \Delta \sigma_{ij} n_j + \Delta \eta_i^I \sigma_{ij}^h n_j \right) dA \quad (6.11a)$$

Elementmetodeligningerne er fremkommet ved, at (2.12) er krævet stationær under hensyntagen til sidebetingelserne d.v.s.

$$\sum_I \left(\int_{V_I} (C_{ijkl} \sigma_{ij}^h \delta \sigma_{kl} - \rho (\omega^h)^2 u_i^h \delta u_i) dV \right. \\ \left. + \int_{A_I} ((\eta_i^I)^h \delta \sigma_{ij} n_j + \delta \eta_i^I \sigma_{ij}^h n_j) dA \right) = 0 \quad (6.12)$$

hvor for $I = 1, 2, \dots, N$ EL:

$$\delta \sigma_{ij,j} + \rho (\omega^h)^2 \delta u_i = 0 \quad i \in V_I \quad (6.13)$$

$$\delta \sigma_{ij} = \delta \sigma_{ji} \quad i \in V_I \quad (6.14)$$

$$(\delta \sigma_{ij}^{(2)} - \delta \sigma_{ij}^{(1)}) n_j = 0 \quad \text{på } A_{12} \quad (6.15)$$

$$\delta \eta_i^I = \delta u_i \quad \text{på } A_I \quad (6.16)$$

Hvis $\Delta \sigma_{ij}, \Delta u_i, \Delta \eta_i$ opfylder betingelser af formen (6.13-16), kan (6.12) åbenbart bruges til at fjerne det led i (6.11a), der opstår ved summering over I . (6.13) giver imidlertid vanskeligheder.

Af (2.5) fås:

$$\sigma_{ij,j} + \rho \omega^2 u_i = 0$$

$$\sigma_{ij,j}^h + \rho (\omega^h)^2 u_i^h = 0$$

hvoraf

$$\Lambda \sigma_{ij} + \rho (\omega^h)^2 \Delta u_i + \rho \Lambda (\omega^2) u_i = 0 \quad (6.17)$$

Da (6.17) og (6.13) ikke har samme form, kan $\Lambda \sigma_{ij}, \Delta u_i, \Delta \eta_i$ ikke opfattes som variationer $\delta \sigma_{ij}, \delta u_i, \delta \eta_i$. I stedet for Δu_i i V_I indføres Λu_i^* i V_I bestemt ved:

$$\Lambda u_i = \Lambda u_i^* - \frac{u_i}{(\omega^h)^2} \Lambda (\omega^2) \quad i \in V_I \quad (6.18)$$

Når (6.18) indsættes i (6.17) og (6.11a) fås henholdsvis:

$$\Delta \sigma_{ij} + \rho(\omega^h)^2 \Delta u_i^* = 0 \quad (6.19)$$

og, idet (6.9) er anvendt:

$$\int_V \frac{1}{2} \rho \Delta(\omega^2) u_i u_i dV = \pi_{cm}(\Delta \sigma_{ij}^h, \Delta u_i^h, \Delta \eta_i^h, (\omega^h)^2) + \sum_I \left(\int_{V_I} (C_{ijkl} \sigma_{ij}^h \Delta \sigma_{kl} - \rho(\omega^h)^2 u_i^h \Delta u_i^*) dV \right) + \int_{A_I} ((\eta_i^I)^h \Delta \sigma_{ij} n_j + \Delta \eta_i^I \sigma_{ij}^h n_j) dA + \sum_I \int_{V_I} \rho u_i u_i^h \Delta(\omega^2) dV \quad (6.20)$$

Da (6.19) har formen (6.13) kan $\Delta \sigma_{ij}$, Δu_i^* , $\Delta \eta_i$ opfattes som variationer $\delta \sigma_{ij}$, δu_i , $\delta \eta_i$, d.v.s. (6.12) reducerer (6.20) til

$$\int_V \frac{1}{2} \rho \Delta(\omega^2) u_i u_i dV = \pi_{cm}(\Delta \sigma_{ij}^h, \Delta u_i^h, \Delta \eta_i^h, (\omega^h)^2) + \int_V \rho u_i u_i^h \Delta(\omega^2) dV$$

hvoraf

$$\Delta(\omega^2) = - \frac{\pi_{cm}(\Delta \sigma_{ij}^h, \Delta u_i^h, \Delta \eta_i^h, (\omega^h)^2)}{\int_V \frac{1}{2} \rho u_i u_i dV - \int_V \rho u_i \Delta u_i dV} \quad (6.21)$$

Hvis elementløsningen ikke er meget dårlig, kan andet led i nævneren i (6.21) negligeres. Indføres (2.19) i tælleren fås

$$\Delta(\omega^2) = \frac{\sum_I \int_{V_I} \frac{1}{2} C_{ijkl} \Delta \sigma_{ij} \Delta \sigma_{kl} - \frac{1}{2} \rho (\omega^h)^2 \Delta u_i \Delta u_i - \Delta \eta_{i,j} \Delta \sigma_{ij} + \rho (\omega^h)^2 \Delta u_i \Delta \eta_i}{\int_V \frac{1}{2} \rho u_i u_i dV} \quad (6.22)$$

For flytningselementer gælder følgende, se Strang og Fix [4]: Fejlen på elementløsningens flytninger er m.h.t. elementlængden h af samme størrelsesorden som fejlen på de interpolerede flytninger, d.v.s. de flytninger, der fås ved at interpolere den eksakte løsnings knudeflytninger med det valgte flytningsfelt.

For det spændingshybride element antages samme princip gyldigt, ikke alene for flytningerne, men også for spændingerne.

(6.22) kan da udnyttes til bestemmelse af konvergensthastigheden for $\Delta \omega =$ konvergensthastigheden for $\Delta(\omega^2)$.

ST1 med tillægsmasse:

Da u_x er stykkevis konstant, er fejlen på $u_x \sim h$, hvorefter følger (ved integration af (2.5)), at fejlen på $\sigma_{xx} \sim h^2$. Da $\eta_x = u_x$ i knuderne, er fejlen på $\eta_x \sim h$, d.v.s. fejlen på $\eta_{x,x} \sim 1$. (5.8)

giver da $\Delta\omega \sim h^2$.

ST2 med tillægsmasse: som ST1.

ST3 med tillægsmasse:

Fejl på $u_x \sim h^2 \Rightarrow$ fejl på $\sigma_{xx} \sim h^3$, d.v.s. $\Delta\omega \sim h^4$.

Når tillægsmassen ikke medtages, synes det vanskeligere at foretage en vurdering. Det skal ikke forsøges her.

Fremgangsmåden baseret på (6.22) synes altså brugbar omend et bevis for den forudsatte fejl på elementløsningen $\sigma_{ij}^h, u_i^h, \eta_i^h$ mangler.

7. Konklusion.

Der er udviklet et nyt spændingshybridt element til harmonisk påvirkede konstruktioner. 3 forskellige udgaver af elementet er anvendt til at bestemme den laveste egenfrekvens af en stang. Konvergensthastigheden af de fundne egenfrekvenser er vist at være i overensstemmelse med teoretiske betragtninger.

Summary.

The stress hybrid finite element of Pian is extended from static to vibration problems without changing the stiffness matrix. 3 types of this element are used to determine the first eigenvalue of a bar. The convergence rate of those eigenvalues is shown to be in accordance with a theoretical analysis.

- [1] Pian, T.H.H and P. Tong. Basis of finite element methods for solid continua.
Int. j. min. engrn., V.1, p. 3-28, 1969.
- [2] Dungar, R. R.T. Severn and P.R. Taylor.
Vibration of plate and shell structures using triangular finite elements.
Journal of strain anal., V.2, No. 1, p. 73-83, 1967.
- [3] Tabarrok, B. A variational principle for the dynamic analysis of continua by a hybrid finite element method.
Int. j. solids structures, V.7, p. 251-268, 1971.
- [4] Strang, G. and G.J. Fix. An analysis of the finite element method. 1973.
- [5] Tong, P., S.T. Man and T.H.H. Pian.
Derivation of geometric stiffness and mass matrices for finite element hybrid models.
Int. j. solids structures. 1974. V.10, p. 919-932.

