

AFDELINGEN FOR
BÆRENDE KONSTRUKTIONER
DANMARKS TEKNISKE HØJSKOLE



STRUCTURAL RESEARCH LABORATORY
TECHNICAL UNIVERSITY OF DENMARK

Max Elgaard Pedersen

EN 2. ORDENS TILNÆRMELSE TIL DE
KONSTITUTIVE LIGNINGER FOR BETON

RAPPORT NR. R 69 1976

ABSTRACT

Rapporten præsenterer resultaterne af en teoretisk undersøgelse af konstitutive ligninger med specielt henblik på anvendelser i forbindelse med betonmaterialer.

Undersøgelsen er foretaget på et kontinuummekanisk grundlag, og der er derfor indledt med en kort gennemgang af de generelle krav, som denne teori stiller til konstitutive ligninger, samt en omtale af de ekstrakrav, som man må stille til de 2 materialegrupper, som udgøres af de idealelastiske og hyperelastiske materialer. Endvidere er visse fordele og ulemper ved materialemodeller baseret på henholdsvis elastiske og plastiske betragtningsmåder belyst.

Et betonmaterials konstitutive ligninger er forskellige ved belastning og aflastning på grund af dissipation af tøjningsenergi. I Kapitel 4 foreslås de konstitutive ligninger ved belastning gældende for generelle spændingstilstande givet ved en 2.ordens tilnærmelse til de konstitutive ligninger for et hyperelastisk materiale, idet opførslen af den lineærelastisk-plastiske beton under stigende belastning ikke kan skelnes fra opførslen af et ikke-lineært hyperelastisk materiale.

Til beskrivelse af aflastningen er opstillet en modificeret udgave af den lineære Hooke's lov gældende for generelle spændingstilstande, idet kun de elastiske tøjninger ændres ved aflastning. Endvidere foreslås den hyperelastiske tøjningsenergifunktion anvendt som aflastningskriteriefunktion. En stigning henholdsvis et fald i funktionsværdien ved en given tøjningsændring svarer til en yderligere belastning henholdsvis en aflastning.

Afslutningsvis er der omtalt et par af de mest realistiske, publicerede brudbetingelser for beton gældende for generelle spændingstilstande.

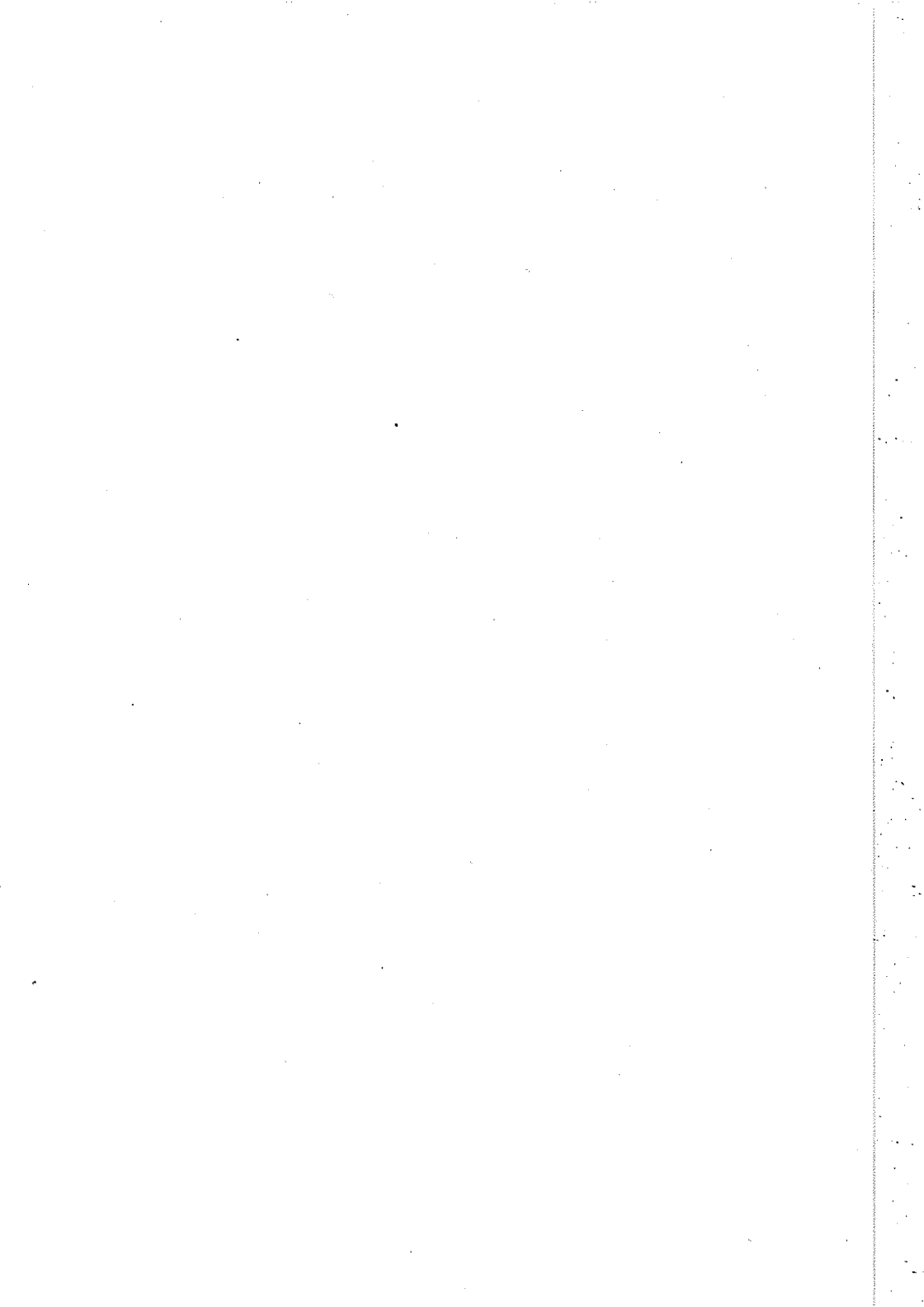
INDHOLDSFORTEGNELSE

Abstract

Indholdsfortegnelse

1.	Indledning	1
2.	Teorien for konstitutive ligninger	2
2.1	Konstitutive ligninger generelt	2
2.2	Ideal- og hyperelasticitet	4
2.3	Tøjningsenergifunktionen	5
3.	Metoder til opbygning af 3-dimensionale konstitutive ligninger for beton	8
3.1	Den "elastiske" model	8
3.2	Plastiske modeller	9
3.3	Diskussion af modellerne	11
4.	Forslag til en 2.ordens tilnærmelse til de konstitutive ligninger for beton	13
4.1	De konstitutive ligningers form	13
4.2	Rækkeudvikling af de konstitutive ligninger	14
4.3	Poisson's forhold	16
4.4	Den 1-aksede spændingstilstand	23
4.5	Simpel forskydning	27
4.6	5-konstantstilnærmelsen	36
5.	Aflastning	39
5.1	Konstitutive ligninger ved aflastning	39
5.2	Aflastningskriterium	41
6.	Brudbetingelser	43
6.1	Nyere forslag til brudbetingelser	43
6.2	Ottosen's brudkriterium	44
7.	Konklusion	46
	Litteraturfortegnelse	48
	Appendix A	A1
	Kontinuummekanik	A1
	Appendix B	B1
	Cauchy's teorem om invariantfunktioner	B1
	Appendix C	B1
	Forskellige udformninger af de konstitutive ligninger for hyperelastiske materialer	B1

Appendix D	D1
Rækkeudvikling af de konstitutive ligninger	D1
Appendix E	E1
Partielle afledede af den Lagrange'ske tøjningstensors invarianter	E1



1. INDLEDNING

Behovet for udvikling af generelle konstitutive ligninger for beton er af stor betydning for analysen af komplekse, armerede betonkonstruktioner. Især den øgede anvendelse af triaksialt belastede betonkonstruktioner som f.eks. forspændte reaktortanke og reaktorindeslutninger, dæmninger og off-shore konstruktioner har øget betydningen af at få sådanne generelle ligninger formuleret.

Den virkelige opførsel af et betonmateriale er uhyre kompliceret, og enhver matematisk model til simulation af denne opførsel må derfor anvende betydelige idealisationer. I denne rapport betragtes betonen som et homogent og isotropt kontinuum, hvilket vil sige, at der er tale om en teori på et makroskopisk, fænomenologisk niveau.

På dette grundlag fremsættes der et forslag til en 2.ordens tilnærmelse til de generelle konstitutive ligninger for beton. Der tages endvidere hensyn til disse ligneders irreversible karakter, som skyldes tøjningsenergidissipationen, ved at opstille et sæt konstitutive ligninger for aflastning baseret på den lineære Hooke's lov.

I forbindelse med de konstitutive ligninger er det nødvendigt at anvende en brudbetingelse til afgrænsning af det fysisk realisable spændingsområde. En kortfattet diskussion af et par af de mest lovende brudbetingelser for beton gældende for generelle spændingstilstande er derfor medtaget.

2. TEORIEN FOR KONSTITUTIVE LIGNINGER

2.1 Konstitutive ligninger generelt

Den generelle teori for konstitutive ligninger er i det væsentlige udviklet inden for de sidste 25 år, hvor det især har været forskere som Rivlin, Truesdell, Green, Noll, Ericksen o.a., der har bidraget til de store landvindinger.

Et af de væsentligste resultater af denne forskning har været opstillingen af en række generelle principper og betingelser, som må kræves opfyldt for alle konstitutive ligninger. Her skal konstitutive ligninger opfattes i bredest mulige forstand, nemlig som en responsrelation mellem to eller flere variable, som foruden spændings- og tøjningsstørrelser kan inkludere termodynamiske, elektromagnetiske og kemiske størrelser.

I [Truesdell.1-66] og [Eringen.2-62] er der givet en udmærket beskrivelse af en række af de væsentligste betingelser. Med henvisning til disse referencer vil der her kun blive givet en oversigt over disse betingelser, som kan opdeles på følgende måde:

1. Udelukkelsesprincipper
 2. Betingelser for koordinatinvarians
 3. Betingelser for rumlig invarians
 4. Betingelser for materiel invarians
 5. Dimensionsinvarians
 6. Konsistensbetingelser
1. Udelukkelsesprincipper. Disse principper tjener til at udelukke visse variable eller definitionsområder for variable, som ikke kan optræde i nogen konstitutiv ligning. En sådan indkredsning er nødvendig, idet de generelle regler til udvælgelse af konstitutive variable naturligvis ikke kan definere det totale sæt af variable - og langt mindre disse størrelses indbyrdes funktionale sammenhænge.

Af udelukkelsesprincipperne er især det deterministiske princip, som kan opfattes som en sammensætning af et arveligheds- og et omegnsprincip, velkendt. Dette princip ud-siger, at opførslen af et materielt punkt X^K til tiden t

er bestemt af den forløbne bevægelseshistorie for en arbitrær lille omegn af x^K .

Af andre af denne type af principper kan man bl.a. nævne det elektromagnetiske tilstandsprincip, som omtaler indflydelsen af historien af det elektromagnetiske felt forud for tiden t .

2. Betingelser for koordinatinvarians. Koordinatinvarians kræver, at de konstitutive funktioner er absolutte tensorpunktsfunktioner af deres variable. Sådanne funktioner er invariante over for koordinattransformationer og kan opnås ved at skrive ligningerne på tensorform.
3. Betingelser for rumlig invarians. Disse betingelser betegnes også objektivitetsprincippet og udsiger, at de konstitutive ligninger er invariante over for stiftlegemebevægelser af de rumlige koordinater.
4. Betingelser for materiel invarians. (eller materiel isomorfi). Konstitutive ligninger, som er invariante med hensyn til en gruppe af transformationer af de materielle koordinater, der er en undergruppe af en fuld ortogonal gruppe, siges at have en materiel symmetri karakteriseret ved undergruppen.
5. Dimensionsinvarians. De konstitutive ligninger afhænger af antallet af dimensionsmæssigt invariante moduli eller materielle konstanter. Denne afhængighed kan dog ikke fastlægges uden kendskab til den funktionale form af ligningerne.
6. Konsistensbetingelser. Alle konstitutive ligninger skal være konsistente med de grundlæggende principper om masse, bevægelsesmængde, energi og elektromagnetisme.

Det fremgår af de seks punkter, at der er tale om meget generelle betingelser, hvilket de i sagens natur må være, da de skal kunne inkludere alle tænkelige konstitutive ligninger. En

mere specifik undersøgelse kan, som det er tilfældet i Afsnit 2.2, gennemføres ved at begrænse antallet af konstitutive variable, hvorved man får afgrænset en klasse af materialer.

2.2 Ideal- og hyper-elasticitet

En vigtig klasse af materialer udgøres af de ideal-elastiske materialer, som er karakteriseret ved, at spændingstilstanden udelukkende afhænger af den øjeblikkelige deformationstilstand. Konstitutive variable, som beskriver indflydelsen af belastningshistorien, elektromagnetiske, kemiske eller termiske fænomener, kan derfor ikke indgå i disse konstitutive ligninger. En vigtig egenskab ved de ideal-elastiske materialer, som også kaldes de Cauchy-elastiske materialer, er eksistensen af en "naturlig" eller spændingsløs tilstand, som materialet indtager, når de ydre kræfter fjernes.

En undergruppe af de Cauchy-elastiske materialer er de hyper-elastiske eller Green-elastiske materialer, som er karakteriseret ved, at der eksisterer en tøjningsenergifunktion, som endvidere skal være positiv definit. Eksistensen af en sådan tøjningsenergifunktion er i [Caprioli.3-55] vist at være en konsekvens af følgende to antagelser:

1. Spændingerne er en funktion af tøjningstensoren alene.
2. Det nødvendige arbejde til at deformere materialet fra den spændingsløse tilstand til enhver anden tilstand er ikke-negativt.

For de hyper-elastiske materialer er opgaven derfor reduceret til at bestemme en skalarfunktions funktionale sammensætning, idet spændingstensoren fås ved differentiation af tøjningsenergifunktionen med hensyn til elementerne i den tilhørende tøjningstensor. Da en positiv definit tøjningsenergifunktion kun eksisterer for et Cauchy-materiale, som samtidig er hyper-elastisk, må man i stedet for tøjningsenergien benytte den direkte sammenhæng mellem spændings- og tøjningstensor-

rerne som de grundlæggende ligninger for denne type af materialer.

Forskellen mellem de to typer kommer bl.a. til udtryk ved anvendelse af teorien for infinitesimale deformationer, hvor et Cauchy-materiale i det generelle tilfælde kræver bestemmelse af 36 uafhængige, elastiske konstanter, medens et hyper-elastisk materiale kun kræver 21 konstanter svarende til symmetri af responstensoren D^{ijkl} :

$$D^{ijkl} = D^{klij} \quad (2.1)$$

$$\sigma^{ij} = D^{ijkl} \cdot \epsilon_{kl} \quad (2.2)$$

D^{ijkl} indeholder 81 elastiske konstanter, men da både spændingstensoren σ^{ij} og tøjningstensoren ϵ_{kl} er symmetriske, kan der højst være 36 forskellige konstanter, som ved anvendelse af (2.1) yderligere reduceres til 21.

2.3 Tøjningsenergifunktionen

I dette afsnit betragtes kun hyper-elastiske materialer, idet der - som nævnt i Afsnit 2.2 - kun for disse eksisterer en tøjningsenergifunktion. I denne funktion Σ kan der højst indgå de i (2.3) angivne variable, idet disse omfatter samtlige variable med tilknytning til problemet.

$$\Sigma = \Sigma(X^K, x^k, g_K^k, \rho, \underline{G}_K, \partial x^k / \partial X^K) \quad (2.3)$$

X^K angiver de materielle koordinater, x^k de rumlige koordinater, ρ er massefylden i den deformerede tilstand, \underline{G}_K er den kovariante, materielle basis i referencetilstanden eller den spændingsløse tilstand, og $\partial x^k / \partial X^K$ er de rumlige flyttingsgradienter med hensyn til de materielle koordinater. g_K^k er en mikset metrisk tensor:

$$g_K^k = \underline{g}^k \cdot \underline{G}_K \quad , \quad (2.4)$$

hvor \underline{g}^k er den kontravariante, rumlige referencebasis. En eventuel afhængighed af g_K^k skyldes, at de rumlige og materielle koordinater udgør et 2-punkts-tensorfelt.

Ved benyttelse af de i Afsnit 2.1 angivne betingelser og Cauchy's teorem om invariantfunktioner af vektorsystemer (se Appendix B) kan (2.3) reduceres til:

$$\Sigma = \Sigma(X^K, \underline{G}_K, I_C, II_C, III_C) \quad , \quad (2.5)$$

hvor I_C , II_C og III_C er de tre invarianter for Green's deformationstensor.

Da der eksisterer entydige sammenhænge mellem de forskellige tensorer til beskrivelse af deformationstilstanden, kan tøjningsenergifunktionen angives som en funktion af enhver af disse tensorers invarianter. Af mulige tensorer kan man f.eks. nævne Green's deformationstensor C_{KL} , Cauchy's deformationstensor c_{kl} , Lagrange's tøjningstensor E_{KL} og Cauchy's tøjningstensor e_{kl} . Da en transformation imellem disse altid er mulig, vil den miksede Lagrange'ske tøjningstensor E_L^K blive benyttet i det følgende på grund af visse matematiske fordele, som er forbundet hermed. Udtrykket (2.5) kan med denne størrelse indsat skrives:

$$\Sigma = \Sigma(X^K, \underline{G}_K, I_E, II_E, III_E) \quad , \quad (2.6)$$

hvor I_E , II_E og III_E er den Lagrange'ske tøjningstensors invarianter.

Af (2.6) fremgår det, at tøjningsenergien afhænger af de materielle koordinater X^K . Energifordelingen er derfor ikke jævn, og materialet siges at være inhomogent. Hvis fordelingen derimod er jævn, betegnes materialet homogent, og den tilhørende tøjningsenergifunktion vil være uafhængig af de materielle koordinater. Af (2.6) ses det endvidere, at energifunktionen

afhænger af den materielle basis \underline{G}_K . En sådan afhængighed betyder, at tøjningsenergien er forskellig for forskellige deformationsretninger, og materialet betegnes derfor anisotropt. \underline{G}_K kan derfor ikke optræde i energifunktionen for isotrope materialer.

Det er nu muligt at opskrive tøjningsenergifunktionen for et homogent, isotropt og hyper-elastisk materiale, idet denne udelukkende afhænger af invarianterne for den valgte tøjningstensor. Man får

$$\Sigma = \Sigma(I_E, II_E, III_E) \quad (2.7)$$

En bestemmelse af den funktionale sammensætning af denne energifunktion er dog stadigvæk en umådelig og håbløs opgave for selv de simpleste materialer. Man er derfor henvist til på forskellig måde at søge tilnærmede løsninger til problemet. En sådan løsning med specielt sigte på betonmaterialer vil blive foreslået i Kapitel 4.

3. METODER TIL OPBYGNING AF 3-DIMENSIONALE KONSTITUTIVE LIGNINGER FOR BETON

De fleste undersøgelser af betonkonstruktioner begrænser sig til problemer, hvor brugen af 1-aksede spændings-tøjningsrelationer er tilstrækkelige. En sammenfatning og diskussion af forskellige, foreslåede 1-aksede relationer er foretaget i [Sargin.6-71] og [Popovics.7-70]. For visse, især nyere typer af konstruktioner - f.eks. reaktortanke og off-shore konstruktioner - er behovet for udvikling af 3-dimensionale konstitutive ligninger for betonmaterialer betydeligt, idet en beherskelse også af de komplekse spændingstilstande kan være af afgørende betydning for disse konstruktioner.

3.1 Den "elastiske" model

Skønt beton hverken er et kontinuum eller et elastisk-plastisk materiale, er en sådan betragtningstype stadig den eneste rationelle. På et makroskopisk, fænomenologisk niveau betragtes betonen derfor som et homogent og isotropt kontinuum med visse plastiske egenskaber, som skyldes de deformationer, der er forbundet med mikrorevnedannelser. På samme måde som metallers plastiske deformationer er disse deformationer irreversible, idet der ved revnedannelse sker en dissipation af den tilhørende tøjningsenergi. De resulterende deformationer består derfor af både elastiske og plastiske bidrag.

Hvis man betragter et belastningsforløb med udelukkende voksende belastning og dermed voksende deformationer, er det ikke muligt at afgøre, om betonen er elastisk-plastisk eller ikke-lineærelastisk med elastiske deformationer svarende til de totale deformationer. Det er derfor en tilladelig fremgangsmåde at opstille et betonmaterialers konstitutive ligninger for førstegangsbelastning på grundlag af tøjningsenergifunktionen for et hyperelastisk materiale. Ved aflastning anvendes den lineære, generaliserede Hooke's lov.

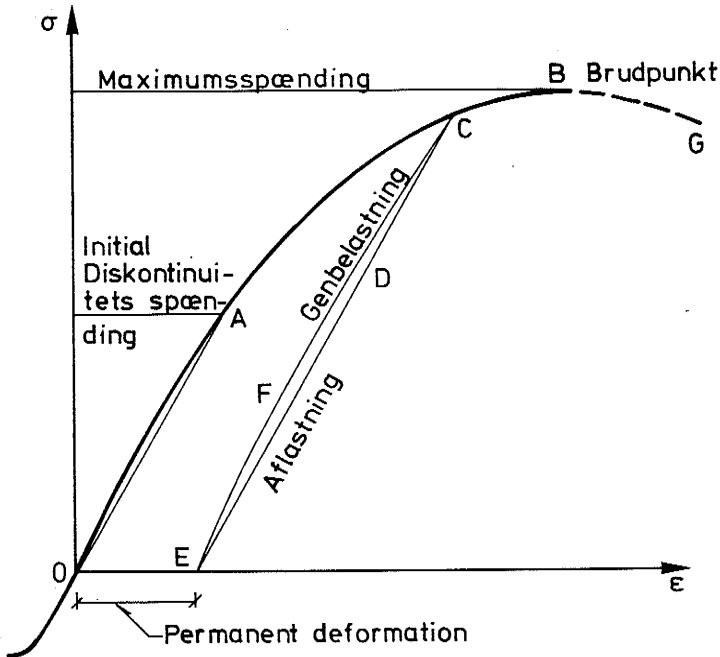


Fig.3.1: Arbejdskurve for 1-akset spændings-tilstand

3.2 Plastiske modeller

Disse modeller kan opbygges på basis af to forskellige typer af teorier - total- og incremental tøjningsteorierne - , som begge principielt giver en generalisation af den 1-aksede spændings-tilstand ved hjælp af en flydefunktion, se [Hencky.8-24], [Malvern.9-69] og [Chen.10-73].

Flydefunktionen ϕ skal her opfattes som et sæt af funktioner eller flader i spændingsrummet. Disse flader, som betegnes belastningsflader, kan variere mellem en initial diskontinuitetsflade [Newman.12-68] og en brudflade. For et materiale med isotrop tøjningshårdning er disse flader affine, se fig.3.2, medens de for det klassiske lineærelastisk-stiftplastiske materiale er sammenfaldende.

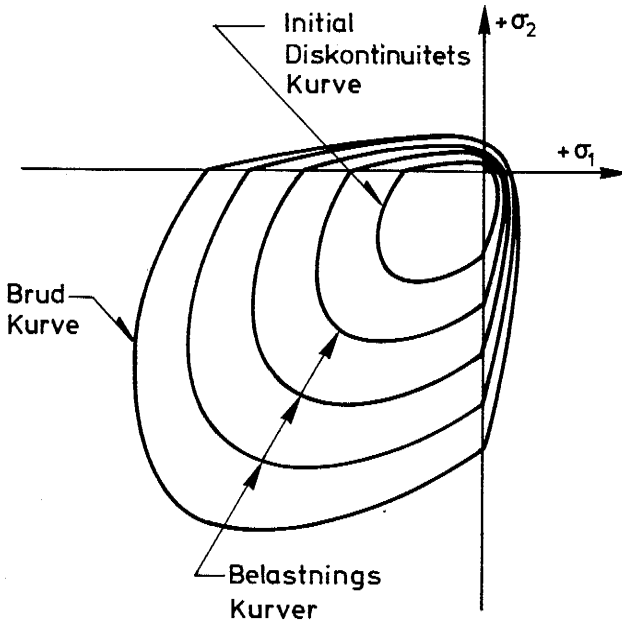


Fig.3.2: Initial diskontinuitets-, belastnings- og brudkurver i det biaxiale hovedspændingsrum

For materialer med isotrop tøjningshårdning afhænger belastningsfladerne kun af én parameter, som bestemmes ud fra fladernes skæring med arbejdskurven for den 1-aksede spændingstilstand. Idet der henvises til fig.3.1, indeholder diskontinuitets- og brudfladerne henholdsvis punkterne A og B, medens de mellemliggende belastningsflader indeholder punkter fra det åbne interval ACB.

I incremental-tøjningsteoriene kan de konstitutive ligninger eller fysiske betingelser, som bestemmer de plastiske tøjningstilvækster $d\epsilon_{ij}^{(p)}$, udtrykkes ved hjælp af plasticitetsteoriens normalitetsbetingelse [Drucker.13-51]:

$$d\epsilon_{ij}^{(p)} = \lambda \frac{\partial \phi}{\partial \sigma_{ij}} \quad (3.1)$$

Totaltøjningsteoriene benytter ofte den samme betingelse blot med de totale plastiske tøjninger $\epsilon_{ij}^{(p)}$ indsat:

$$\epsilon_{ij}^{(p)} = \lambda \frac{\partial \phi}{\partial \sigma_{ij}} \quad (3.2)$$

I de sidstnævnte teorier benyttes også andre typer af fysiske betingelser eller flydelove, se f.eks. [Hencky.8-24]:

$$\epsilon_{ij}^{(p)} = \psi \sigma'_{ij} \quad , \quad (3.3)$$

hvor ψ er en invariantfunktion, og σ'_{ij} er Cauchy's deviatorionsspændingstensor.

3.3 Diskussion af modellerne

Den væsentligste forskel på total- og incrementalmetoderne er, at incrementalteoriene medtager indflydelsen af den plastiske tøjningshistorie, medens dette ikke er muligt ved totalteoriene. Der kan derfor ved komplicerede belastningshistorier, hvilket vil sige store afvigelser fra proportional belastning, opstå divergenser mellem de to teorier. I [Greenberg.14-60]

og [Miller.15-67] er der dog ved numeriske beregninger vist nøje overensstemmelse mellem de to teorier selv ved store afvigelser fra proportional belastning.

En ulempe ved incrementalmetoden er, at den resulterer i meget komplicerede og uhåndterlige ligninger, som dog udmærket kan behandles numerisk f.eks. i forbindelse med elementmetoden. Det er endvidere en ulempe ved begge de plastiske metoder, at man kun kan fastlægge materialets karakteristika ved hjælp af arbejdskurven for den 1-aksede spændingstilstand, medens den øvrige del fastlægges af flydefunktionen i forbindelse med en matematisk bekvem hærtningsantagelse - isotrop, kinematisk el. lign.

Det er på denne baggrund, at den "elastiske" model foreslås som et alternativ, idet denne giver simple analytiske udtryk for de konstitutive ligninger udelukkende på grundlag af de givne materialekarakteristika.

4. FORSLAG TIL EN 2.ORDENS TILNÆRMELSE TIL DE KONSTITUTIVE LIGNINGER FOR BETON

I dette kapitel vil der blive udviklet en tilnærmet løsning til de konstitutive ligninger for beton på grundlag af tøjnings-energifunktionen for et homogent, isotropt og hyper-elastisk materiale. Denne løsning er kun gældende for voksende belastning, idet tøjningsenergidissipationen medfører, at de konstitutive ligninger er irreversible. Aflastningen må derfor beskrives ved et andet sæt ligninger, som normalt vil være den lineære Hooke's lov.

Beskrivelsen omfatter kun gentagne belastninger og aflastninger, hvis disse kan ske uden plastiske deformationer, medens førstegangsbekæmpelse og aflastning kan behandles uden denne indskrænkning.

De forskellige trin i opstillingen af den nævnte, tilnærmede løsning er opdelt i punkter svarende til dette kapitels afsnit.

4.1 De konstitutive ligningers form

I kapitel 2 blev der vist, at tøjningsenergifunktionen kun afhænger af invarianterne for den valgte tøjningstensor. Man kan derfor forholdsvis simpelt ud fra denne invariantfunktion fremstille forskellige udformninger af de konstitutive ligninger afhængig af hvilke spændings- og tøjningstensorer, man ønsker at benytte, se Appendix C.

En af de simpleste og mest anvendelige udformninger får man ved at benytte Kelvin-Cosserat's form:

$$T_L^K = \frac{\partial \Sigma}{\partial E_K^L} \quad (4.1)$$

som udtrykker sammenhængen mellem Piola-Kirchhoff's spændingstensor T_L^K , se Appendix A, og Lagrange's tøjningstensor E_L^K .

Man ser, at problemerne med den matematiske beskrivelse er løst for denne simple type af materialer. Det mere specifikke problem, som består i en fuldstændig opstilling af tøjningsenergifunktionen for et givet materiale, er derimod kun løst for ganske få materialer.

4.2 Rækkeudvikling af de konstitutive ligninger

En korrekt bestemmelse af tøjningsenergifunktionens funktionale sammensætning er - som tidligere nævnt - en håbløs opgave, og man er derfor henvist til at søge tilnærmede løsninger til problemet. Dette kan f.eks. gøres som vist i Appendix D eller endnu simplere her ved en direkte rækkeudvikling.

Idet det antages, at tøjningsenergifunktionen (2.7) er en analytisk funktion i tøjningsinvarianterne, kan en rækkeudvikling i disse invarianter til vilkårlig høj grad foretages ud fra den spændingsløse tilstand. Idet den Lagrange'ske tøjningstensor benyttes, får man:

$$\begin{aligned} \Sigma(I_E, II_E, III_E) = & a_0 + a_1 I_E + a_2 I_E^2 + a_3 II_E \\ & + a_4 I_E^3 + a_5 I_E II_E + a_6 III_E + \dots \end{aligned} \quad (4.2)$$

I (4.2) er leddene til og med 3.orden opskrevet. Hvis man udelader disse 3.ordens led og udtrykker de resterende konstanter - a_0 til a_3 - ved brug af Lamé-konstanterne - λ_E og μ_E :

$$\begin{aligned} a_0 &= a_0 , \\ a_1 &= \alpha_E , \\ a_2 &= (\lambda_E + 2\mu_E)/2 , \\ a_3 &= -2\mu_E , \end{aligned} \quad (4.3)$$

får man:

$$\Sigma(I_E, II_E, III_E) = a_0 + \alpha_E I_E + \frac{1}{2}(\lambda_E + 2\mu) I_E^2 - 2\mu_E II_E \quad (4.4)$$

Ved indsættelse af (4.4) i (4.1) og benyttelse af Appendix E fås, idet referencetilstanden antages spændingsløs ($\alpha_E = 0$):

$$T_L^K = \lambda_E I_E \delta_L^K + 2\mu_E E_L^K \quad (4.5)$$

Dette udtryk genkendes som Hooke's lov for store flytninger og tøjninger. Denne formel giver en lineær sammenhæng mellem spændinger og tøjninger, som for mange materialer - f.eks. armeringsstål - er en god tilnærmelse i store spændingsområder. For andre materialer - f.eks. beton - er overensstemmelsen mindre god, og man må derfor for disse materialer medtage led af højere orden i rækkeudviklingen.

Hvis man netop medtager led af 3.orden, får man den såkaldte Murnaghan-række, se [Murnaghan.16-37]:

$$\begin{aligned} \Sigma(I_E, II_E, III_E) = a_0 + \alpha_E I_E + \frac{1}{2}(\lambda_E + 2\mu_E) I_E^2 - 2\mu_E II_E \\ + \varrho_E I_E^3 + m_E I_E II_E + n_E III_E \end{aligned} \quad (4.6)$$

Ved partiel differentiation af denne række med elementerne i Lagrange's tøjningstensor - det vil sige anvendelse af (4.1) og Appendix E - får man det søgte udtryk for de konstitutive ligninger:

$$\begin{aligned} T_L^K = [\lambda_E I_E + (3\varrho_E + m_E) I_E^2 + (m_E + n_E) II_E] \delta_L^K \\ + [2\mu_E - (m_E + n_E) I_E] E_L^K + n_E E_M^K E_L^M \end{aligned} \quad (4.7)$$

Hvis man i dette udtryk kan bestemme de 5 indgående konstanter - λ_E , μ_E , ϱ_E , m_E og n_E - har man en approximation til de konstitutive ligninger for beton, som på et kontinuummekanisk grundlag er korrekt op til 2.orden.

Spændings- tøjningsrelationen (4.7) skal naturligvis ved bortkastning af 2.ordens leddene gå over i Hooke's lov (4.5), hvilket betyder, at λ_E og μ_E er de sædvanlige Lamé-konstanter.

$$\lambda_E = \frac{\nu E_0}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} \quad , \quad (4.8)$$

$$\mu_E = \frac{E_0}{2(1 + \nu)} \quad , \quad (4.9)$$

hvor E_0 - ikke at forveksle med den Lagrange'ske tøjningstensor $E_L^{K_0}$ - angiver initialelasticitetskoefficienten for 1-akset spændingstilstand, og ν er det tilhørende Poisson's forhold. Da E_0 og ν let kan bestemmes ved forsøg, er opgaven derfor reduceret til en bestemmelse af de 3 sidste konstanter l_E , m_E og n_E . En sådan bestemmelse må også basere sig på forsøgsresultater, og det er her det kniber, idet man til rådighed faktisk kun har de simple trykforsøg suppleret med målinger af tværkontraktionen. For andre typer af deformationstilstande er det overordentlig vanskeligt at måle 2.ordens effekterne, idet det er meget vanskeligt at tilvejebringe de rette forsøgsbetingelser.

4.3 Poisson's forhold

Inden man kan foretage en bestemmelse af konstanterne l_E , m_E og n_E , er det nødvendigt at foretage en diskussion af Poisson's forhold ν for betonmaterialer. Herved får man mulighed for at vurdere, om de begrænsninger, som man må pålægge ν i en 2.ordens teori, er acceptable.

ν defineres i kontinuummekanikken som det absolutte forhold mellem tvær- og længdetøjninger ved 1-akset spændingstilstand, hvorved ν er defineret ved udelukkende geometriske størrelser, se fig.4.1.

I forbindelse med trykforsøg med betoncylindre beregnes ofte en størrelse, som kan betegnes det incrementale Poisson's forhold, ν_{inc} . Denne størrelse beregnes som forholdet mellem tangentmodulerne for arbejdskurverne med trykspændingen som funktion af henholdsvis længde- og tværtøjningen. ν_{inc} angiver derfor det Poisson's forhold, som betonen på et givet spændingsniveau vil arbejde med ved en infinitesimal spændingsøgning.

Hvis de to arbejdskurver er affine med spændingsaksen som affinitetsakse, er ν og ν_{inc} identiske.

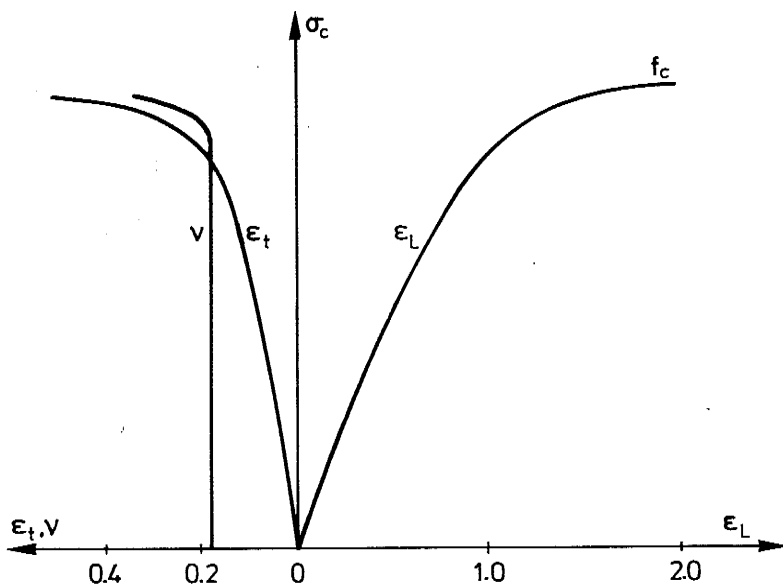


Fig.4.1: Trykspændingen som funktion af Poisson's forhold, længde- og tværtøjningen ved 1-akset spændingstilstand.

Da ν_{inc} er mindre hensigtsmæssig til teoretiske formål, vil kun den oprindelige definition af ν blive benyttet i det følgende.

Denne definition kan skrives:

$$E_2 = E_3 = -\nu E_1 \quad , \quad (4.10)$$

hvor E_1 , E_2 og E_3 er de 3 Lagrange'ske hovedtøjninger.

I (4.10) kan ν udmærket være en funktion af spændingsniveauet og dermed af tøjningerne. Spørgsmålene er derfor, om en sådan variation eksisterer for beton, og om det i bekræftende fald er nødvendigt at tage hensyn til denne variation.

Hvis man betragter plot af trykforsøg med betoncylindre - se f.eks. fig.4.1 - ses ν med god tilnærmelse at være kon-

stant op til 80-90% af trykstyrken. I nærheden af brud stiger ν kraftigt på grund af materialets totale opsplittelse og derfor følgende luftindblanding. Ofte overskrider ν værdien 0.5, således at den kontinuummekaniske betragtningstype ikke længere er anvendelig. En nærmere undersøgelse af disse forhold kan foretages med udgangspunkt i Kupfer's forsøgsresultater, se [Kupfer.17-73] og [Kupfer.18-69]

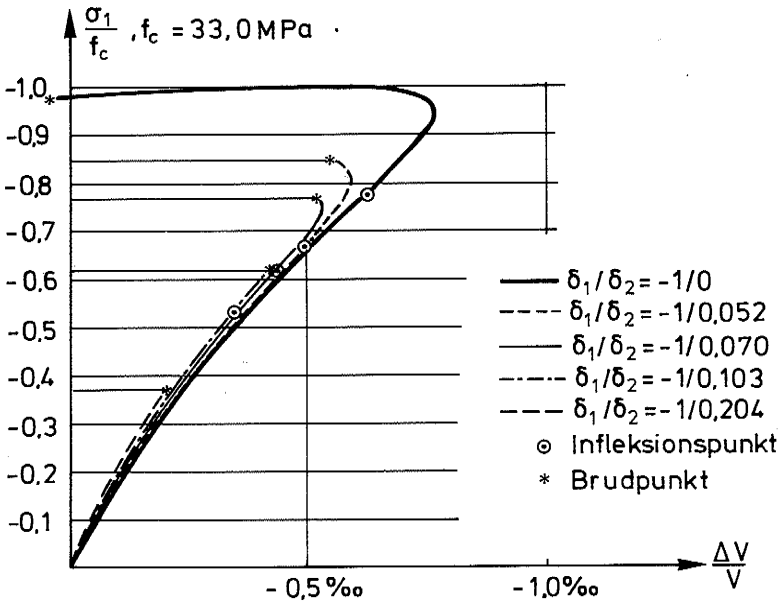


Fig.4.2: Volumtøjning for beton under biaxialt tryk-træk

På figurerne 4.2 og 4.3 er volumtøjningen $\Delta V/V$ vist som funktion af største trykspænding for forskellige biaxiale spændingstilstande, se [Kupfer.17-73] og [Kupfer.18-69]. $\Delta V/V$ defineres som:

$$\Delta V/V = E_1 + E_2 + E_3 \quad (4.11)$$

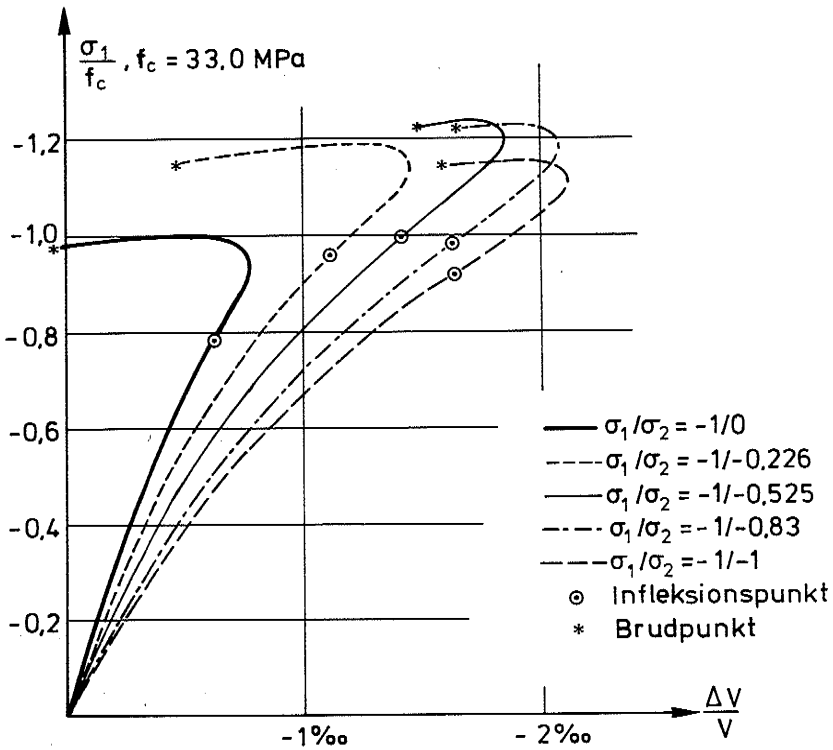


Fig.4.3: Volumentøjning for beton under biaxialt tryk

$\Delta V/V$ ses derfor at være defineret som en 1.ordens tilnærmelse til den relative volumenændring:

$$\text{Relativ volumenændring} = III_C^{-1} \approx I_E = E_1 + E_2 + E_3, \quad (4.12)$$

hvor III_C er den tredje invariant for Green's deformationstensor.

For den 1-aksede spændingstilstand - $\sigma_1/\sigma_2 = \pm 1/0$ - fås iflg. (4.10):

$$\Delta V/V = (1 - 2\nu)E_1 \quad (4.13)$$

For konstant v kan man skrive:

$$\sigma_1 = g(\Delta V/V) \quad , \quad (4.14)$$

hvor g er den samme funktion, som beskriver arbejdskurven

$\sigma_1 \sim E_1$:

$$\sigma_1 = g(E_1) \quad (4.15)$$

Ved sammenligning af kurven $\sigma_1/\sigma_2 = -1/0$ på figurerne 4.2 og 4.3 med kurven $\sigma_1 = g(E_1)$ på figur 4.1 ses, at det kvalitative forløb af kurverne er rimeligt overensstemmende indtil infleksionspunktet på kurven $\sigma_1 \sim \Delta V/V$. Dette punkt, som falder sammen med en voldsom stigning i mikroevnedannelsen i betonen [Kupfer.18-69], nåes ved ca 80% af f_c i overensstemmelse med iagttagelsen af konstant v på figur 4.1. v stiger derefter svagt, indtil σ_1 når op på 95% af f_c , hvor $\Delta V/V$ har minimum. Ved dette punkt er v vokset med ca 25% svarende til en stigning fra ca 0.20 til ca 0.25. På de sidste 5% op til f_c stiger v til ca 0.35, hvorefter der på den faldende gren af arbejdskurven $\sigma_1 = g(E_1)$ sker en voldsom stigning i v , således at man ved brud ender med en værdi, som ofte er større end 0.5 svarende til $\Delta V/V$ større end 0. Selv om man ikke direkte kan anvende (4.13) på de øvrige kurver på figurerne 4.2 og 4.3, vil anvendelsen af et konstant v i et sæt generelle konstitutive ligninger medføre en sammenhæng svarende til (4.14) og (4.15) blot med andre g -funktioner. I tryk/træk-området viser figur 4.2, at denne sammenhæng for de fleste af de viste kurver kan benyttes helt til brud. For små laterale trækspændinger σ_2 er der en mindre afvigelse i nærheden af brud. Ved biaxialt tryk viser figur 4.3, at forholdene her kvalitativt svarer til den 1-aksede tryktilstand, men med en mindre stigning i $\Delta V/V$ inden brud. Endelig skal det nævnes, at anvendelsen af en stærkere beton gør tilnærmelsen v lig med en konstant endnu bedre, se figur 4.4 [Kupfer.17-73], hvilket bl.a. har interesse i forbindelse med fiberarmeret

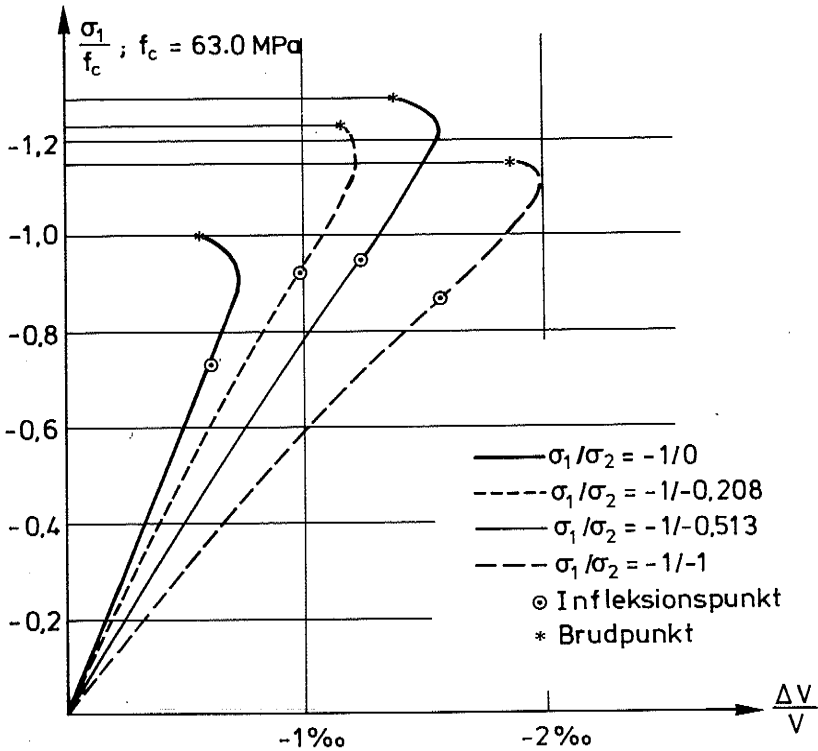


Fig.4.4: Volumentøjning for beton under biaxialt tryk

beton, se [Brøndum-Nielsen.19-74],[Krenchel.20-75] og [Højgaard.21-75].

Hvis man plotter Kupfer's forsøgsresultater i den biaxiale spændingsplan, kan man få et overblik over i hvilke områder, anvendelsen af et konstant ν vil give gode resultater, se figur 4.5 [Kupfer.18-69]. I henhold til den foretagne analyse kan man med virkelig god tilnærmelse benytte et konstant ν i området begrænset af kurven for volumentøjningens infleksionspunkter. I overensstemmelse med analysen er denne kurve sammenfaldende med brudkurven i størstedelen af tryk/træk-området, og man vil derfor her få et korrekt resultat helt til brud. I det område, som begrænses af kurverne for henholds-

vis infleksionspunkter og minimum volumentøjning må man - især i nærheden af områdets ydre begrænsning - acceptere en mindre god overensstemmelse, idet den virkelige værdi af ν her kan afvige med op til 25% af udgangsværdien. På grund af spændings-tøjningsrelationernes flade forløb i nærheden af brud vil en sådan afvigelse dog give en betydelig mindre relativ afvigelse i spændingerne.

I området grænsende op til brudkurven, idet man ved brud skal forstå maksimal betonspænding, vil benyttelse af et konstant ν gældende for alle spændingsniveauer give betydelige afvigelser i spændingsberegningen. Da det fremgår tydeligt af figur 4.5, at dette område kun udgør en ganske lille del af det samlede, mulige spændingsrum, vil en nøjagtig spændingsbestemmelse i dette område blive opgivet til fordel for den simple udformning af de konstitutive ligninger, som kan opnås ved at benytte en 2.ordens tilnærmelse med konstant Poisson's forhold.

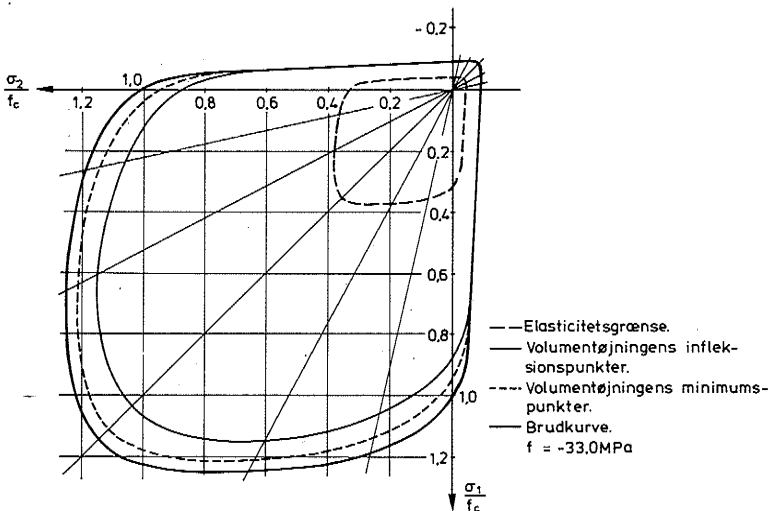


Fig.4.5: Kurver for elasticitetsgrænse, infleksionspunkter, minimum volumentøjning og brud i biaxial spændingstilstand.

4.4 Den 1-aksede spændingstilstand

Den 1-aksede spændingstilstand er den forsøgsmæssigt bedst dokumenterede tilstand for ikke-lineære spændings-tøjningsrelationer, hvilket skyldes, at disse forsøg er relativt simple at udføre. Det vil derfor være fornuftigt i den udstrækning, som det er muligt, at basere beregningen af de 5 konstanter i 2.ordens tilnærmelsen på disse forsøgsresultater. Man opnår herved, at data for de parametre, som indgår i de 5 konstanter ved skift fra én beton til en anden, er let tilgængelige.

Ved en 2.ordens tilnærmelse og 1-akset spændingstilstand kan kurverne for spændingen som funktion af E_1 henholdsvis E_2 og E_3 højst approximeres med parabler, se Figur 4.1. Det er endvidere klart, at disse parabler er affine, da de alle må have vandret tangent ved brudspændingen, og da ν er forudsat konstant i udtrykket (4.10).

For den 1-aksede spændingstilstand benytter CEB følgende udtryk for spændingen T_1 som funktion af tøjningen i længderetningen E_1 :

$$T_1 = F_C \left(\frac{2E_1}{E_{FC}} - \left(\frac{E_1}{E_{FC}} \right)^2 \right) \quad , \quad (4.16)$$

hvor E_{FC} angiver den længdetøjning, ved hvilken materialet når brudspændingen F_C . Samtlige størrelser regnes positive som træk. (4.16) er foreslået af Hognestad [Hognestad.22-51] og bl.a. undersøgt og omtalt i [Rüsch.23-60],[Rüsch.24-62] og [Sargin.6-71].

Det anses her for mere hensigtsmæssigt at benytte initial-elasticitetsmodulen E_0 i stedet for tøjningsstørrelsen E_{FC} i udtrykket (4.16). E_0 indføres på følgende måde. Ved differentiation af (4.16) med hensyn til E_1 fås tangentmodulen E_{tang} :

$$E_{tang} = \frac{2F_C}{E_{FC}} \left(1 - \frac{E_1}{E_{FC}} \right) \quad (4.17)$$

For $E_1 = 0$ er $E_{tang} = E_0$, hvilket medfører:

$$E_O = \frac{2F_C}{E_{FC}} \quad \Rightarrow \quad E_{FC} = \frac{2F_C}{E_O} \quad (4.18)$$

Ved indsættelse af (4.18) i (4.16) og (4.17) fås:

$$T_1 = E_O \left(1 - \frac{E_O E_1}{4F_C}\right) E_1 = E_{sec} E_1 \quad , \quad (4.19)$$

$$E_{tang} = E_O \left(1 - \frac{E_O E_1}{2F_C}\right) \quad , \quad (4.20)$$

hvor E_{sec} i (4.19) er sekantmodulen.

Udtryk for spændingerne i tværretningerne kan let angives, idet spændingstilstanden er 1-akset:

$$T_2 = T_3 = 0 \quad (4.21)$$

Ifølge 2.ordens teorien udtrykkes spændingerne ved (4.7), som afhænger af de 5 konstanter λ_E , ν_E , l_E , m_E og n_E . Dette udtryk kan på følgende måde opskrives i hovedspændinger og hovedtøjninger:

$$\begin{aligned} T_K &= \lambda_E I_E + (3l_E + m_E) I_E^2 + (m_E + n_E) II_E \\ &+ [2\nu_E - (m_E + n_E) I_E] E_K + n_E E_K^2 \end{aligned} \quad (4.22)$$

Værdierne af konstanterne i (4.22) søges nu bestemt, således at (4.19) og (4.21) er opfyldt for alle E_K . Ved hjælp af disse 2 udtryk kan man bestemme λ_E og ν_E - som en kontrol af (4.8) og (4.9) - samt formulere to betingelsesligninger mellem størrelserne l_E , m_E og n_E .

Inden de to betingelsesligninger kan opstilles, er det nødvendigt at beregne de Lagrange'ske invarianter for den 1-aksede spændingstilstand som funktion af E_1 .

Formel (4.10): $E_2 = E_3 = -\nu E_1$ og Appendix E giver:

$$I_E = E_K^K = E_1 + E_2 + E_3 = (1-2\nu)E_1 \quad (4.23)$$

$$\begin{aligned} II_E &= \frac{1}{2}(E_K^K E_L^L - E_K^L E_L^K) \\ &= \frac{1}{2}((E_1 + E_2 + E_3)^2 - ((E_1)^2 + (E_2)^2 + (E_3)^2)) \\ &= \frac{1}{2}((1-2\nu)^2 - (1+2\nu^2))E_1^2 \\ &= -\nu(2-\nu)E_1^2 \end{aligned} \quad (4.24)$$

III_E indgår ikke i (4.22).

Ved indsættelse af (4.23) og (4.24) i (4.22) fås:

$$\begin{aligned} T_K &= \lambda_E(1-2\nu)E_1 + (3\lambda_E + m_E)(1-2\nu)^2(E_1)^2 - (m_E + n_E)\nu(2-\nu)(E_1)^2 \\ &\quad + [2\mu_E - (m_E + n_E)(1-2\nu)E_1]E_K + n_E E_K^2 \end{aligned} \quad (4.25)$$

Af (4.25) ses at opfyldelse af (4.19) kræver, at (4.19) og (4.25) med $K=1$ er identiske:

$$\begin{aligned} E_O E_1 - \frac{E_O^2}{4F_C} E_1^2 &= (\lambda_E(1-2\nu) + 2\mu_E)E_1 \\ &\quad + ((3\lambda_E + m_E)(1-2\nu)^2 - (m_E + n_E)(1-\nu^2) + n_E)(E_1)^2 \end{aligned} \quad (4.26)$$

(4.21) opfyldes ved at sætte (4.25) lig med 0 for $K=2$ eller $K=3$:

$$\begin{aligned} T_2 &= \lambda_E(1-2\nu)E_1 + (3\lambda_E + m_E)(1-2\nu)^2(E_1)^2 - (m_E + n_E)\nu(2-\nu)(E_1)^2 \\ &\quad + [2\mu_E - (m_E + n_E)(1-2\nu)E_1]E_2 + n_E(E_2)^2 = 0 \\ &\Rightarrow (\lambda_E(1-2\nu) - 2\mu_E\nu)E_1 + ((3\lambda_E + m_E)(1-2\nu)^2 \\ &\quad - (m_E + n_E)\nu(1+\nu) + n_E\nu^2)(E_1)^2 = 0 \end{aligned} \quad (4.27)$$

Da (4.26) og (4.27) skal gælde for alle E_1 , skal koeffi-

cienterne til E_1 og $(E_1)^2$ opfyldte ligningerne hver for sig. Denne koefficientssammenligning giver følgende 4 ligninger:

$$(1-2\nu)\lambda_E + 2\mu_E = E_0 \quad (4.28)$$

$$(1-2\nu)\lambda_E - 2\nu\mu_E = 0 \quad (4.29)$$

$$(1-2\nu)^2(3\lambda_E + m_E) - (1-\nu^2)(m_E + n_E) + n_E = -\frac{E_0^2}{4F_C} \quad (4.30)$$

$$(1-2\nu)^2(3\lambda_E + m_E) - \nu(1+\nu)(m_E + n_E) + \nu^2 n_E = 0 \quad (4.31)$$

Af (4.28) og (4.29) fås

$$\lambda_E = \frac{\nu E_0}{(1+\nu)(1-2\nu)} \quad \text{og} \quad \mu_E = \frac{E_0}{2(1+\nu)}, \quad (4.32)$$

som ses at være identiske med henholdsvis (4.8) og (4.9).

Ved hjælp af (4.30) og (4.31) kan konstanterne $3\lambda_E + m_E$, m_E og n_E udtrykkes ved én parameter, f.eks. n_E :

$$\begin{aligned} 3\lambda_E + m_E &= \frac{\nu}{(1-2\nu)^3} ((1-\nu(1-\nu))n_E + \frac{E_0^2}{4F_C}) \\ &= \frac{\lambda_E}{2\mu_E} \left(\frac{1}{(2\mu_E)^2} ((3\lambda_E + 2\mu_E)^2 - 6\lambda_E(\lambda_E + \mu_E)) n_E \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{4F_C} (3\lambda_E + 2\mu_E)^2 \right) \quad (4.33) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} m_E + n_E &= \frac{1-\nu}{1-2\nu} n_E + \frac{E_0^2}{4F_C(1+\nu)(1-2\nu)} \\ &= \frac{\lambda_E + 2\mu_E n_E}{2\mu_E} + \frac{\mu_E}{2F_C} (3\lambda_E + 2\mu_E) \quad (4.34) \end{aligned}$$

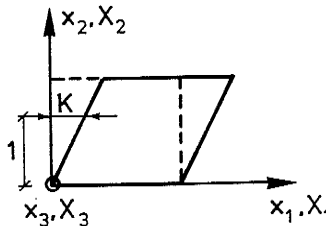
$$\begin{aligned} m_E &= \frac{\nu}{1-2\nu} n_E + \frac{E_0^2}{4F_C(1+\nu)(1-2\nu)} \\ &= \frac{\lambda_E}{2\mu_E} n_E + \frac{\mu_E}{2F_C} (3\lambda_E + 2\mu_E) \quad (4.35) \end{aligned}$$

Udtrykkene er lineære i n_E og er udtrykt dels ved F_C , E_0 og ν , dels ved F_C , λ_E og μ_E .

4.5 Simpel forskydning

I Afsnit 4.4 lykkedes det ud fra den 1-aksede spændingstilstand at bestemme 2 af de 5 konstanter samt opskrive 2 betingelsesligninger mellem de 3 resterende. Disse ligninger resulterede i udtrykkene (4.33) og (4.34), som angiver 2 af de konstanter, der optræder i udtrykket (4.7) for de generelle konstitutive ligninger, udtrykt ved den tredje og sidste konstant. Problemet er derfor at opstille én betingelsesligning mere til fastlæggelse af den sidste frie parameter, hvilket for eksempel kan ske ved at betragte den simple forskydningstilstand. Denne deformationstilstand er isochorisk og homogen, hvilket vil sige, at tilstanden er volumenbevarende og uafhængig af de materielle koordinater. Den kan frembringes ved en forskydning af parallelle, materielle planer, således at forskydningen af de enkelte planer er proportional med afstanden fra én bestemt af planerne. Flytningstilstanden, som er vist på Figur 4.6, kan derfor skrives:

$$\begin{aligned}
 x_1 &= X_1 + u_1 = X_1 + KX_2 \\
 x_2 &= X_2 + u_2 = X_2 \\
 x_3 &= X_3 + u_3 = X_3
 \end{aligned}
 \tag{4.36}$$



Figur 4.6: Isochorisk forskydning

I dette afsnit vil formlerne i Appendix A blive benyttet i vid udstrækning, hvorfor særskilte henvisninger ikke foretages i det følgende.

Da de konstitutive ligninger og dermed de fænomenologiske konstanter λ_E , μ_E og n_E er uafhængige af de benyttede koordinatsystemer, beskrives deformationstilstanden ved hjælp af bekvemme retvinklede, kartesiske basiskoordinatsystemer for både de rumlige og materielle koordinater. Den rumlige og materielle metrik er derfor i referencetilstanden givet ved henholdsvis

$$g_{kl} = \delta_{mn} \frac{\partial z^m}{\partial x^k} \frac{\partial z^n}{\partial x^l} = \delta_{kl} \quad (4.37)$$

og

$$G_{KL} = \delta_{MN} \frac{\partial Z^M}{\partial X^K} \frac{\partial Z^N}{\partial X^L} = \delta_{KL} \quad (4.38)$$

z^m og Z^M angiver koordinater i forhold til faste, ortogonale baser, medens x^m og X^M angiver koordinater i forhold til mere generelle baser. Disse kan - som det fremgår af (4.37) og (4.38) - specielt være sammenfaldende med z^m og Z^M .

Elementerne i Piola-Kirchhoff's spændingstensor T_L^K svarende til den simple forskydningstilstand kan nu opstilles ud fra disse referencemetrikker. For at bestemme T_L^K efter formel (4.7) er det nødvendigt at kende Lagrange's tøjningstensor E_L^K :

$$\begin{aligned} E_L^K &= \frac{1}{2}(C_L^K - \delta_L^K) \\ &= \frac{1}{2}(C_{ML} - G_{ML})G^{KM} = \frac{1}{2}(C_{ML} - \delta_{ML})\delta^{KM} \end{aligned} \quad (4.39)$$

Da G_{KM} og dermed G^{KM} er enhedstensorer, er de miksede og kovariante tensorer talmæssigt identiske.

Green's deformationstensor C_{KL} er givet ved

$$C_{KL} = g_{k\ell} \frac{\partial x^k}{\partial X^K} \frac{\partial x^\ell}{\partial X^L} \quad (4.40)$$

Ved partiel differentiation med X^K fås af (4.36):

$$\frac{\partial x^k}{\partial X^K} = \begin{bmatrix} 1 & K & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.41)$$

(4.37), (4.40) og (4.41) giver da:

$$C_{KL} = \begin{bmatrix} 1 & K & 0 \\ K & 1+K^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (4.42)$$

som kombineret med (4.39) giver

$$E_{KL} = \begin{bmatrix} 0 & K/2 & 0 \\ K/2 & K^2/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.43)$$

En kontrol af beregningerne fås af (4.42), idet den relative volumenændring er givet ved

$$\Delta V/V = III_C^{-1} = \det(C_{KL})^{-1} = 0, \quad (4.44)$$

hvilket er kravet til en isochorisk deformationstilstand.

Ud fra de foretagne beregninger er det nu muligt at bestemme elementerne i Piola-Kirchhoff's spændingstensor

$$\begin{aligned} T_L^K &= [2\mu_E - (m_E + n_E) I_E^2 + (m_E + n_E) II_E] \delta_L^K \\ &+ [2\mu_E - (m_E + n_E) I_E] E_L^K + n_E E_M^K E_L^M, \end{aligned} \quad (4.45)$$

idet invarianterne I_E og II_E for den givne deformationstilstand er bestemt af

$$I_E = E_K^K = \frac{1}{2}K^2 \quad (4.46)$$

$$\begin{aligned} II_E &= \frac{1}{2}(E_K^K E_L^L - E_L^K E_K^L) \\ &= \frac{1}{2}\left(\left(\frac{1}{2}K^2\right)^2 - \left(\frac{1}{2}K^2\right)^2 - \frac{1}{4}(K^2 + K^2)\right) \\ &= -\frac{1}{4}K^2 \end{aligned} \quad (4.47)$$

Regner man led indeholdende K i højere potenser end 2 små, får man

$$T_1^1 = \frac{1}{4}K^2(2\lambda_E - m_E) \quad (4.48)$$

$$T_2^2 = \frac{1}{4}K^2(2(\lambda_E + 2\mu_E) - m_E) \quad (4.49)$$

$$T_3^3 = \frac{1}{4}K^2(2\lambda_E - (m_E + n_E)) \quad (4.50)$$

$$T_2^1 = T_1^2 = K\mu_E \quad (4.51)$$

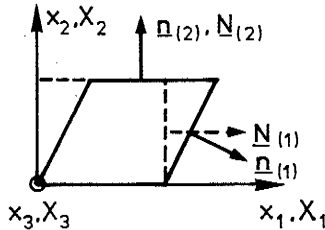
$$T_3^1 = T_1^3 = T_3^2 = T_2^3 = 0 \quad (4.52)$$

Formålet med beregningen af T_L^K er som funktion af denne størrelse at bestemme de kræfter, som man skal påføre den på figurerne 4.6 og 4.7 betragtede kubers sideflader for at tilvejebringe den angivne deformationstilstand. Ved en vurdering af disse kræfter giver visse kvalitative og kvantitative betragtninger, som vil blive omtalt senere i dette afsnit, derefter mulighed for opstilling af den sidste betingelsesligning.

De normalspændinger S_a , som påvirker kubens sideflader, er givet ved

$$S_{a(r)} = \sigma^{k\ell} n_{(r)k} n_{(r)\ell} \quad (4.53)$$

hvor $\sigma^{k\ell}$ er Cauchy's spændingstensor, og $n_{(r)k}$ er en positiv enhedsnormalvektor til den betragtede sideflade (r) , se Figur 4.7.



Figur 4.7: Sidefladernes normalvektorer i referencetilstanden $\underline{N}_{(R)}$ og den deformedede tilstand $\underline{n}_{(r)}$.

Da $S_{a(r)}$ ønskes udtrykt ved T^{KL} og referencetilstandens enhedsnormalvektor $N_{(R)K}$, benyttes følgende substitutionsformler for $\sigma^{k\ell}$ og $n_{(r)k}$:

$$n_{(r)k} = J \frac{dA_{(R)}}{da_{(r)}} \frac{\partial X^K}{\partial x^k} N_{(R)K} \quad (4.54)$$

$$\sigma^{k\ell} = J^{-1} \frac{\partial x^k}{\partial X^V} \frac{\partial x^\ell}{\partial X^T} T^{VT} \quad (4.55)$$

hvor

$$\begin{aligned} J &= \det \left(\frac{\partial z^k}{\partial Z^K} \right) = \det \left(\frac{\partial z^k}{\partial x^m} \frac{\partial x^m}{\partial X^M} \frac{\partial X^M}{\partial Z^K} \right) \\ &= \sqrt{g} \cdot j \cdot \sqrt{G}^{-1} = \sqrt{g/G} \cdot j \end{aligned} \quad (4.56)$$

J og j er Jacobi-determinanterne for henholdsvis transformationen mellem de to ortogonale baser z^k og Z^K og transformationen $x^k = x^k(X^K)$; g og G er determinanterne for henholdsvis den rumlige og materielle referencemetrik, og $da_{(r)}$ og $dA_{(R)}$ er arealerne af den betragtede sideflade i henholdsvis den deformedede tilstand og referencetilstanden. For den betragtede deformationstilstand får man af (4.37), (4.38), (4.41) og (4.56):

$$J = j = 1 \quad (4.57)$$

Ved hjælp af (4.54) og (4.55) kan udtrykket for normalspændingerne på sidefladerne (4.53) skrives

$$\begin{aligned} S_{a(r)} &= (J^{-1} \frac{\partial x^k}{\partial x^V} \frac{\partial x^{\ell VT}}{\partial x^T}) (J \frac{dA(R)}{da(r)} \frac{\partial X^K}{\partial x^K N(r)K}) (J \frac{dA(R)}{da(r)} \frac{\partial X^L}{\partial x^{\ell N(R)L}}) \\ &= J \left(\frac{dA(R)}{da(r)} \right)^2 T^{KL} N_{(R)K} N_{(R)L} \\ &= J \left(\frac{dA(R)}{da(r)} \right)^2 G^{LM} T_M^K N_{(R)K} N_{(R)L} \end{aligned} \quad (4.58)$$

Forskydningsspændingerne $S_{a(r_1)(r_2)}$ på den $((r_1))$ 'te sideflade i (r_2) -retningen er tilsvarende givet ved

$$S_{a(r_1)(r_2)} = J \left(\frac{dA(R_1)}{da(r_1)} \right)^2 G^{LM} T_M^K N_{(R_1)K} N_{(R_2)L} \quad (4.59)$$

Man får derfor følgende udtryk for spændingerne på sidefladerne.

Normalspændinger:

$$S_{a(1)} = (1+K^2)^{-1} T_1^1 = \frac{K^2}{4(1+K^2)} (2\lambda_E - m_E) \quad (4.60)$$

$$S_{a(2)} = T_2^2 = \frac{K^2}{4} (2(\lambda_E + 2\mu_E) - m_E) \quad (4.61)$$

$$S_{a(3)} = T_3^3 = \frac{K^2}{4} (2\lambda_E - (m_E + n_E)) \quad (4.62)$$

Forskydningssspændinger:

$$S_{a(1)(2)} = S_{a(2)(1)} = (1+K^2)^{-1} T_2^1 = \frac{K}{1+K^2} \mu_E \quad (4.63)$$

$$S_{a(1)(3)} = S_{a(3)(1)} = S_{a(2)(3)} = S_{a(3)(2)} = 0 \quad (4.64)$$

Formlerne (4.60)-(4-64) viser, at en isochorisk forskydningstilstand ikke kan opnås udelukkende ved forskydningspåvirkninger, men også kræver normalkræfter. Denne normalkraftspåvirkning kan opdeles i en hydrostatisk påvirkning, som betegnes Kelvin-effekten, af størrelsen $S_{a(3)}$, og en tværeffekt, som betegnes Poynting-effekten. Kelvin-effekten bevirker en hindring af volumenændringer, og kan derfor ikke eksistere for inkompressible materialer, da disse er naturligt volumenbevarende. Endvidere ved man ikke, om der findes virkelige materialer, hvor denne effekt eksisterer. Den omtalte tværeffekt omfatter de normalspændinger, som man ud over den hydrostatiske påvirkning må påføre sidefladerne for at bevare legemets proportioner. Man får derfor følgende tværeffekt:

$$S_{a(1)} - S_{a(3)} \approx \frac{K^2}{4} n_E \quad (4.65)$$

$$S_{a(2)} - S_{a(3)} \approx \frac{K^2}{4} (4\mu_E + n_E) \quad (4.66)$$

Ud fra de opstillede udtryk er der nu grundlag for at foretage vurderinger, som gør det muligt at opstille sidste betingelsesligning.

Det er tidligere omtalt, at Kelvin-effekten ikke eksisterer for inkompressible materialer, hvilket medfører

$$S_{a(3)} = T_3^3 = 0 \quad \text{Inkompressibilitet} \quad (4.67)$$

Selv om det ikke umiddelbart er muligt at betragte (4.67) som et grænsetilfælde for de kompressible materialer, giver udtryk-

ket alligevel information om den størrelsesorden af $S_{a(3)}$, som man kan forvente for disse materialer. Det er endvidere klart, at normalspændingerne - $S_{a(1)}$ og $S_{a(2)}$ - i den plan, hvori deformationen foregår, relativt set er væsentlig større end $S_{a(3)}$.

Idet der for 2.ordenstilnærmelsen gælder

$$K^2 = \frac{K^2(1+K^2)}{1+K^2} \approx \frac{K^2}{1+K^2} \quad (4.68)$$

kan man nu ved brug af (4.35), (4.60) og (4.62) foretage en vurdering af $S_{a(1)}$ og $S_{a(3)}$.

$$(4.35): \quad m_E = \frac{E_o^2}{4F_C(1+\nu)(1-2\nu)} + \frac{\nu}{1+2\nu} n_E$$

Indsættes (4.35) i (4.60) og (4.62) fås

$$S_{a(1)} = \frac{K^2}{4(1+K^2)} \cdot \frac{1}{1-2\nu} \left(\frac{E_o}{1+\nu} \left(2\nu - \frac{E_o}{4F_C} \right) - \nu n_E \right)$$

$$\Rightarrow C \cdot S_{a(1)} = D - \nu n_E, \quad (4.69)$$

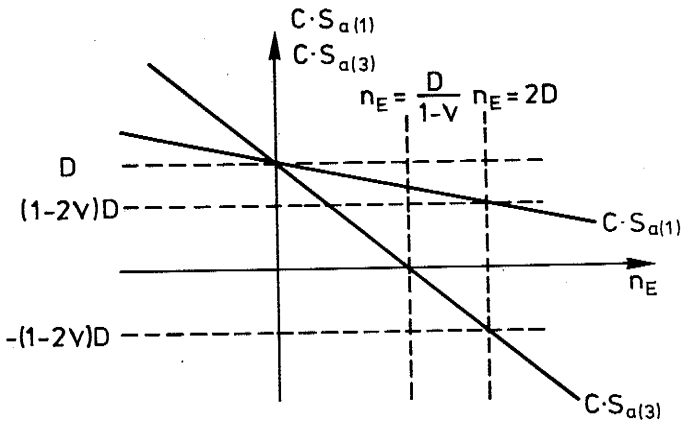
$$S_{a(3)} = \frac{K^2}{4(1+K^2)} \cdot \frac{1}{1-2\nu} \left(\frac{E_o}{1+\nu} \left(2\nu - \frac{E_o}{4F_C} \right) - (1-\nu)n_E \right)$$

$$\Rightarrow C \cdot S_{a(3)} = D - (1-\nu)n_E, \quad (4.70)$$

hvor

$$C = \frac{4(1+K^2)(1-2\nu)}{K^2} \quad \text{og} \quad D = \frac{E_o}{1+\nu} \left(2\nu - \frac{E_o}{4F_C} \right) \quad (4.71)$$

På Figur 4.8 er formlerne (4.69) og (4.70) plottet som funktion af n_E .



Figur 4.8: Normalspændingerne $S_{a(1)}$ og $S_{a(3)}$ som funktioner af n_E .

Af figuren ses, at

$$|S_{a(3)}| \leq |S_{a(1)}| \quad \text{for} \quad 0 \leq n_E \leq 2D \quad (4.72)$$

Ifølge bemærkningerne om størrelsesforholdet mellem $S_{a(1)}$ og $S_{a(3)}$ er det derfor i den centrale del af det i (4.72) angivne interval for n_E , at man opnår den bedste værdi for n_E . Man kan derfor lige så godt vælge n_E , således at $S_{a(3)}$ bliver lig med 0.

$$S_{a(3)} = 0 \quad \text{for} \quad n_E = \frac{D}{1-\nu}, \quad (4.73)$$

hvor D er givet ved (4.71).

Der vil her blive brugt det mere bekvemme udtryk for D :

$$D = -\frac{E_0^2}{4F_C(1+\nu)}, \quad (4.74)$$

idet fejlen ved at benytte (4.74) i stedet for (4.71) andrager under 0.5%. Dette indses på følgende måde: I udtrykket (4.71) for D giver første led i parentesens ca 0.40, da ν

for beton andrager ca 0.20. Idet der eksisterer formler for korrelationen mellem E_O og F_C , er det endvidere let at vurdere parentesens anden led.

Korrelationsformler:

$$E_O = 21000 \sqrt{F_C} \quad \text{kp/cm}^2 \quad \text{CEB} \quad (4.75)$$

$$E_O = 5.5 \cdot 10^5 \cdot \frac{F_C}{150 + F_C} \quad \text{kp/cm}^2 \quad \text{Ros} \quad (4.76)$$

$$E_O = 5.1 \cdot 10^5 \cdot \frac{F_C}{130 + F_C} \quad \text{kp/cm}^2 \quad \text{DS 411} \quad (4.77)$$

(4.77), som er anvendt til beregning af værdierne i DS 411, Afsnit 3.3.2, er en modificeret udgave af (4.76).

Da samtlige korrelationsformler for brudstyrker F_C op til 100 MPa giver

$$- \frac{E_O}{4F_C} > 100 \quad , \quad (4.78)$$

udgør $2\nu = 0.4$ under 0.5% af $\frac{E_O}{4F_C}$. n_E kan derfor med rimelig nøjagtighed angives ved

$$n_E = \frac{D}{1-\nu} = - \frac{E_O}{4F_C(1-\nu^2)} \quad (4.79)$$

4.6 5-konstantstilmærmelsen

Det er nu muligt at bestemme samtlige i de konstitutive ligninger indgående konstanter. Ved brug af (4.79) giver (4.33)-(4.35):

$$3\chi_{E+m_E} = \frac{\nu^2 E_O^2}{4F_C(1-\nu^2)(1-2\nu)^2} = -B \frac{\nu^2 E_O^2}{(1+\nu)^2(1-2\nu)^2} \quad ; \quad (4.80)$$

$$m_E + n_E = 0 \quad , \quad (4.81)$$

$$m_E = -n_E = \frac{E_O^2}{4F_C(1-\nu^2)} = -B \frac{E_O^2}{(1+\nu)^2} \quad , \quad (4.82)$$

hvor B er givet ved

$$B = -\frac{1+\nu}{4F_C(1-\nu)} = -\frac{3\lambda_E+2\mu_E}{4F_C(\lambda_E+2\mu_E)} \quad (4.83)$$

Idet

$$\left. \begin{aligned} E_O &= \frac{(3\lambda_E + 2\mu_E)}{\lambda_E + \mu_E} \\ \nu &= \frac{\lambda_E}{2(\lambda_E + \mu_E)} \end{aligned} \right\} \quad (4.84)$$

kan konstanterne udtrykkes ved Lamé-konstanterne og indirekte F_C , idet (4.83) benyttes. Man får

$$3\lambda_E + m_E = -B \cdot \lambda_E^2 \quad (4.85)$$

$$m_E + n_E = 0 \quad (4.86)$$

$$m_E = -n_E = -B \cdot (2\mu_E)^2 \quad (4.87)$$

Indsættes disse konstanter i

$$(4.7): \quad T_L^K = [\lambda_E I_E + (3\lambda_E + m_E) I_E^2 + (m_E + n_E) II_E] \delta_L^K \\ + [2\mu_E - (m_E + n_E) I_E] E_L^K + n_E E_M^K E_L^M,$$

fås det endelige udtryk for en 2.ordenstilnærmelse til de generelle konstitutive ligninger for beton

$$T_L^K = [(\lambda_E I_E) - B(\lambda_E I_E)^2] \delta_L^K \\ + (2\mu_E) E_L^K + B(2\mu_E)^2 E_M^K E_L^M, \quad (4.88)$$

hvor B er givet ved (4.83).

For tøjninger af begrænset størrelse kan man ofte tillade

sig at se bort fra forskellen mellem Piola-Kirchhoff's spændingstensor T_L^K og Cauchy's spændingstensor σ_j^i samt mellem Lagrange's tøjningstensor E_L^K og Cauchy's tøjningstensor ϵ_j^i . I disse tilfælde kan man skrive (4.88)

$$\begin{aligned} \sigma_j^i &= [(\lambda_\epsilon I_\epsilon) - B (\lambda_\epsilon I_\epsilon)^2] \delta_j^i \\ &+ (2\mu_\epsilon) \epsilon_j^i + B (2\mu_\epsilon)^2 \epsilon_m^i \epsilon_j^m \end{aligned} \quad (4.89)$$

5. AFLASTNING

I indledningen til Kapitel 4 anføres der, at de konstitutive ligninger er irreversible, og at belastning og aflastning derfor må beskrives ved forskellige sæt ligninger.

Endvidere er det nødvendigt at opstille et kriterium til afgørelse af, om en given tøjningsændring svarer til en belastning eller til en aflastning.

5.1 Konstitutive ligninger ved aflastning

Aflastningen beskrives ved den lineære Hooke's lov, som for spændingsløs referencetilstand er givet ved (4.5).

$$(4.5) : T_L^K = \lambda_E I_E \delta_L^K + 2\nu_E E_L^K$$

Problemet er nu at modificere dette udtryk, således at man ved (4.5) kan bestemme spændingsændringen ΔT_L^K ud fra den spændingstilstand $(A) T_L^K$, hvor aflastningen begynder. De endelige spændinger vil derfor kunne skrives:

$$T_L^K = (A) T_L^K + \Delta T_L^K \quad (5.1)$$

Tøjningstilstanden $(A) E_L^K$ svarende til $(A) T_L^K$ kan opdeles i elastiske (AE) og plastiske (AP) komponenter:

$$(A) E_L^K = (AE) E_L^K + (AP) E_L^K \quad (5.2)$$

Under aflastningen sker der ændringer i de elastiske tøjninger, medens de plastiske tøjninger forbliver konstante. Ændringerne i de totale tøjninger er derfor lig med ændringerne i de elastiske tøjninger.

$$\Delta E_L^K = E_L^K - (A) E_L^K \quad (5.3a)$$

$$= (E) E_L^K - (AE) E_L^K = \Delta (E) E_L^K \quad (5.3b)$$

Man kan derfor i stedet for $\Delta_{(E)} E_L^K$ benytte ΔE_L^K og endvidere indsætte de 2 led i (5.3a) separat i Hooke's lov, idet denne er lineær i spændinger og tøjninger, se (4.5). Ved indsættelse i (4.5) får man derfor

$$\begin{aligned} \Delta T_L^K &= \lambda_E I_{\Delta E} \delta_L^K + 2\mu_E \Delta E_L^K \\ &= \lambda_E (I_E - I_{(A)E}) \delta_L^K + 2\mu_E (E_L^K - (A)E_L^K) \\ &= (L)T_L^K - (AL)T_L^K \end{aligned} \quad (5.4)$$

hvor $(L)T_L^K$ er den spændingstilstand, som fremkommer ved indsættelse af de aktuelle, totale tøjninger i den lineære Hooke's lov. Analogt refererer $(AL)T_L^K$ til udgangstilstanden for aflastningen.

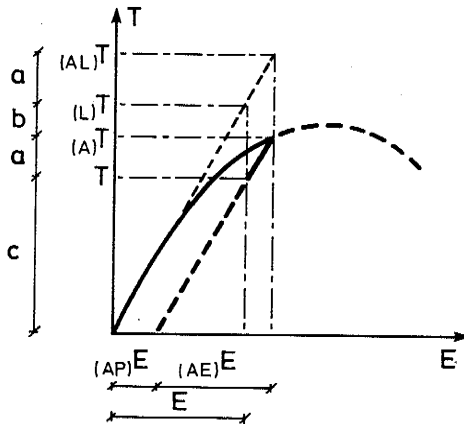


Fig. 5.1: Principskitse for beregning af spændingstilstanden under aflastning.

På Fig.5.1 ses en principskitse svarende til den 1-aksede spændingstilstand. Beregningen af den aktuelle spændingstilstand T_L^K kan ved hjælp af denne skitse illustreres på følgende måde

$$T_L^K = (A) T_L^K + (L) T_L^K - (AL) T_L^K \quad (5.5)$$

$$c = (c+a) + (c+a+b) - (c+a+b+a)$$

Det endelige udtryk for de konstitutive ligninger ved aflastning fås derefter ved at indsætte (5.4) i (5.5):

$$T_L^K = (A) T_L^K - \lambda_E I_{(A)E} \delta_L^K - 2\mu_E \cdot (A) E_L^K + \lambda_E I_E \delta_L^K + 2\mu_E E_L^K \quad (5.6)$$

5.2 Aflastningskriterium

I plasticitetsteorien kan man for givne ændringer i de plastiske tøjningshastigheder ved hjælp af en associeret flydelov - normalitetsbetingelsen - afgøre, om der sker aflastning. En sådan fremgangsmåde er naturligvis ikke mulig i den foreliggende teori, idet der ikke anvendes nogen flydefunktion, hvorfor der ikke eksisterer nogen associeret flydelov. Derimod har man et udmærket kriterium i tøjningsenergifunktionen for de totale tøjninger (4.6).

$$(4.6): \quad \Sigma = a_O + \alpha_E I_E + \frac{1}{2}(\lambda_E + 2\mu_E) I_E^2 - 2\mu_E II_E + \lambda_E I_E^3 + m_E I_E II_E + n_E III_E$$

Hvis denne funktion ved en given tøjningsændring er voksende, sker der en yderligere belastning, medens der i modsat fald sker en aflastning.

$$E_L^K = (A) E_L^K + \Delta E_L^K \Rightarrow \begin{array}{l} \Sigma = \Sigma_{(A)} + \Delta\Sigma > \Sigma_{(A)} \quad \text{Belastning} \\ \Sigma = \Sigma_{(A)} + \Delta\Sigma < \Sigma_{(A)} \quad \text{Aflastning} \end{array} \quad (5.7)$$

Samtlige konstanter i (4.6) er kendte, idet a_0 kan vælges arbitrært, f.eks. $a_0 = 0$, λ_E kan beregnes af udtrykkene (4.85) og (4.87), medens de øvrige størrelser er beregnet i Kapitel 4.

$$4.85 : \quad 3\lambda_E + m_E = -B \lambda_E^2$$

$$4.87 : \quad m_E = -B (2\mu_E)^2$$

Heraf fås

$$\lambda_E = \frac{1}{3}B((2\mu_E)^2 - \lambda_E^2) \quad (5.8)$$

Tøjningsenergifunktionen Σ kan derfor skrives:

$$\begin{aligned} \Sigma = & \frac{1}{2}(\lambda_E + 2\mu_E) I_E^2 - 2\mu_E II_E + \frac{1}{3}B((2\mu_E)^2 - \lambda_E^2) I_E^3 \\ & - B (2\mu_E)^2 I_E II_E + B (2\mu_E)^2 III_E, \end{aligned} \quad (5.9)$$

hvor B er givet ved

$$(4.83) : \quad B = - \frac{3\lambda_E + 2\mu_E}{4F_c(\lambda_E + 2\mu_E)}$$

6. BRUDBETINGELSER

Det vil være naturligt at afslutte denne behandling af konstitutive ligninger for beton med en kort omtale af nogle brudbetingelser, som kan benyttes i forbindelse med de i Kapitel 4 opstillede konstitutive ligninger.

Formålet med en brudbetingelse er på en idealiseret måde at afgrænse det spændingsområde, som er fysisk realisabelt. Der er i tidens løb opstillet en lang række brudbetingelser for beton, hvoraf de fleste på grund af simplificationskrav og manglende forsøgsresultater er meget stærkt idealiserede.

6.1 Nyere forslag til brudbetingelser

I et par nyere arbejder [Chen. 10-73] og [Ottosen. 27-75] er der opstillet nogle brudbetingelser, som giver en god overensstemmelse med de eksisterende forsøgsresultater.

Begge kriterier benytter 4 parametre, opfylder kravene om konveksitet og symmetri og åbner sig i den hydrostatiske akse negative retning. Ottosen beskriver hele brudfladen i hovedspændingsrummet med kun 1 funktion, som derfor er glat overalt. Chen benytter 2 funktioner, og der fremkommer derfor en kant langs de 2 funktioners skæringskurve. Den ene funktion, som benyttes i trykområdet, er en omdrejningsparaboloide med den hydrostatiske akse som akse, medens den anden er en omdrejningshyperboloide med samme akse. Chen's forslag omfatter derfor ikke nogen vinkelafhængighed i deviationsplanerne - planerne vinkelret på den hydrostatiske akse. Dette er i strid med en række forsøgsresultater, som viser, at trækmeridianerne ligger nærmere den hydrostatiske akse end trykmeridianerne. Tryk- og trækmeridianerne er de kurver, som fremkommer ved skæring af brudfladen med en plan, som indeholder den hydrostatiske akse og en spændingsakse. Den gren af kurven, som indeholder trykhenholdsvis trækbrudspændingen, betegnes tryk- henholdsvis trækmeridianen. For voksende hydrostatisk tryk nærmer meridiankurverne sig til hinanden, hvilket svarer til, at de brudkurver, der fremkommer ved at skære brudfladen med deviationspla-

nerne, ændrer sig fra næsten triangulær form til næsten cirkulær form ved voksende hydrostatisk tryk. Chen's kriterium giver derfor mindre gode resultater ved små hydrostatiske tryk. Ottosen's kriterium er derimod i stand til at beskrive alle de nævnte forhold og giver alt i alt en så god beskrivelse af brudtilstanden baseret på et stort antal forskeres forsøgsresultater, at det måske er det mest realistiske kriterium, som kendes i dag.

6.2 Ottosen's brudkriterium

Ottosen's brudkriterium:

$$f(I_T, II_S, \cos 3\theta) = A \frac{II_S}{F_C^2} + \lambda \frac{\sqrt{II_S}}{F_C} + B \frac{I_T}{F_C} - 1 = 0, \quad (6.1)$$

hvor A og B er konstanter og $\lambda = \lambda(\cos \theta)$. Brudbetingelsen ses at være en funktion af spændingstensorens første invariant I_T , den tilhørende deviationsspændingstensors anden invariants II_S og θ , som angiver retningsafhængigheden i deviationsplanen. Funktionen f ses af $\cos 3\theta$ at være periodisk med perioden 120° og besidde 60° symmetri i overensstemmelse med, at betonen antages isotrop. Deviationsspændingstensoren S_L^K svarende til II_S er givet ved

$$S_L^K = T_L^K - \frac{1}{3} I_T \delta_L^K \quad (6.2)$$

λ -funktionen i (6.1) er givet ved:

$$\lambda = K_1 \cos\left[\frac{1}{3} \text{Arc} \cos(K_2 \cos 3\theta)\right] \text{ for } \cos 3\theta \geq 0, \quad (6.3)$$

$\lambda = K_1 \cos\left[\frac{\pi}{3} - \text{Arc} \cos(-K_2 \cos 3\theta)\right]$ for $\cos 3\theta \leq 0$, hvor K_1 og K_2 er konstanter. θ er givet ved:

$$\cos \theta = \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{s_1}{\sqrt{II_S}} = \frac{2T_1 - T_2 - T_3}{2\sqrt{3} \sqrt{II_S}}, \quad (6.4)$$

hvor s_1 , T_1 , T_2 og T_3 er hovedspændinger. Af (6.4) fås:

$$T_1 \geq T_2 \geq T_3 \Rightarrow 0^\circ \leq \theta \leq 60^\circ \quad (6.5)$$

En bestemmelse af konstanterne A , B , K_1 og K_2 kan for eksempel foretages ved at kræve, at brudfladen indeholder følgende 4 spændingstilstande karakteriseret ved:

- 1) Den 1-aksede trykbrudspænding F_C , $\theta = 60^\circ$
- 2) Den 1-aksede trækbrudspænding F_T , $\theta = 0^\circ$
- 3) Den biaksiale trykbrudspænding
 $T_1 = T_2 = -1.16 F_C$, $\theta = 0^\circ$
- 4) En spændingstilstand på trykmeridianen,
 $\theta = 60^\circ$

7. KONKLUSION

Hovedformålet med dette arbejde har været at fremstille en 2.ordens tilnærmelse til de konstitutive ligninger for beton, som er så tilstrækkelig simpel, at den kan anvendes direkte i både analytiske og numeriske beregninger. Disse krav synes at være opfyldt af de udledte og foreslåede udtryk

$$(4.88): \quad T_L^K = [(\lambda_E I_E) - B (\lambda_E I_E)^2] \delta_L^K \\ + (2\mu_E) E_L^K + B (2\mu_E)^2 E_M^K E_L^M$$

og

$$(4.89): \quad \sigma_j^i = [(\lambda_\epsilon I_\epsilon) - B (\lambda_\epsilon I_\epsilon)^2] \delta_j^i \\ + (2\mu_\epsilon) \epsilon_j^i + B (2\mu_\epsilon)^2 \epsilon_m^i \epsilon_j^m$$

De indgående konstanter λ , μ og B afhænger kun af E_0 , ν og F_C , som angiver initialelasticitetskoefficienten ved 1-akset spændingstilstand, Poisson's forhold og trykbrudstyrken ligeledes ved 1-akset spændingstilstand. Det er derfor let at fremskaffe de nødvendige materialedata, idet E_0 , ν og F_C alle kan bestemmes ved et 1-akset cylinderforsøg.

En forsøgsmæssig verifikation af ligningerne for enkelte komplekse spændingstilstande ville være ønskelig, men det i litteraturen tilgængelige forsøgsmateriale på dette område er uheldigvis uhyre spinkelt. Dette skyldes, at man har koncentreret sig om opstilling af brudbetingelser, og interessen for måling af sammenhørende værdier af spændinger og tøjninger har derfor været ringe. Det skal bemærkes, at man naturligvis ikke kan anvende den 1-aksede spændingstilstand og den simple forskydningstilstand som testgrundlag, idet disse er benyttet ved opstillingen af ligningerne.

De opstillede konstitutive ligninger gældende for aflastning er en modificeret Hooke's lov, som inkluderer den udgangsspændingstilstand beregnet efter (4.88) eller (4.89), hvor af-

lastningen begynder. Disse ligninger er givet ved

$$(5.6): T_L^K = (A) T_L^K - \lambda_E I_{(A)E} \delta_L^K - 2\mu_E \cdot (A) E_L^K \\ + \lambda_E I_E \delta_L^K + 2\mu_E E_L^K$$

og tilsvarende

$$\sigma_j^i = (A) \sigma_j^i - \lambda_\epsilon I_{(A)\epsilon} \delta_j^i - 2\mu_\epsilon \cdot (A) \epsilon_j^i \\ + \lambda_\epsilon I_\epsilon \delta_j^i + 2\mu_\epsilon \epsilon_j^i \quad (7.1)$$

Ved ændringer i tøjningstilstanden er det ikke altid muligt umiddelbart at afgøre, om en sådan ændring svarer til en belastning eller en aflastning. Et kriterium til afgørelse heraf baseret på tøjningsenergifunktionen Σ - se formel (4.6) - er derfor opstillet.

$$(5.7): E_L^K = (A) E_L^K + \Delta E_L^K \Rightarrow \begin{array}{l} \Sigma = \Sigma (A) + \Delta \Sigma > \Sigma (A) \quad \text{Belastning} \\ \Sigma = \Sigma (A) + \Delta \Sigma < \Sigma (A) \quad \text{Aflastning} \end{array}$$

Gentagne belastninger kan ikke behandles med de opstillede ligninger, hvis spændingerne overstiger 40%-50% af brudspændingen. For mindre spændinger er dette derimod muligt, idet ligningerne (4.88) og (4.89) i dette spændingsområde er næsten lineære og derfor elastiske og reversible.

I plasticitetsteorien er brudfladen grænseflade for de flydeflader, som svarer til forskellige trin i tøjningshærdningsforløbet. Da brudbetingelser for beton ofte opstilles uafhængigt af disse flydeflader og hærdningsantagelse, kan der opstå kompatibilitetsproblemer mellem disse flydeflader og de verificerede brudflader. Sådanne problemer eksisterer ikke i den foreliggende teori, idet spændingstilstanden kendes eksplicit som funktion af tøjningstilstanden; og teorien kan derfor umiddelbart anvendes i forbindelse med enhver brudbetingelse.

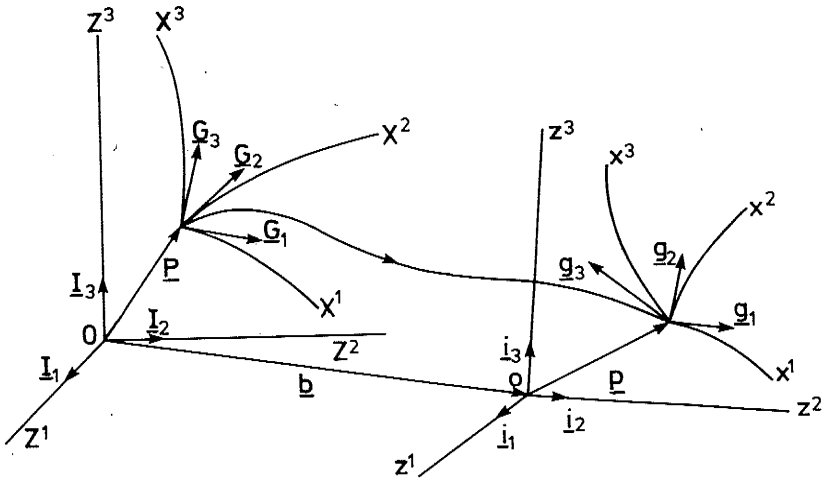
LITTERATURFORTEGNELSE

- [Truesdell.1-66] Truesdell: The Elements of Continuum Mechanics. Berlin 1966.
- [Eringen.2-62] Eringen, A.C.: Non-linear Theory of Continuous Media. McGraw-Hill Book Company. London. 1962.
- [Caprioli.3-55] Caprioli, L.: Su un criterio per l'esistenza dell'energia di deformazione. Boll. Un. Mat. Ital., Bd.10 pp.481-483. 1955.
- [Green, Zerna.4-54] Green, A.E. og Zerna, W.: Theoretical Elasticity. Oxford. 1954.
- [Eringen.5-67] Eringen, A.C.: Mechanics of Continua. New York. 1967.
- [Sargin.6-71] Sargin, M.: Stress-Strain Relationships for Concrete and the Analysis of Structural Concrete Sections. Study no.4, Solid Mechanics Division, University of Waterloo, Canada.
- [Popovics.7-70] Popovics, S.: Review of Stress-Strain Relationships for Concrete. ACI Journal Proceedings, Vol.67, No.3, pp.243-248. 1970.
- [Hencky.8-24] Hencky, H.: Zur Theorie plastischer Deformationen und der hierdurch hervorgerufenen Nachspannungen. Zeits. angew. Math. u.Mech., 4, 323-334. 1924.
- [Malvern.9-69] Malvern, L.E.: Introduction to the Mechanics of a Continuous Medium. Prentice Hall, Inc., New Jersey, 1969.
- [Chen.10-73] Chen, A.C. and Chen, W.F.: Constitutive Relations of Concrete and Punch-Indentation Problems. Report No.370.11. Fritz Engineering Laboratory, Lehigh University, Bethlehem, Pennsylvania, 1973.

- [Chen.11-75] Chen, A.C. and Chen, W.F.: Constitutive Relations for Concrete. Journal of the Engineering Mechanics Division, Proceedings of ASCE, Vol.101. No.EM4, August 1975.
- [Newman.12-68] Newman, K.: Criteria for the Behaviour of Plain Concrete under Complex States of Stress. The Structure of Concrete, Cement and Concrete Association, pp. 255-274. London, 1968.
- [Drucker.13-51] Drucker, D.C.: A more fundamental approach to plastic stress-strain relations. Proc. 1st U.S.Natl.Congr. Appl.Mech., pp.487-491. ASME. New York, 1951.
- [Greenberg.14-60] Greenberg, H.J., Dorn, W.S. and Wetherell, A.H.: A comparison of flow and deformation theories in plastic torsion. Plasticity. pp.279-296. Pergamon Press Ltd., 1960.
- [Miller.15-67] Miller, P.M. and Malvern, L.E.: Numerical analysis of combined bending and torsion of a work-hardening square bar. Journal of Applied Mechanics, Trans. ASME, 34, pp.1005-1010, 1967.
- [Murnaghan.16-37] Murnaghan, F.D.: Finite deformation of an elastic solid. American Journal of Mathematics. Vol. 59. 1937.
- [Kupfer.17-73] Kupfer, H.: Das Verhalten des Betons unter mehrachsiger Kurzzeitbelastung unter besonderer Berücksichtigung der zweiachsigen Beanspruchung. Deutscher Ausschuss für Stahlbeton. Heft 229. 1973.
- [Kupfer.18-69] Kupfer, H., Hilsdorf, H.K. and Rüschi, H.: Behavior of Concrete under Biaxial Stresses. ACI-Journal pp.656-666. 1969.

- [Brøndum-Nielsen.19-74] Brøndum-Nielsen, T. og Krenchel, H.: Stålfiberarmeret beton. Sagsrapport S20/73. Afd. for Bærende Konstruktioner. 1974.
- [Krenchel.20-75] Krenchel, H.: Stress-strain behaviour of FRC-materials. Rapport FRC(R)ABK-6. RILEM Technical Committee 19-FRC.1975.
- [Hejgaard.21-75] Hejgaard, O.: Stålfiberarmeret beton 2. Sagsrapport S29/75. Afd. for Bærende Konstruktioner.1975.
- [Hognestad.22-51] Hognestad, E.: A Study of Combined Bending and Axial Load in Reinforced Concrete Members. Bulletin no.399. University of Illinois. Eng. Exp. Station. 1951.
- [Rüsch.23-60] Rüsch, H.: Researches Toward a General Flexural Theory for Structural Concrete. ACI-Journal, Proceedings Vol.57. No.1 pp.1-28. 1960.
- [Rüsch.24-62] Rüsch, H., Grasser, E. and Rao, P.S.: Principes de Calcul du Béton Armé sous des Etats de Contraintes Mono-axiaux. Bulletin d'Information No.36, Comité Européen du Béton, pp.1-112. 1962.
- [Brøndum-Nielsen.25-69] Brøndum-Nielsen, T.: Betonkonstruktioner I. Danmarks tekniske Højskole. 1969.
- [Nielsen.26-74] Nielsen, M.P.: Beton I, Del 1. Materialer. Danmarks Ingeniørakademi, Aalborg. 1974.
- [Ottosen.27-75] Ottosen, N.S.: Failure and Elasticity of Concrete. Risø-M-1801. Danish Atomic Energy Commission.

APPENDIX A

KontinuummeknikDeformationsbeskrivelse

Figur A.1: Basiskoordinatsystemer

Positionsvektorerne for et givet materielt punkt er i henholdsvis den rektangulære, materielle basis \underline{I}_K og den rektangulære, rumlige basis \underline{i}_k givet ved:

$$\underline{P} = z^K \underline{I}_K \quad (\text{A.1})$$

$$\underline{p} = z^k \underline{i}_k \quad (\text{A.2})$$

Heraf fås

$$d\underline{P} = \underline{I}_K dz^K \quad (\text{A.3})$$

$$d\underline{p} = \underline{i}_k dz^k \quad (\text{A.4})$$

Ved skift til de mere generelle koordinater x^K og x^k fås:

$$d\underline{p} = \frac{\partial Z^R}{\partial x^K} \underline{i}_R dx^K = \underline{G}_K dx^K \quad (\text{A.5})$$

$$d\underline{p} = \frac{\partial Z^r}{\partial x^k} \underline{i}_r dx^k = \underline{g}_k dx^k \quad , \quad (\text{A.6})$$

hvor \underline{G}_K og \underline{g}_k angiver de tilhørende baser.

Længderne i de to basissystemer er givet ved:

$$\begin{aligned} ds^2 &= d\underline{p} \cdot d\underline{p} \\ &= \underline{G}_K \cdot \underline{G}_L dx^K dx^L = G_{KL} dx^K dx^L \quad , \quad (\text{A.7}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} ds^2 &= d\underline{p} \cdot d\underline{p} \\ &= \underline{g}_k \cdot \underline{g}_l dx^k dx^l = g_{kl} dx^k dx^l \quad , \quad (\text{A.8}) \end{aligned}$$

hvor G_{KL} og g_{kl} angiver de kovariante referencemetrikker for henholdsvis de materielle og rumlige koordinater.

Ved hjælp af bevægelsesligningerne

$$x^k = x^k(X^K, t) \quad \text{og} \quad X^K = X^K(x^k, t) \quad (\text{A.9})$$

kan sammenhængen mellem dx^k og dX^K skrives

$$dX^K = \frac{\partial X^K}{\partial x^k} dx^k \quad (\text{A.10})$$

$$dx^k = \frac{\partial x^k}{\partial X^K} dX^K \quad (\text{A.11})$$

Indsættes (A.10) og (A.11) i henholdsvis (A.7) og (A.8), fås:

$$\begin{aligned}
 ds^2 &= G_{KL} \frac{\partial x^K}{\partial x^k} \frac{\partial x^L}{\partial x^\ell} dx^k dx^\ell = \underline{G}^K \cdot \underline{G}_L \frac{\partial x^K}{\partial x^k} \frac{\partial x^L}{\partial x^\ell} dx^k dx^\ell \\
 &= \underline{c}_k \cdot \underline{c}_\ell dx^k dx^\ell = c_{k\ell} dx^k dx^\ell \quad (A.12)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 ds^2 &= g_{kl} \frac{\partial x^k}{\partial x^K} \frac{\partial x^\ell}{\partial x^L} dx^K dx^L = \underline{g}_k \cdot \underline{g}_\ell \frac{\partial x^k}{\partial x^K} \frac{\partial x^\ell}{\partial x^L} dx^K dx^L \\
 &= \underline{C}_K \cdot \underline{C}_L dx^K dx^L = C_{KL} dx^K dx^L \quad (A.13)
 \end{aligned}$$

hvor $c_{k\ell}$ og C_{KL} er henholdsvis Cauchy's og Green's deformationstensorer, der begge er symmetriske og positivt definite.

Af (A.13) ses, at C_{KL} kan betragtes som den metriske tensor svarende til den deformerede tilstand til tiden t , hvilket vil sige, at vektorerne $\underline{G}_K dx^K$ deformeres over i $\underline{C}_K dx^K$, idet der refereres til samme koordinatsystem x^K .

I en stiftlegemebevægelse gælder der for alle materielle punkter:

$$ds^2 = dS^2 \quad (A.14)$$

Differensen $ds^2 - dS^2$ er derfor et mål for deformationen ved en given flytningstilstand. Denne deformation kan angives ved hjælp af Lagrange's tøjningstensor E_{KL} eller Cauchy's tøjningstensor $e_{k\ell}$, som defineres ved

$$ds^2 - dS^2 = 2E_{KL} dx^K dx^L = 2e_{k\ell} dx^k dx^\ell \quad (A.15)$$

Ved indsættelse af (A.7) og (A.13) i (A.15) fås:

$$E_{KL} = \frac{1}{2}(C_{KL} - G_{KL}) \quad (A.16)$$

Ved multiplikation med den kontravariante metriske tensor G^{RK} fås:

$$E_L^R = \frac{1}{2}(C_L^R - \delta_L^R) \quad (\text{A.17})$$

idet

$$G^{RK} G_{KL} = \delta_L^R \quad (\text{A.18})$$

Tilsvarende fås ved benyttelse af (A.8), (A.12) og (A.15):

$$e_{kl} = \frac{1}{2}(g_{kl} - c_{kl}) \quad (\text{A.19})$$

og

$$e_l^r = \frac{1}{2}(\delta_l^r - c_l^r) \quad (\text{A.20})$$

Af (A.15) fås

$$E_{KL} = e_{kl} \frac{\partial x^k}{\partial X^K} \frac{\partial x^l}{\partial X^L} \quad (\text{A.21})$$

og

$$e_{kl} = E_{KL} \frac{\partial X^K}{\partial x^k} \frac{\partial X^L}{\partial x^l} \quad (\text{A.22})$$

Spændingsbeskrivelse

Komponent (k, l) af Cauchy's spændingstensor $\underline{\sigma}^{kl}$ angiver den l 'te komponent af spændingsvektoren $\underline{\sigma}^k$ virkende på den positive side af den k 'te koordinatflade:

$$\underline{\sigma}^k = \sigma^{kl} \underline{g}_l \quad (\text{A.23})$$

Idet da_k og dA_K angiver arealer i henholdsvis den deformerede og udeformerede tilstand, definerer udtrykket

$$\underline{\sigma}^k da_k = \underline{T}^K dA_K \quad (\text{A.24})$$

en transformeret spændingsvektor \underline{T}^K hørende til punktet \underline{x} , men refererende til det udeformerede areal dA_K i punktet \underline{x} .

Man kan vise, at

$$da_k = J \frac{\partial X^K}{\partial x^k} dA_K, \quad (\text{A.25})$$

hvor J er Jacobi-matricen for transformationen

$$z^k = z^k(z^K) \quad (\text{A.26})$$

Substitueres (A.25) ind i (A.24) fås:

$$\underline{\sigma}^k = J^{-1} \frac{\partial x^k}{\partial X^K} \underline{T}^K \quad (\text{A.27})$$

$$\underline{T}^K = J \frac{\partial X^K}{\partial x^k} \sigma^k \quad (\text{A.28})$$

Indsættes (A.23) i (A.28) fås:

$$\underline{T}^K = J \frac{\partial X^K}{\partial x^k} \sigma^{k\ell} \underline{q}_\ell = T^{K\ell} \underline{q}_\ell, \quad (\text{A.29})$$

hvor $T^{K\ell}$ betegnes Lagrange's spændingstensor. Komponent (K, ℓ) af $T^{K\ell}$ angiver den ℓ 'te komponent af den transformerede spændingsvektor \underline{T}^K virkende på den positive side af den K 'te koordinatflade.

Af (A.13) fås:

$$\underline{q}_\ell = \frac{\partial X^L}{\partial x^\ell} \underline{C}_L, \quad (\text{A.30})$$

som indsat i (A.29) giver

$$\begin{aligned} \underline{T}^K &= J \frac{\partial X^K}{\partial x^k} \frac{\partial X^L}{\partial x^\ell} \sigma^{k\ell} \underline{C}_L \\ &= T^{KL} \frac{\partial X^L}{\partial x^\ell} \underline{C}_L = T^{KL} \underline{C}_L \end{aligned} \quad (\text{A.31})$$

T^{KL} er Piola-Kirchhoff's spændingstensor, hvor komponent (K,L) angiver den L 'te komponent af \underline{T}^K virkende på den positive side af den K 'te koordinatflade.

T^{KL} er en konvektiv spændingstensor, idet den refererer til en base \underline{C}_L , som følger med deformationen.

$\sigma^{k\ell}$: Cauchy's spændingstensor angiver spændingerne på faste rumlige flader opløst efter faste rumlige retninger.

$T^{K\ell}$: Lagrange's spændingstensor angiver de transformerede spændinger på faste materielle flader opløst efter faste rumlige retninger.

T^{KL} : Piola-Kirchhoff's spændingstensor angiver de transformerede spændinger på faste materielle flader opløst efter faste materielle retninger.

APPENDIX B

Cauchy's teorem om invariantfunktioner

Hvis $F(V_1^k, V_2^k, \dots, V_m^k)$ er en skalarfunktion af et system af n vektorer, og hvis denne funktion F endvidere er invariant over for stiftlegemebevægelser, da kan F reduceres til en funktion af vektorernes længder, af deres skalarprodukter to ad gangen, og af determinanterne af vektorerne tre ad gangen.

APPENDIX C

Forskellige udformninger af de konstitutive ligninger for hyperelastiske materialer

Et materiale siges at være hyperelastisk, hvis det besidder en tøjningsenergi Σ af formen

$$\Sigma = \Sigma(x^K, x^k, g^k, g_K^k, \rho, \underline{G}_K, \frac{\partial x^k}{\partial x^K}), \quad (C.1)$$

således at

$$\frac{\rho}{\rho_0} \dot{\Sigma} = \sigma_\ell^k d_k^\ell \quad (C.2)$$

Størrelserne i (C.1) er angivet i Afsnit 2.3. Prik-notationen angiver differentiation med hensyn til tiden t . σ_ℓ^k er Cauchy's spændingstensor, og d_k^ℓ er deformationshastigheds-tensoren.

Ved brug af det grundlæggende udtryk (C.2) får man:

$$\begin{aligned}
 \sigma^{kl} d_{k\ell} &= \frac{\rho}{\rho_0} \frac{\partial \Sigma}{\partial C_{KL}} \dot{C}_{KL} \\
 &= 2 \frac{\rho}{\rho_0} \frac{\partial \Sigma}{\partial C_{KL}} \dot{E}_{KL} \\
 &= 2 \frac{\rho}{\rho_0} \frac{\partial \Sigma}{\partial C_{KL}} \frac{\partial x^k}{\partial X^K} \frac{\partial x^\ell}{\partial X^L} d_{k\ell} \quad (C.3)
 \end{aligned}$$

Heraf får man for arbitrær $d_{k\ell}$ Boussinesq's form med variable C_{KL} og E_{KL} :

$$\begin{aligned}
 \delta^{kl} &= 2 \frac{\rho}{\rho_0} \frac{\partial \Sigma}{\partial C_{KL}} \frac{\partial x^k}{\partial X^K} \frac{\partial x^\ell}{\partial X^L} \\
 &= \frac{\rho}{\rho_0} \frac{\partial \Sigma}{\partial E_{KL}} \frac{\partial x^k}{\partial X^K} \frac{\partial x^\ell}{\partial X^L} \quad (C.4)
 \end{aligned}$$

Ved benyttelse af henholdsvis Lagrange's spændingstensor $T^{K\ell}$ og Piola-Kirchhoff's spændingstensor T^{KL} får man de to Kelvin-Cosserat-former:

$$T^{K\ell} = \frac{\partial \Sigma}{\partial E_{KN}} \frac{\partial x^\ell}{\partial X^N} \quad (C.5)$$

$$T^{KL} = \frac{\partial \Sigma}{\partial E_{KL}} \quad (C.6)$$

Ved tilsvarende omregninger kan udledes en lang række af udtryk, hvoraf enkelte skal nævnes.

Neumann's form:

$$\sigma_\ell^k = \frac{\rho}{\rho_0} \frac{\partial \Sigma}{\partial (\partial x^\ell / \partial X^K)} \frac{\partial x^k}{\partial X^K} \quad (C.7)$$

Kirchhoff's form:

$$T_\ell^K = \frac{\partial \Sigma}{\partial (\partial x^\ell / \partial X^K)} \quad (C.8)$$

Hamel's rumlige form:

$$\sigma_l^k = - \frac{\rho}{\rho_0} \frac{\partial \Sigma}{\partial (\partial X^K / \partial x^k)} \frac{\partial X^K}{\partial x^l} \quad (C.9)$$

Murnaghan's rumlige form:

$$\sigma_l^k = - \frac{\rho}{\rho_0} \frac{\partial \Sigma}{\partial c_{mn}} \frac{\partial c_{mn}}{\partial (\partial X^K / \partial x^k)} \frac{\partial X^K}{\partial x^l} \quad (C.10)$$

APPENDIX D

Rækkeudvikling af de konstitutive ligninger

De konstitutive ligninger givet ved (4.1) eller (6.6) kan rækkeudvikles på flere måder. I Afsnit 4.2 er der foretaget en direkte udvikling af $\Sigma(I_E, II_E, III_E)$ i invarianterne. En anden fremgangsmåde er at benytte (4.1) som udgangspunkt:

$$\begin{aligned} T_L^K &= \frac{\partial \Sigma(I_E, II_E, III_E)}{\partial E_K^L} \\ &= \frac{\partial \Sigma}{\partial I_E} \cdot \frac{\partial I_E}{\partial E_K^L} + \frac{\partial \Sigma}{\partial II_E} \frac{\partial II_E}{\partial E_K^L} + \frac{\partial \Sigma}{\partial III_E} \frac{\partial III_E}{\partial E_K^L} \end{aligned} \quad (D.1)$$

Ved hjælp af resultaterne i Appendix E fås:

$$\begin{aligned} T_L^K &= \frac{\partial \Sigma}{\partial I_E} \delta_L^K + \frac{\partial \Sigma}{\partial II_E} \cdot (I_E \delta_L^K - E_L^K) \\ &\quad + \frac{\partial \Sigma}{\partial III_E} \cdot (II_E \delta_L^K - I_E E_L^K + E_N^K E_L^N) \\ &= \left(\frac{\partial \Sigma}{\partial I_E} + \frac{\partial \Sigma}{\partial II_E} I_E + \frac{\partial \Sigma}{\partial III_E} II_E \right) \delta_L^K \\ &\quad - \left(\frac{\partial \Sigma}{\partial II_E} + \frac{\partial \Sigma}{\partial III_E} \right) E_L^K + \frac{\partial \Sigma}{\partial III_E} \cdot E_N^K E_L^N \\ &= A_0 \delta_L^K + A_1 E_L^K + A_2 E_N^K E_L^N \end{aligned} \quad (D.2)$$

Problemet er herefter blot at rækkeudvikle A_0 , A_1 og A_2 til henholdsvis 2., 1. og 0. orden i invarianterne for E_L^K , idet de konstitutive ligninger altid kan reduceres til formen (D.2)

ved hjælp af Cayley-Hamilton's formel:

$$E_R^K E_S^R E_L^S - I_E E_R^K E_L^R + II_E E_L^K - III_E \delta_L^K = 0 \quad (D.3)$$

APPENDIX E

Partielle afledede af den Lagrange'ske tøjningstensors invarianterDen 1.invariant I_E :

$$I_E = E_M^M = \delta_N^M E_M^N \quad (E.1)$$

$$\frac{\partial I_E}{\partial E_L^K} = \frac{\partial (\delta_N^M E_M^N)}{\partial E_L^K} = \delta_N^M \delta_L^N \delta_M^K = \delta_L^K \quad (E.2)$$

Den 2.invariant II_E :

$$\begin{aligned} II_E &= \frac{1}{2} (E_N^N E_S^S - E_N^S E_S^N) \\ &= \frac{1}{2} (E_N^N \delta_M^S E_S^M - E_N^S E_S^N) \end{aligned} \quad (E.3)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial II_E}{\partial E_L^K} &= \frac{1}{2} (2E_N^N \delta_M^S \delta_L^M \delta_S^K - \delta_L^S \delta_N^K E_S^N - E_N^S \delta_L^N \delta_S^K) \\ &= \frac{1}{2} (2E_N^N \delta_L^K - 2E_L^K) = I_E \delta_L^K - E_L^K \end{aligned} \quad (E.4)$$

Den 3.invariante III_E :

$$\begin{aligned} III_E &= \det(E_L^K) = \frac{1}{3!} \delta_P^M \delta_Q^N \delta_R^S E_M^P E_N^Q E_S^R \\ &= \frac{1}{3!} (\delta_P^M \delta_Q^N \delta_R^S + \delta_Q^M \delta_R^N \delta_P^S + \delta_R^M \delta_P^N \delta_Q^S \\ &\quad - \delta_P^M \delta_R^N \delta_Q^S - \delta_R^M \delta_Q^N \delta_P^S - \delta_Q^M \delta_P^N \delta_R^S) E_M^P E_N^Q E_S^R \end{aligned} \quad (E.5)$$

$$\frac{\partial \text{III}_E}{\partial E_L^K} = \frac{1}{3!} (\delta_P^M \delta_Q^N \delta_R^S + \delta_Q^M \delta_R^N \delta_P^S + \delta_R^M \delta_P^N \delta_Q^S - \delta_P^M \delta_R^N \delta_Q^S - \delta_R^M \delta_Q^N \delta_P^S - \delta_Q^M \delta_P^N \delta_R^S) \quad (\text{E.5})$$

$$(\delta_L^P \delta_M^K E_N^{QS} + E_M^P \delta_L^Q \delta_N^K E_S^R)$$

$$+ E_M^P E_N^{QS} \delta_L^R \delta_S^K)$$

$$= \frac{1}{3!} (E_N^{ES} \delta_L^K + E_N^{EK} E_L^N + E_N^{KN} E_L^N$$

$$- E_N^{SN} E_L^N \delta_L^K - E_N^{EN} E_L^K - E_N^{EN} E_L^K$$

$$+ E_N^{EN} E_S^{EK} \delta_L^K + E_N^{EK} E_L^N + E_N^{KN} E_L^N$$

$$- E_N^{EN} E_L^K - E_N^{SN} E_S^{EK} \delta_L^K - E_N^{EN} E_L^K$$

$$+ E_N^{EN} E_S^{EK} \delta_L^K + E_N^{EK} E_L^N + E_N^{KN} E_L^N$$

$$- E_N^{EN} E_L^K - E_N^{EN} E_L^K - E_N^{SN} E_S^{EK} \delta_L^K)$$

$$= \frac{1}{2} (E_N^{EN} E_S^{EK} - E_N^{SN} E_S^{EK}) \delta_L^K$$

$$- E_N^{EN} E_L^K + E_N^{KN} E_L^N$$

$$= \text{II}_E \delta_L^K - \text{I}_E E_L^K + E_N^{KN} E_L^N \quad (\text{E.6})$$

AFDELINGEN FOR BÆRENDE KONSTRUKTIONER

DANMARKS TEKNISKE HØJSKOLE

Structural Research Laboratory

Technical University of Denmark, DK-2800 Lyngby

RAPPORTER (Reports)

(1974 -)

- R 43. BORCHERSEN, EGIL: Moiré pattern deformation theory and optical filtering techniques. 1974.
- R 44. BRØNDUM-NIELSEN, TROELS: Optimum design of reinforced concrete shells and slabs.
- R 45. PEDERSEN, FLEMMING BLIGAARD: Dynamic properties of anti-vibration mountings. 1974.
- R 46. PHILIPSEN, CLAUDS: Interferensholografisk bestemmelse af legemets form og flytningsfelt. 1974.
- R 47. LARSEN, H.J. og H. RIBERHOLT: Tværbæreevne af søm og dykkere i spån- og træfiberplader. 1974.
- R 48. POULSEN, P.E.: The photo-elastic effect in three-dimensional states of stress. 1974.
- R 49. NIELSEN, J.: Modellove for kornede medier med særligt henblik på silomodeller. 1974.
- R 50. KRENK, STEEN: The problems of an inclined crack in an elastic strip. 1974.
- R 51. BRØNDUM-NIELSEN, TROELS: Effect of prestress on the damping of concrete. Effect of grouting on the fatigue strength of post-tensioned concrete beams. 1974.
- R 52. EGERUP, ARNE RYDÉN, H.J. LARSEN, H. RIBERHOLT and ERIK SØRENSEN: Papers presented at IUFRO-V, International Union of Forestry Research Organisation, Division V, Congress 1973. 1974.
- R 53. HOLST, OLE: Automatic design of plane frames. 1974.
- R 54. NIELSEN, SØREN: Svingninger i mastebarduner. 1974.
- R 55. AGERSKOV, HENNING: Behaviour of connections using prestressed high strength bolts loaded in tension. 1974.
- R 56. MØLLMANN, H.: Analysis of prestressed cable systems supported by elastic boundary structures. 1974.
- R 57. NIELSEN, J. and V. ASKEGAARD: Scale errors in model tests on granular media with special reference to silo models. 1974.
- R 58. SVENSSON, SVEN EILIF: Stability properties and mode interaction of continuous, conservative systems. 1974.
- R 59. SIGBJÖRNSSON, RAGNAR: On the theory of structural vibrations due to natural wind. 1974.
- R 60. SØRENSEN, HANS CHR.: Shear tests on 12 reinforced concrete T-beams. 1974.

- R 61. NIELSEN, LEIF OTTO: Spændingshybride finite elementer til svingningsproblemer. 1975.
- R 62. EGERUP, ARNE RYDÉN: Theoretical and experimental determination of the stiffness and ultimate load of timber trusses. 1975.
- R 63. LAURSEN, MARTIN: A curved beam equilibrium element applicable in standard finite element program systems. 1975.
- R 64. BACH, FINN: Metoder til måling af egen-spændinger. 1975.
- R 65. BACH, FINN: En teoretisk og eksperimentel undersøgelse af den akustoelastiske metodes anvendelighed til egen-spændingsmåling. 1975.
- R 66. PEDERSEN, FLEMMING BLIGAARD: Measurement of the complex modulus of viscoelastic materials. 1975.
- R 67. PEDERSEN, FLEMMING BLIGAARD: Svingningsforsøg med viskoelastisk dæmpede sandwichbjælker. 1975.
- R 68. AGERSKOV, HENNING: Analysis of high strength bolted connections subject to prying. A simplified approach. 1975.
- R 69. PEDERSEN, MAX ELGAARD: En 2.ordens tilnærmelse til de konstitutive ligninger for beton. 1976.
- R 70. RIBERHOLT, HILMER, and PETER CHR. NIELSEN: Timber under combined compression and bending stress. 1976.
- R 71. KRENCHER, HERBERT og J. BJØRNBAK-HANSEN: Undersøgelse af let konstruktionsbetons væsentligste materialemparametre. 1976.
- R 72. PRÆSTRUP, M.W., M.P. NIELSEN, FINN BACH and B.CHR. JENSEN: Shear Tests on Reinforced Concrete T-Beams. Series T. 1976.

