

AFDELINGEN FOR
BÆRENDE KONSTRUKTIONER
DANMARKS TEKNISKE HØJSKOLE



STRUCTURAL RESEARCH LABORATORY
TECHNICAL UNIVERSITY OF DENMARK

Karl Erik Hansen, Kaj L. Bryder og M. P. Nielsen
ARMERINGSBESTEMMELSE I JERNBETONSKALLER

ARMERINGSBESTEMMELSE I
JERNBETONSKALLER

AF

KARL ERIK HANSEN, KAJ L. BRYDER OG M.P. NIELSEN

SUMMARY

This report deals with computer methods for the calculation of reinforcement in shells with given stress resultants.

The methods are based on subdivision of the shell in a certain number of plates and the reinforcement of the plates is determined on the basis of the theory of plasticity. The methods dealt with are based on either successive approximation or mathematical programming techniques. Limitations of the thickness of the plates loaded in compression are established on the basis of Danish Code rules for combined bending and compression.

For practical purposes it is recommended to use a combination of the iterative methods, whereby all of the loading cases can be covered. The computer time as well as the required computer storage will be very limited.

RESUME

Nærværende rapport omhandler metoder til bestemmelse af armering i jernbetonskaller med givne snitkræfter. På grundlag af opdeling af skallen i skiver og teorien for stift plastiske materialer udvikles edb-metoder baseret dels på successiv iteration, dels på matematisk programmering.

For tykkelsen af de skiver, der påvirkes til tryk, bestemmes begrænsninger ud fra betonnormens (ref. [14]) regler for bøjning med normalkraft.

Det konkluderes, at en kombination af nogle af de iterative metoder normalt vil være fordelagtigst at anvende. Herved kan alle lasttilfælde dækkes ind, og såvel edb-regnetid som -lagerbehov vil blive meget begrænset.

INDHOLDSFORTEGNELSE:

	<u>Side</u>
1. Indledning	2
2. Tidligere arbejder	2
3. Bøjning med normalkraft	4
4. Undersøgte beregningsmodeller	17
5. Anbefalet fremgangsmåde	33
6. Eksempler	35
7. Matematiske programmeringsmetoder	37
8. Konklusion	49
9. Litteratur	50

1. INDLEDNING

Snitkræfterne i en armeret betonskalkonstruktion bestemmes ofte ved ret forfinede f.eks. elasticitetsteoretiske metoder. Når man derefter skal bestemme armeringen tages undertiden ganske grove metoder i brug.

I denne rapport redegøres for et forsøg på at udvikle en rationel metode til bestemmelse af armeringen i en vilkårlig skalkonstruktion.

Arbejdet er fortrinsvis udført i forbindelse med et licentiatstudium (Kaj. L. Bryder) og i forbindelse med et eksamensprojekt (Karl Erik Hansen).

De udviklede metoder er baseret på plasticitetsteorien. Det forudsættes, at betonens brudbetingelse kan beskrives v.h.a. friktionshypotesen (Coulombs brudbetingelse med reduceret trækstyrke). Betonens trækstyrke sættes til nul. Om armeringen forudsættes, at den kun kan optage aksiale træk- eller trykkræfter. Begge materialer forudsættes at være stift plastiske.

Formler opstilles ved anvendelse af plasticitetsteoriens nedreværdisætning, idet der opereres med en delmængde af statisk tilladelige spændingsfordelinger, inden for hvilke armeringen søges minimaliseret.

Forskydningskræfterne i skalnormalens retning negligeres.

2. TIDLIGERE ARBEJDER

Armeringsbestemmelsen i specialtilfældene skive og plade er beskrevet i [8], [9], [10] og [12].

Da der gøres udstrakt brug af armeringsformlerne for skiver, skal disse formler kort gengives her.

Vi betragter en skive armeret i to på hinanden vinkelrette retninger x og y . Vi ønsker at bestemme den nødvendige armering til optagelse af givne spændinger, der, som sædvanligt, benævnes σ_x , σ_y og τ_{xy} , hvor σ_x og σ_y er normalspændinger og τ_{xy} forskydningsspændingen. Betonens trækstyrke forudsættes lig med nul.

Betegnes armeringsarealet i x-retningen målt pr. længdeenhed i y-retningen med F_{jx} , armeringen pr. længdeenhed i y-aksens retning med F_{jy} og armeringens flydespænding med σ_F , er trækstyrkerne σ_{tx} og σ_{ty} målt pr. arealenhed af skiven i armeringsretningerne lig med

$$\sigma_{tx} = \frac{F_{jx}\sigma_F}{t} \quad (2.1)$$

$$\sigma_{ty} = \frac{F_{jy}\sigma_F}{t} \quad (2.2)$$

hvor t er tykkelsen.

Formlerne til bestemmelse af den nødvendige armering lyder, når det forudsættes, at spændingerne er navngivet således, at $\sigma_x \leq \sigma_y$:

Tilfælde 1: $\sigma_x \geq -|\tau_{xy}|$

$$\sigma_{tx} = \sigma_x + |\tau_{xy}| \quad (2.3)$$

$$\sigma_{ty} = \sigma_y + |\tau_{xy}| \quad (2.4)$$

Tilfælde 2: $\sigma_x < -|\tau_{xy}|$

$$\sigma_{tx} = 0 \quad (2.5)$$

$$\sigma_{ty} = \sigma_y + \frac{\tau_{xy}^2}{|\sigma_x|} \quad (2.6)$$

Formlerne giver den mindst mulige armering, der sammen med et enakset betontryk kan overføre de givne spændinger. Betonspændingen σ_b bliver i tilfælde 1

$$\sigma_b = 2|\tau_{xy}| \quad (2.7)$$

og i tilfælde 2

$$\sigma_b = |\sigma_x| \left(1 + \left(\frac{\tau_{xy}}{\sigma_x} \right)^2 \right) \quad (2.8)$$

I ovenstående formler er normalspændinger σ_x og σ_y regnet positive som træk. Betonspændingen σ_b er regnet positiv som tryk.

Af den ene af forfatterne (M.P. Nielsen) forsøgtes i 1971 [11] at opstille et færdigt formelsæt for de snitkræfter, der normalt regnes med ved dimensioneringen af cylinderskaller. I samme afhandling nævntes muligheden af at bestemme armeringen ved opdeling af skallen i skiver, en fremgangsmåde som i [10] blev benyttet til udledning af færdige formler for den nødvendige armering i plader.

Fremgangsmåden er ligeledes behandlet af T. Brøndum-Nielsen [3].

C.T. Morley [7] har forsøgt at bestemme minimumsarmeringen i det generelle tilfælde, men kun i det tilfælde, hvor der kræves armering i alle fire på hinanden vinkelrette armeringsretninger kommer han til et færdigt formelsæt. I andre tilfælde er beregningerne kun gennemførlige på regnemaskine.

Det har også været foreslået at bestemme armeringen ved en iterativ metode, hvor armeringen først skønnes, og derefter foretages en beregning af spændings- og tøjningsfordelingen ud fra forudsætningen om plan tøjningsfordeling og under visse forudsætninger om betonens og armeringens konstitutive ligninger. En sådan fremgangsmåde er angivet af Steinar Berg [1], [2].

Sådanne metoder vil ikke blive behandlet her.

3. BØJNING MED NORMALKRAFT

MN-diagrammer udregnet under forudsætning af henholdsvis DS411 [14] og stift ideal-plastisk model sammenlignes. Beregningsmetoderne benævnes henholdsvis NORM og SIP.

Der betragtes et tværsnit, som vist på fig. 3.1. Snitkræfterne henføres til et punkt $\frac{1}{2} \cdot h_e$ nede i tværsnittet.

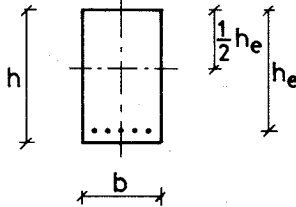


Fig. 3.1. Bjælkets tværsnit.

Følgende symboler anvendes:

- A_a : armeringsareal
- σ_{ak} : armeringens karakteristiske flyde- eller 0,2 spænding
- σ'_{bk} : betonens karakteristiske trykstyrke
- ϕ : det mekaniske armeringsforhold, $\phi = \frac{A_a \cdot \sigma_{ak}}{b \cdot h_e \cdot \sigma'_{bk}}$
- M : snitmomentet om en linie $\frac{1}{2} \cdot h_e$ nede i tværsnittet
- N' : snitnormalkraft, regnes positiv ved tryk
- $N^{*'} :$ dimensionsløs normalkraft, $N^{*'} = \frac{N'}{b \cdot h_e \cdot \sigma'_{bk}}$
- M^* : dimensionsløst moment, $M^* = \frac{M}{b \cdot h_e^2 \cdot \sigma'_{bk}}$
- $\epsilon_{af}, \epsilon'_{af}$: træk- og trykflydetøjning, begge regnes positive
- ϵ : tøjning, regnes positiv ved forlængelser og negativ ved forkortelser.

Beregninger udføres med st.37 og tentor 56. Arbejdslinier som skitseret i Skema 3.1 benyttes.

	NORM	SIP	MATERIALEKONSTANTER
Beton			Beregninger er gældende for vilkårlig σ'_{bk} .
st.37			$E_{ak} = 2,0 \cdot 10^5 \text{ MN/m}^2$ $\sigma_{ak} = \sigma'_{ak} = 240 \text{ MN/m}^2$ $\epsilon_{af} = \epsilon'_{af} = 1,2\%$
tentor 56 *			$E_{ak} = 2,0 \cdot 10^5 \text{ MN/m}^2$ $\sigma_{ak} = 560 \text{ MN/m}^2$ $\sigma'_{ak} = 448 \text{ MN/m}^2$ $\epsilon_{af} = 2,8\% (4,8\%)$ $\epsilon'_{af} = 2,24\% (4,24\%)$

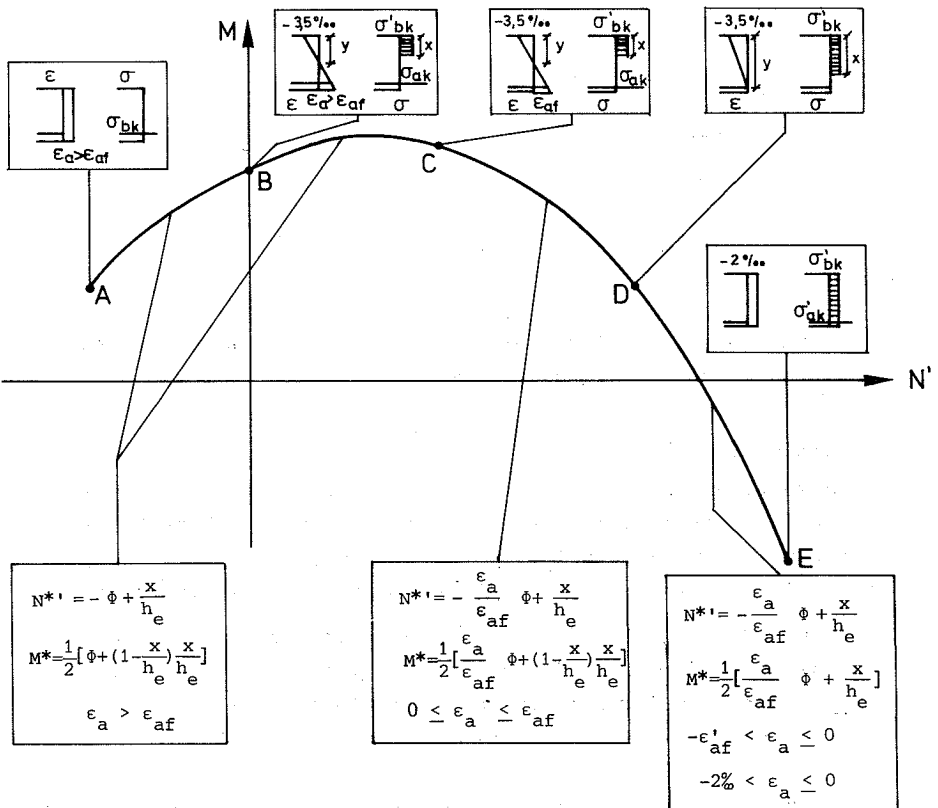
* Ved den normmæssige beregning ses der bort fra arbejdsliniens krumning. På side 16 er tilnærmelsen vurderet.

SKEMA 3.1

Udregning af MN-diagrammer

NORM:

De optrædende spændings-tøjningstilstande og tilhørende formler er søgt anskueliggjort i fig. 3.2. Figuren er optegnet for $\phi < \phi_{balanc}$, for $\phi = \phi_{balanc}$ falder punkt B og C sammen, for $\phi > \phi_{balanc}$ rykker punkt C over mellem punkterne A og B. Formlerne er uændrede. ϕ_{balanc} svarer til balanceret tværsnit. Punkterne A, B, C, D og E svarer til benævnelserne i DS 411 [14].



$$N' = \frac{N'}{bh_e \sigma'_{bk}} \quad M^* = \frac{M}{bh_e^2 \sigma'_{bk}} \quad x = 0,75 y$$

Fig. 3.2.

SIP:

Formlerne afledes af de foregående, idet x erstattes med y og

$$\frac{\epsilon_a}{\epsilon_{af}} = 1 \text{ for } \epsilon_a > 0 \text{ og } \frac{\epsilon_a}{\epsilon_{af}} = - \frac{\epsilon'_{af}}{\epsilon_{af}} \text{ for } \epsilon_a < 0.$$

Kurve A-B-C-D:

$$N^* = -\phi + \frac{Y}{h_e}$$

$$M^* = \frac{1}{2}[\phi + (1 - \frac{Y}{h_e}) \frac{Y}{h_e}]$$

Kurve D-E:

$$N^* = \frac{\epsilon'_{af}}{\epsilon_{af}} \phi + \frac{Y}{h_e}$$

$$M^* = \frac{1}{2}[- \frac{\epsilon'_{af}}{\epsilon_{af}} \phi + (1 - \frac{Y}{h_e}) \frac{Y}{h_e}]$$

De numeriske beregninger er foretaget på EDB. Resultaterne er optegnet på de følgende kurver.

Vurdering af resultater

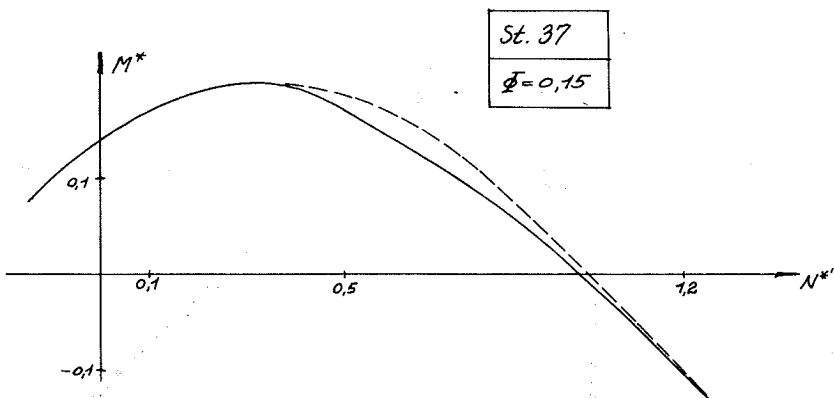
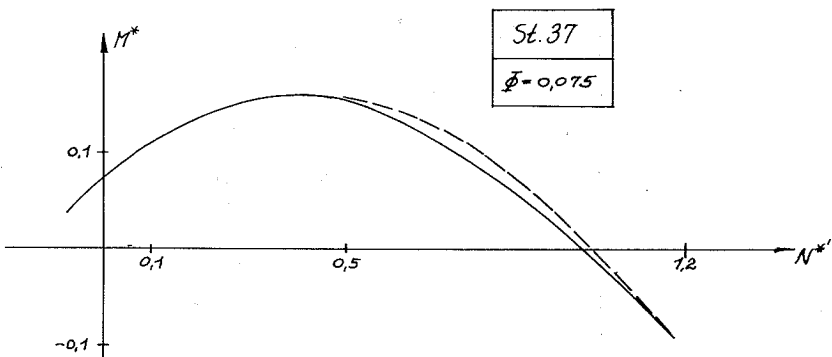
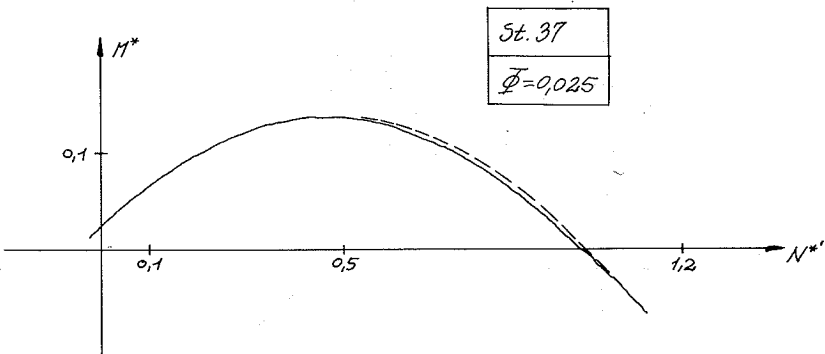
Undersøgelsen er foretaget for at vurdere, hvor stor en del af et skaltværsnit, man kan tillade at udnytte til tryk, når der samtidigt regnes med flydning i armeringen. Dette har betydning ved dimensionering af skaller ved skiveopdelingsmetoden.

Ved den normmæssige beregning optræder største trykzonehøjde med samtidig flydning af armeringen i punkt C på MN-diagrammerne. Indføres den relative trykzonehøjde $\eta = \frac{x}{h_e}$, hvor x er trykzonehøjden, kan vi udregne η i punkt C:

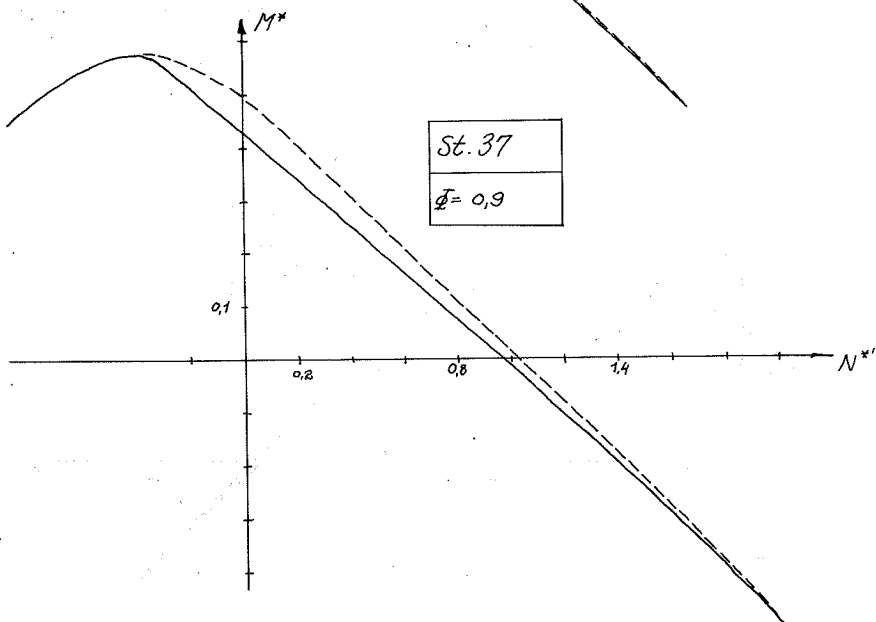
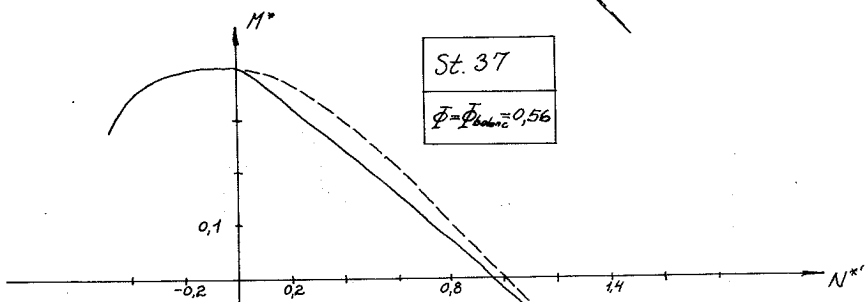
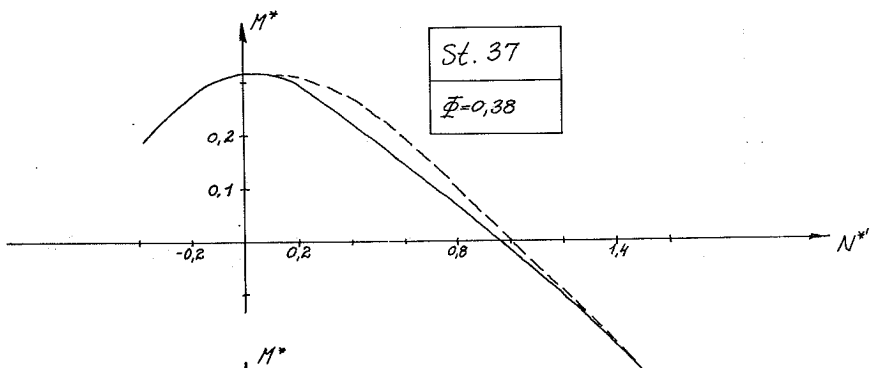
$$\text{st. 37} : \eta_c = 0,75 \frac{\epsilon'_{bmax}}{\epsilon'_{bmax} + \epsilon_{af}} = 0,75 \frac{3,5}{3,5 + 1,2} = 0,56$$

$$\text{tentor 56: } \eta_c = 0,75 \frac{3,5}{3,5 + 2,8} = 0,42.$$

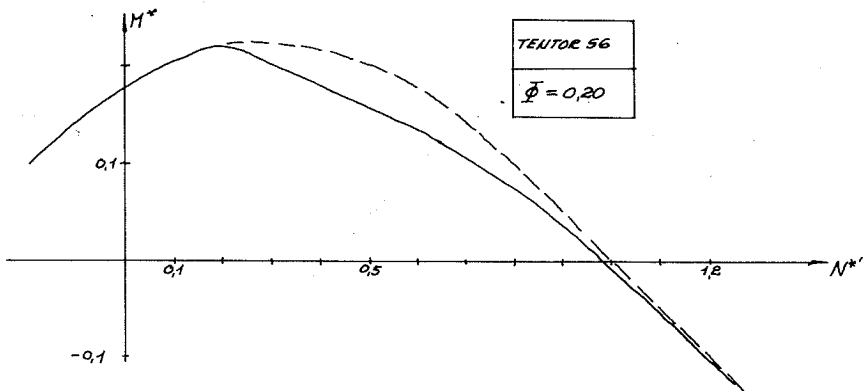
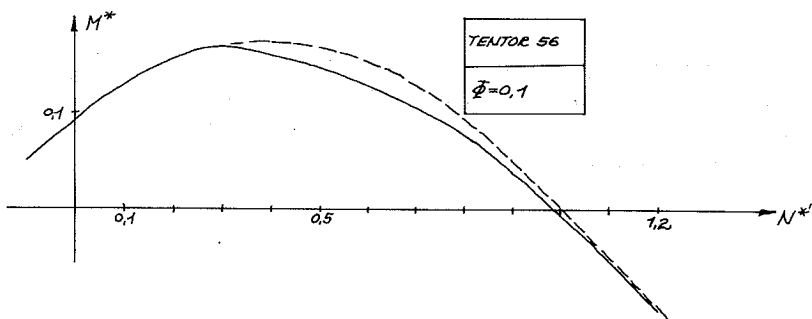
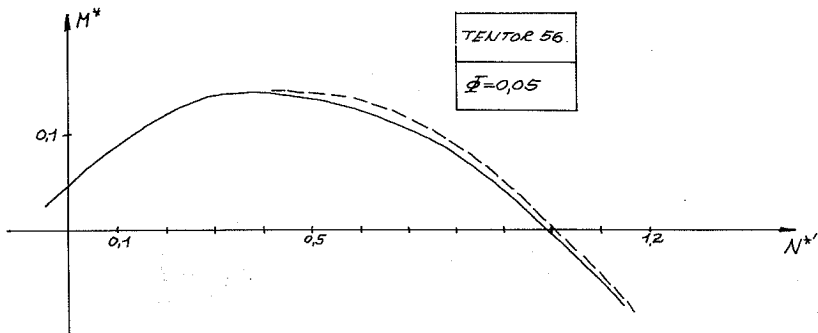
SIGNATUR : — NORM
 --- SIP



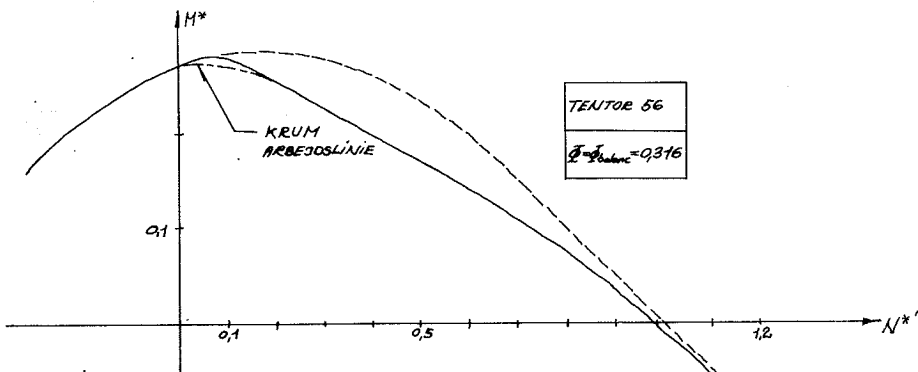
SIGNATUR : — NORM
 --- SIP



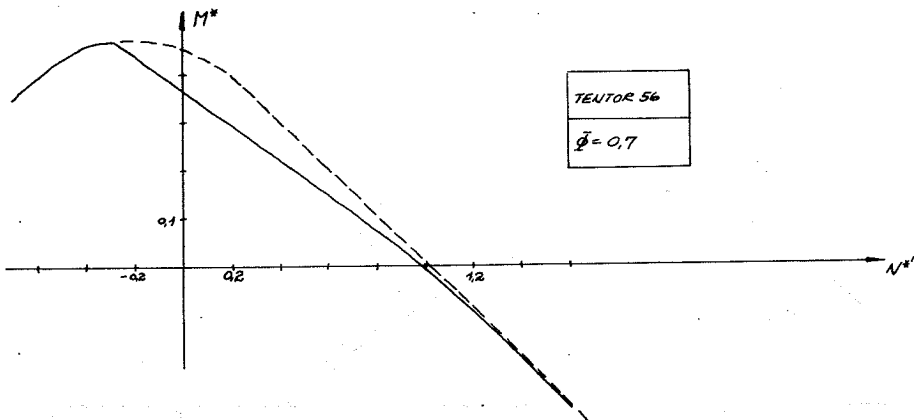
SIGNATUR : — NORM
 - - - SIP



SIGNATUR : — NORM
 --- SIP



NB: Værdien af $\bar{\phi}_{balanc}$ svarer til krum arbejdslinie, d.v.s. $\epsilon_{af} = 4,8 \text{ ‰}$. Med streg - prik linie er her indtegnet den korrekte kurve, hvor denne afviger fra den fuldt optrukne linie.



For større værdier af η end de ovenfor anførte, vil der ikke længere optræde flydning af armeringen i den normmæssige beregning, det vil derimod være tilfældet for SIP. Dvs. MN-diagrammerne er sammenfaldende fra punkt A til punkt C, hvorefter afvigelse indtræder.

For at få et indtryk af hvorledes afvigelse vokser op, er der optegnet to kurveskarer, der viser den procentvise afvigelse på momenterne som funktion af η .

Kurverne kan aflæses af MN-diagrammerne, idet der laves følgende omskrivning :

$$N^{*'} = \frac{N'}{b h_e \sigma'_{bk}} = \frac{y b \sigma'_{bk} - \phi b h_e \sigma'_{bk}}{b h_e \sigma'_{bk}} = \frac{y}{h_e} - \phi = \eta - \phi$$

heraf

$$\eta = N^{*'} + \phi$$

η refererer her til trykzonen i SIP.

For en given værdi af ϕ kan man på det tilsvarende MN-diagram aflæse momenterne M_{SIP} og M_{NORM} for forskellige værdier af η . Udregnes afvigelsen som

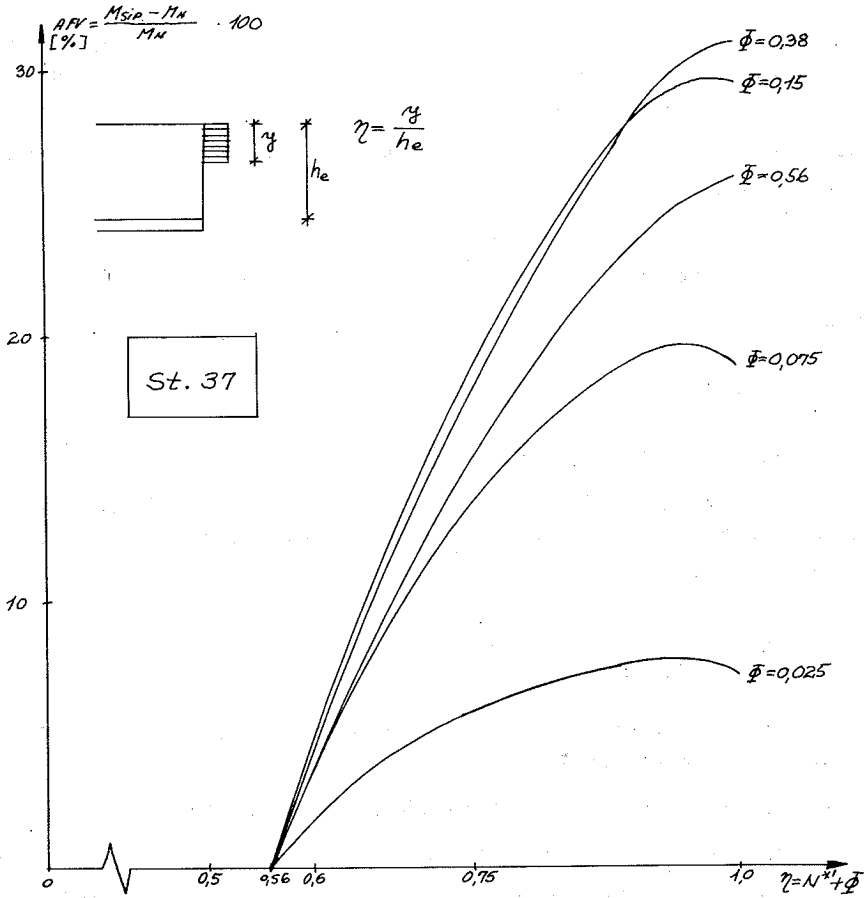
$$AFV = \frac{M_{SIP} - M_{NORM}}{M_{NORM}} \cdot 100 [\%]$$

fås kurver som vist på de følgende sider. Kurverne er dog her beregnet ved hjælp af EDB.

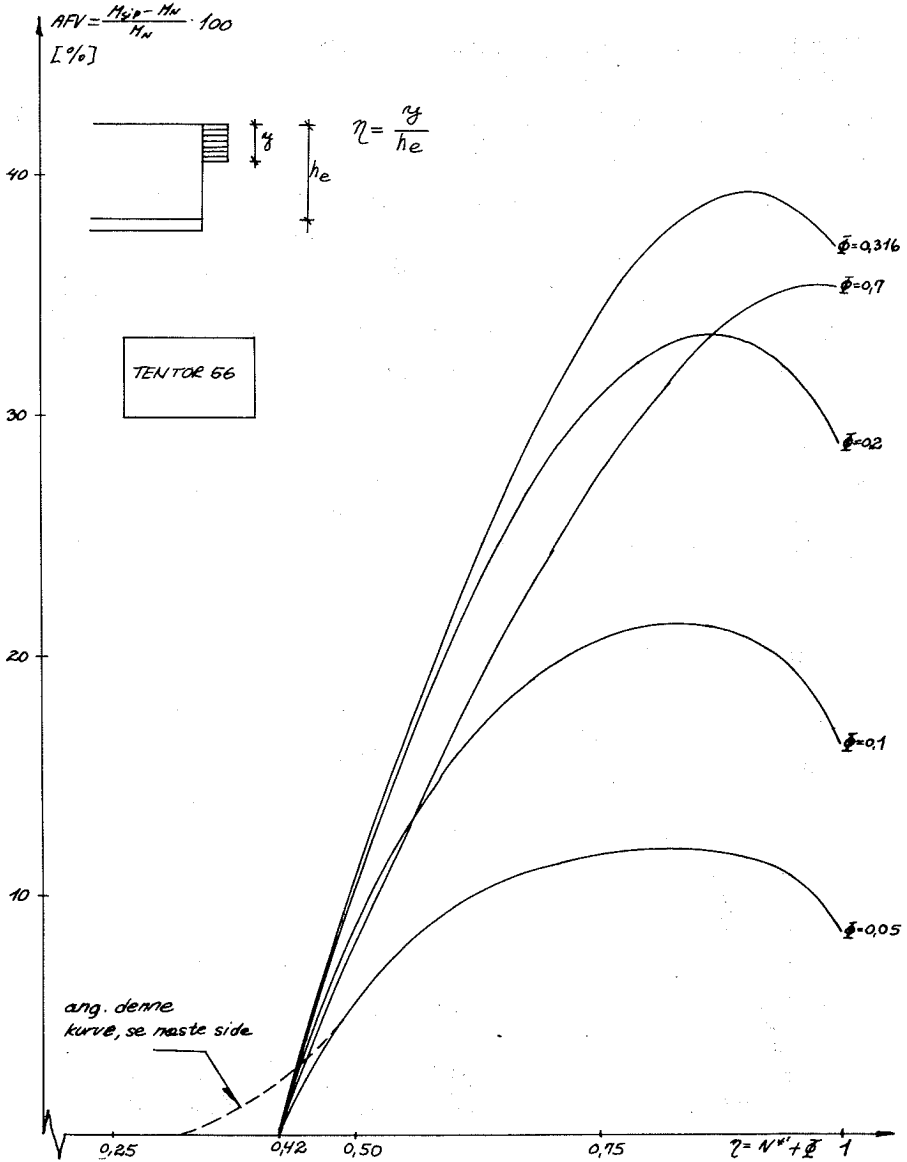
Groft taget giver kurverne følgende billede af afvigelse:

for $\eta < \eta_c$ er afvigelse nul

for $\eta > \eta_c$ vokser afvigelse hurtigt op og når et maksimum, der ligger mellem 0 og 40% afhængig af ϕ .



MOMENTARFVIGELSE i % SOM FUNKTION
AF η , NÅR $N_{norm} = N_{sfp}$



MOHENTAFVIGELSE I % SOM FUNKTION
AF η , NÅR $N_{norm} = N_{sp}$

Vurdering af fejl ved antagelse af retlinet
arbejdslinie for tentor 56

Regnes i stedet med krum arbejdslinie fås $\epsilon_{af} = 2,0 + 2,8 = 4,8\%$
dette indebærer $\eta_c = 0,75 \frac{3,5}{3,5 + 4,8} = 0,32$.

Afvigelserne mellem MN-diagrammerne optræder altså for en lavere værdi af η . Antages det, at arbejdslinien er lineær for $\epsilon_a \leq 2\%$, fås sammenfald af den korrekte og den tilnærmede kurve for $\eta \geq 0,75 \frac{3,5}{3,5 + 2} = 0,48$. Den gjorte tilnærmelse har altså indflydelse på MN-diagrammerne for $0,32 < \eta < 0,48$. Dette er anskueliggjort på side 12 og side 15.

Konklusion

Ved bøjning med normalkraft kan ved skaldimensionering efter skiveopdelingsmetoden tillades skivetykkelser i tryksiden som angivet nedenfor, hvor t = skivetykkelsen.

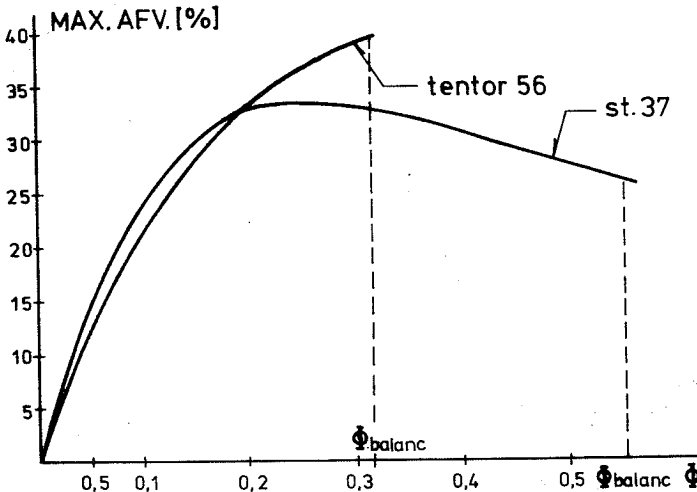


Fig. 3.3.

St. 37: Uden afvigelse kan $t = 0,56h_e$ tillades. Accepteres en momentafvigelse på 5%, findes afhængig af ϕ følgende værdier. For $\phi = 0,025$ fås $t = 0,70h_e$, for $\phi = 0,050$ fås $t = 0,63h_e$, for $\phi = \phi_{\text{balanc}} = 0,56$ fås $t = 0,60h_e$.

Tentor 56: Regnes med krum arbejdslinie fås $t = 0,32h_e$. Der begås dog ikke nogen større fejl (2%) ved at tillade $t = 0,42h_e$, den værdi, der svarer til tilnærmet arbejdslinie. Accepteres en momentafvigelse på 5% findes følgende værdier. For $\phi = 0,025$ fås $t = 0,58h_e$, for $\phi = 0,05$ fås $t = 0,49h_e$, for $\phi = \phi_{\text{balanc}} = 0,316$ fås $t = 0,45h_e$.

Det bemærkes, at den fejl, som begås ved at overskride den trykzonehøjde, der tillades ifølge DS 411 afhænger af ϕ således, at små værdier af ϕ giver mindre fejl end store værdier af ϕ . Optegnes den maksimale procentvise momentafvigelse som funktion af ϕ , fås kurver som vist på fig. 3.3.

4. UNDERSØGTE BREGNINGSMODELLER

I dette afsnit gennemgås et antal beregningsmodeller, som alle bygger på skiveopdelingsprincippet. Af den grund gennemgås først nogle generelle betragtninger vedrørende dette princip.

Der betragtes en skaldel, som er påvirket af skalsnitkræfterne N_x , N_y , N_{xy} , M_x , M_y og M_{xy} . Se fortegn på fig. 4.1.

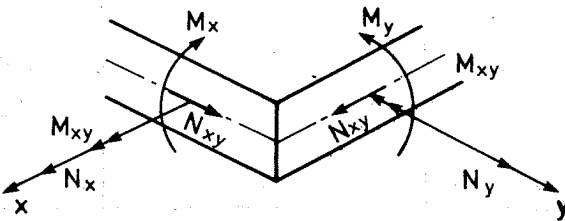


Fig. 4.1.

Problemet består i at bestemme skaltykkelse og armeringsmængder, således at snitkræfterne kan optages og om muligt finde en optimal løsning.

Skiveopdelingsprincippet bygger på plasticitetsteoriens nedreværdisætning samt på skivedimensioneringsformlerne, se afsnit 2. I disse formler opereres med spændinger, men ved enkle omskrivninger kan man i stedet få skivesnitkræfterne N_x , N_y , N_{xy} til at indgå. Armerings- og betonspændingerne kommer derved til at indgå som armeringskræfterne N_{xa} og N_{ya} , der er kræfter pr. længdeenhed vinkelret på armeringsretningerne samt betonkraften N_b , der er største trykkraft i betonen pr. længdeenhed.

Dimensioneringsformlerne kommer derved til at se ud som vist i skema 4.1.

Skive-tilfælde	krav	armeringskraft N_{xa}	armeringskraft N_{ya}	maksimal betontrykkraft N_b
1	$N_x > N_{xy} $ $N_y > N_{xy} $	$N_x + N_{xy} $	$N_y + N_{xy} $	$-2 N_{xy} $
2	$N_x < - N_{xy} $ $N_x \cdot N_y < N_{xy}^2$	0	$N_y - \frac{N_{xy}^2}{N_x}$	$N_x + \frac{N_{xy}^2}{N_x}$
3	$N_y < - N_{xy} $ $N_x \cdot N_y < N_{xy}^2$	$N_x - \frac{N_{xy}^2}{N_y}$	0	$N_y + \frac{N_{xy}^2}{N_y}$
4	$N_x < - N_{xy} $ og $N_x \cdot N_y > N_{xy}^2$ eller $N_y < - N_{xy} $ og $N_x \cdot N_y > N_{xy}^2$	0	0	$\frac{1}{2}(N_x + N_y) -$ $\frac{1}{2} \sqrt{(N_x - N_y)^2 + 4N_{xy}^2}$

SKEMA 4.1

Kræfterne N_x , N_y , N_{xa} , N_{ya} og N_b regnes positive ved træk.

Ved dimensionering benyttes følgende fremgangsmåde: Skallen opdeles i et antal skiver, således at skalsnitkræfterne ved statisk ækvivalens kan omformes til skivesnitkræfter (se afsnit herom). Med de fundne skivesnitkræfter findes den maksimale betonkraft samt armeringskræfter ved hjælp af skema 4.1. Såfremt betontrykket kan optages, kan skalsnitkræfterne optages, når der armeres i henhold til de fundne armeringskræfter. Dette forudsætter dog, at armeringen er placeret midt i skiverne, dette vil sjældent være tilfældet. Armeringskræfterne må derfor flyttes til de virkelige armeringspositioner ved statisk ækvivalens (se afsnit herom). Dette vil ikke altid være muligt uden at ændre betontrykkraften, se herom senere.

Omformning af skalsnitkræfter til skivesnitkræfter

Der betragtes en skal med tykkelsen h , påvirket af skalsnitkræfterne $N_x, N_y, N_{xy}, M_x, M_y, M_{xy}$. Disse ønskes for overskuelighedens skyld optaget af 2 skiver, én i hver side af skallen. De benævnes skive 1 og skive 2. Skivetykkelserne kaldes C_1 og C_2 . På fig. 4.2 er geometrien optegnet, desuden er skivesnitkræfterne indtegnet.

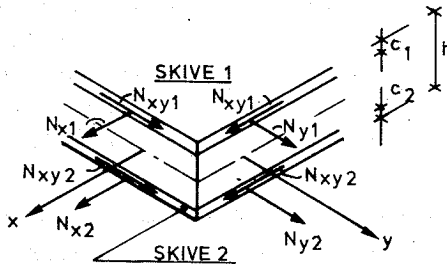


Fig. 4.2.

Idet de på fig. 4.2 viste skivesnitkræfter skal være ækvivalente med skalsnitkræfterne fås:

$$N_{x1} = N_x \frac{\left(\frac{h}{2} - \frac{c_2}{2}\right)}{\left(h - \frac{c_1}{2} - \frac{c_2}{2}\right)} - \frac{M_x}{\left(h - \frac{c_1}{2} - \frac{c_2}{2}\right)}$$

$$N_{x2} = N_x \frac{\left(\frac{h}{2} - \frac{c_1}{2}\right)}{\left(h - \frac{c_1}{2} - \frac{c_2}{2}\right)} + \frac{M_x}{\left(h - \frac{c_1}{2} - \frac{c_2}{2}\right)}$$

tilsvarende for N_{y1} og N_{y2}

$$N_{xy1} = N_{xy} \frac{\left(\frac{h}{2} - \frac{c_2}{2}\right)}{\left(h - \frac{c_1}{2} - \frac{c_2}{2}\right)} - \frac{M_{xy}}{\left(h - \frac{c_1}{2} - \frac{c_2}{2}\right)}$$

$$N_{xy2} = N_{xy} \frac{\left(\frac{h}{2} - \frac{c_1}{2}\right)}{\left(h - \frac{c_1}{2} - \frac{c_2}{2}\right)} + \frac{M_{xy}}{\left(h - \frac{c_1}{2} - \frac{c_2}{2}\right)}$$

Ved beregningsmodeller med flere skiver vil det i de enkelte tilfælde fremgå, hvorledes skalsnitkræfterne fordeles på de enkelte skiver.

Flytning af armeringskræfter

Armeringen anbringes som en krydsarmering under 90° i hver side af skallen. Den antages at virke som en jævnt fordelt armering, hvorved der kan regnes med armeringskræfter pr. længdeenhed vinkelret på de enkelte armeringsretninger. Det antages ligeledes, at al armering kan regnes at ligge i to armeringstygdepunktsplaner.

Vi betragter en beregningsmodel, som vist på fig. 4.2, hvor der i henholdsvis skive 1 og skive 2 er fundet armeringskræfterne N'_{xa1} og N'_{xa2} . Idet armeringstygdepunktsplanerne ligger i afstandene h_{c1} og h_{c2} fra de to skalsider, fås følgende kræfter i de virkelige armeringspositioner (se fig. 4.3):

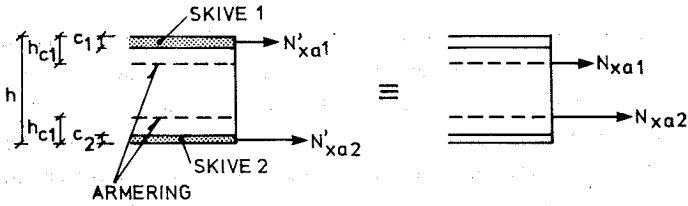


Fig. 4.3.

$$N_{xa1} = [N'_{xa1} (h - \frac{c_1}{2} - h_{c2}) - N'_{xa2} (h_{c2} - \frac{c_2}{2})] / (h - h_{c1} - h_{c2})$$

$$N_{xa2} = [N'_{xa2} (h - \frac{c_2}{2} - h_{c1}) - N'_{xa1} (h_{c1} - \frac{c_1}{2})] / (h - h_{c1} - h_{c2})$$

Det vil ses af formlerne, at selv om f.eks. N'_{xa1} er positiv, kan N_{xa1} godt blive negativ. I så tilfælde kræves ingen armering i denne side af skallen i x-retningen, til gengæld påføres en trykkraft ved skive 1.

For at belyse dette forhold nærmere betragtes et tilfælde, hvor $N'_{xa1} = 0$ og $N'_{xa2} > 0$. Der findes da følgende formler, se også fig. 4.4.

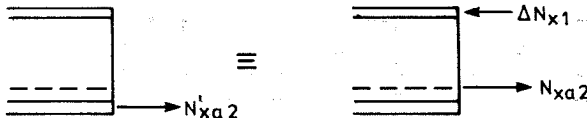


Fig. 4.4.

$$N_{xa2} = N_{xa2}^1 \cdot \left(h - \frac{C_1}{2} - \frac{C_2}{2} \right) / \left(h - \frac{C_1}{2} - h_{c2} \right)$$

$$\Delta N_{x1} = N_{xa2}^1 \cdot \left(h_{c2} - \frac{C_2}{2} \right) / \left(h - \frac{C_1}{2} - h_{c2} \right)$$

I dette tilfælde sker der altså en ændring af skivesnitkræfterne i skive 1. Det må derfor undersøges om den forøgede trykkraft kan optages af betonen. Hvis dette ikke er tilfældet, må C_1 forøges, hvilket indebærer en ny fordeling af skalsnitkræfterne på skive 1 og skive 2. Der må derfor foretages en ny gennemregning. Der er herved angivet en beregningsløkke, som må fortsætte, indtil det er sikret, at den forøgede trykkraft kan optages af skive 1.

Optimering

Til givne snitkræfter svarer mange forskellige løsninger afhængig af, hvilken spændingsfordeling der vælges i betonen. På fig. 4.5 er vist to forskellige løsninger for givne snitkræfter.

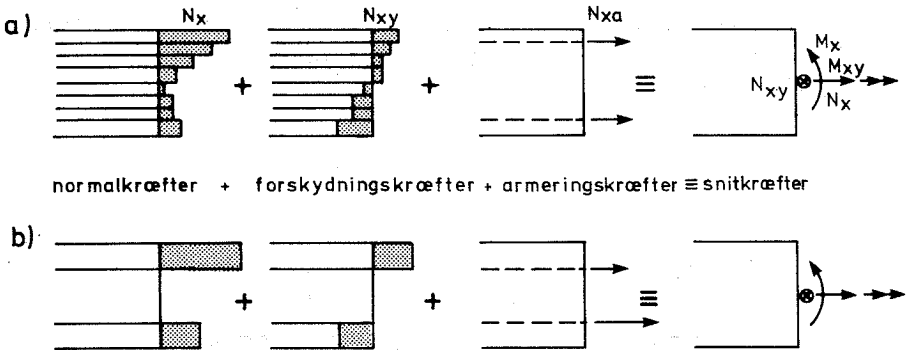


Fig. 4.5.

På fig. 4.5a arbejdes der med 8 skiver, på fig. 4.5b med 3 skiver, hvor den midterste dog ikke optager nogen spænding. Hvilken af de to spændingsfordelinger, der giver den mindste armeringsmængde, kan være vanskeligt at afgøre på forhånd. Det må dog forventes, at mange skivelag giver bedre resultater end få skivelag. Ved en optimering måtte man principielt undersøge alle tilladelige spændingsfordelinger og netop finde den, som benyttede mindste armeringsmængde.

Dette er ikke forsøgt i det eksamensprojekt [5], som ligger til grund for dele af denne rapport. I stedet er ved EDB-beregninger sammenlignet et antal beregningsmodeller, som ved ingeniørmæssige betragtninger er skønnet egnede til at optage snitkræfterne med et minimum af armeringsforbrug.

4 af de undersøgte beregningsmodeller har vist sig særligt velegnede, de indeholder hver for sig egenskaber, som for nogle snitkraftkombinationer gør dem bedre end de 3 andre. I det følgende gennemgås disse 4 modeller.

Beregningsmodeller

2 af de 4 beregningsmodeller, som her præsenteres, arbejder med 2 aktive skiver, medens de 2 andre arbejder med henholdsvis 3 og 4 aktive skiver.

Ved en aktiv skive forstås en skive, som er med til at optage skalsnitkræfterne.

I alle tilfælde regnes med et armeringsarrangement, som beskrevet i afsnit om flytning af armeringskræfter.

Ved flydning i en skive forstås, at det maksimale betontryk N_D netop giver en betonspænding, som svarer til betonens karakteristiske trykstyrke. Der benyttes også udtrykket, at betonen er fuldt udnyttet til tryk.

De 4 beregningsmodeller kan opdeles i 2 grupper, gruppe 1 og gruppe 2.

I gruppe 1, som kun består af modellen SKIVEOPDOPT, arbejdes der med 2 aktive skiver, som begge er fuldt udnyttede til tryk.

Gruppe 2 består da af 3 modeller. Disse benyttes kun, når de bøjende momenter har samme fortegn. Der kan da defineres en træk- og en trykside i skallen, nemlig der hvor momenterne giver henholdsvis træk og tryk. Det der karakteriserer modellerne i gruppe 2 er dette, at skiverne i tryksiden er fuldt udnyttede til tryk, medens skiven i træksiden er placeret symmetrisk omkring armeringen i denne side og har en tykkelse, som er lig med 2 gange afstanden fra armeringstygdepunktsplanen til betonoverfladen i den pågældende side.

Modellerne i gruppe 2 benyttes kun, når der udelukkende kræves armering i træksiden. Det er da klart, at ved beregning med disse modeller kræves der ingen flytning af armeringskræfterne, medens dette er påkrævet ved beregning med gruppe 1 modellen.

Geometrien for de 4 beregningsmodeller, under forudsætning af positive momenter for gruppe 2's vedkommende, er vist i skema 4.2.

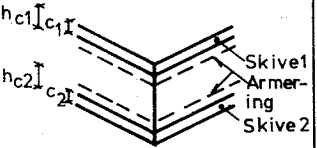
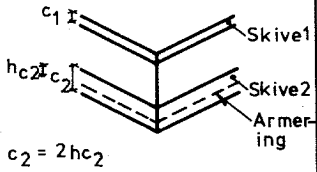
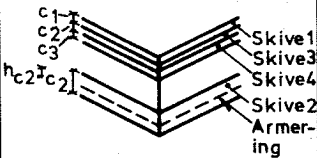
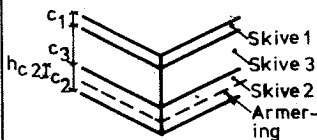
I det følgende gøres nærmere rede for opbygningen af de 4 beregningsmodeller, medens deres særlige virkefelter tages op i et senere afsnit.

SKIVEOPDOPT

Denne beregningsmodel bygger på den betragtning, at jo større afstand, der er mellem de skiver, som skal optage de bøjende og vridende momenter, desto mindre bliver skivesnitkræfterne, og dermed kan et minimum af armeringsforbrug forventes.

Modellen arbejder derfor med 2 aktive skiver, som er fuldt udnyttede til tryk, hvorved deres tykkelser minimaliseres, se fig. i skema 4.2.

Beregningsmodellen er den mest generelle af de 4, der gennemgås her, idet den kan benyttes for alle snitkraftkombinationer. Metoden er ikke velegnet til håndregning, da der skal foretages iterationer dels til fastlæggelse af de to skivetykkelser og dels på grund af ændringer i skivesnitkræfterne ved flytning af armeringskræfterne.

Gruppe nr	Navn på beregningsmodel	Skitse	Bemærkninger
1	SKIVEOPDOPT		<p>Kan benyttes for alle snitkraftkombinationer. Skive 1 og skive 2 er fuldt udnyttet til tryk.</p>
2	SKIVEOPD		<p>Benyttes når de bøjende momenter har samme fortegn, og der kun kræves armering i én side af skallen. Skiverne i tryksiden er fuldt udnyttet til tryk, medens skiven i traksiden ikke er fuldt udnyttet.</p>
	SKIVEOPD 4		
	SKIVEOPDMFF		

SKEMA 4.2

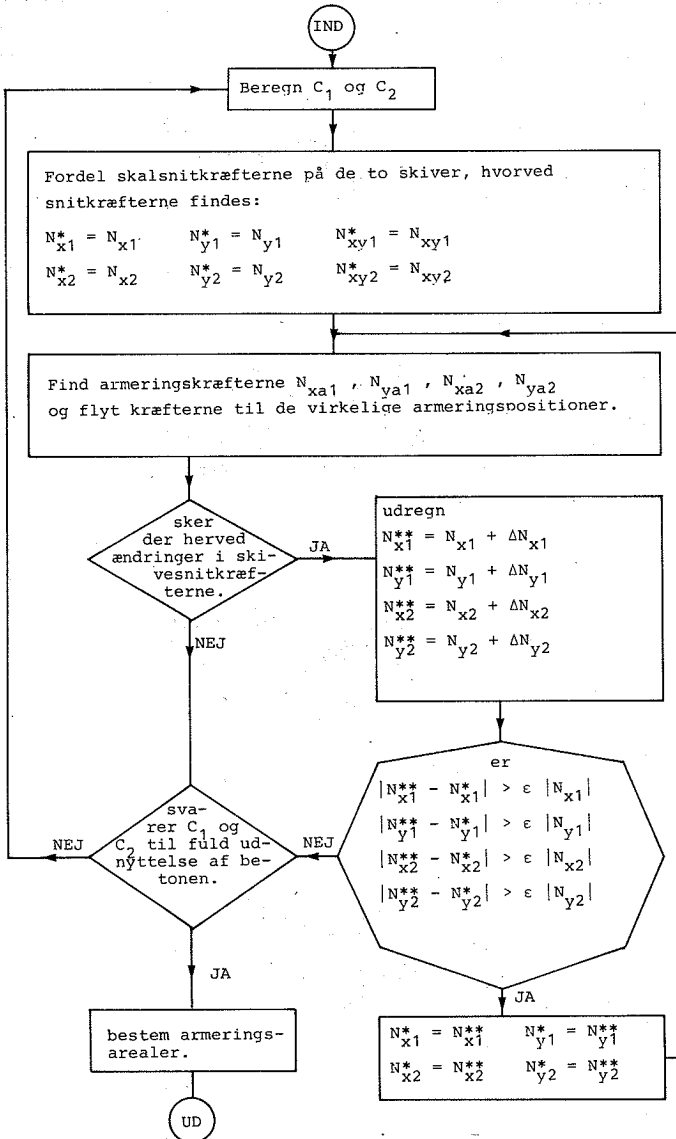


Fig. 4.6.

Til brug for EDB-beregning er der på fig. 4.6 vist et flow-diagram, der viser beregningsgangen i SKIVEOPDOPT:

I flow-diagrammet bemærkes konditionen: "Sker der herved ændringer i skivesnitkræfterne"? Dette vil ikke være tilfældet, hvor der kræves armering i begge sider af skallen, medens det vil være tilfældet, hvor der kun kræves armering i én skalside, som omtalt på side 20.

SKIVEOPD

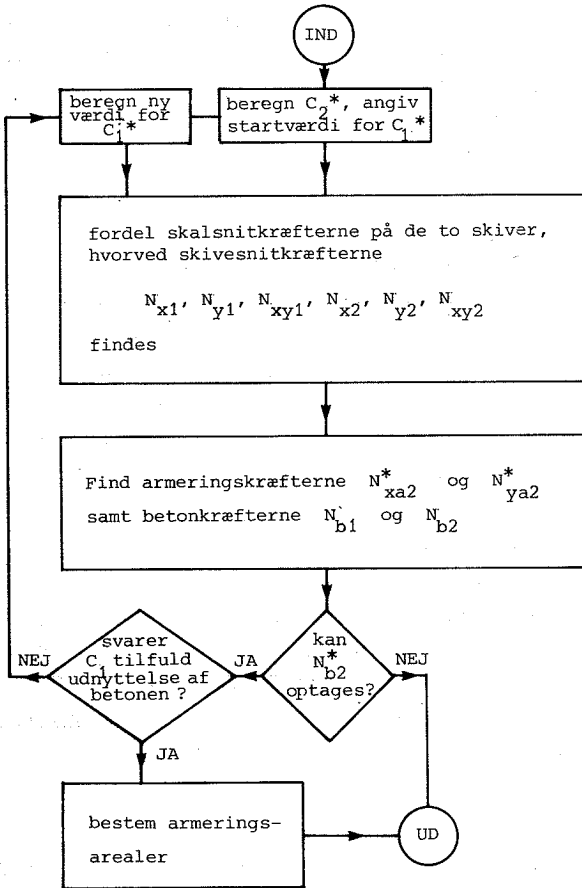
Denne model svarer i princippet til modellen i [3], dog er anvendelsesområdet for SKIVEOPD begrænset i denne fremstilling, svarende til restriktionerne for gruppe 2 modeller. Principielt er der ikke noget i vejen for at bruge SKIVEOPD på snitkraftkombinationer, hvor de bøjende momenter har forskellige fortegn. Men det har vist sig ved en række sammenligninger med SKIVEOPDOPT, at sidstnævnte er en langt bedre model i sådanne tilfælde (se nærmere herom senere).

Som vist i [3] er SKIVEOPD anvendelig til håndregning, idet kun én skivetykkelse skal itereres. Ved SKIVEOPD forudsættes det, at de forskydningskræfter, der skal optages i træksiden, kan optages uden, at det tilladelige betontryk overskrides i den pågældende skive. Er dette ikke tilfældet, kan modellen ikke benyttes. På fig. 4.7 er vist et flow-diagram for SKIVEOPD under forudsætning af positive momenter.

SKIVEOPD 4

Ved udformning af geometrien for SKIVEOPD 4 er nedenstående forhold taget i betragtning. Disse er specielt møntet på skiverne i tryksiden, da trækskivens placering og tykkelse er fastlagt på forhånd.

- Jo nærmere en skive er placeret ved skallens symmetriplan, desto større del af forskydningskraften vil den optage.
- I henhold til skivetilfælde 4 (se skema 4.1) vil en skive, der er udsat for tryk i både x- og y-retningerne kunne optage en vis forskydningskraft uden forbrug af armering.



* ved negative momenter udskiftes 1 med 2 og 2 med 1 .
FLOW-DIAGRAM AF SKIVEOPD.

Fig.4.7

- Ved optagelse af momenter med samme fortegn, men af forskellig størrelse vil det, når der ikke samtidigt skal optages forskydningskræfter, altid være en fordel at opdele trykskiven i to skiver. Den yderste skive skal optage trykket fra det numerisk mindste moment i to retninger, medens den inderste skive kun skal optage trykket fra restmomentet i den retning, hvor momentet er numerisk størst, se fig. 4.8.

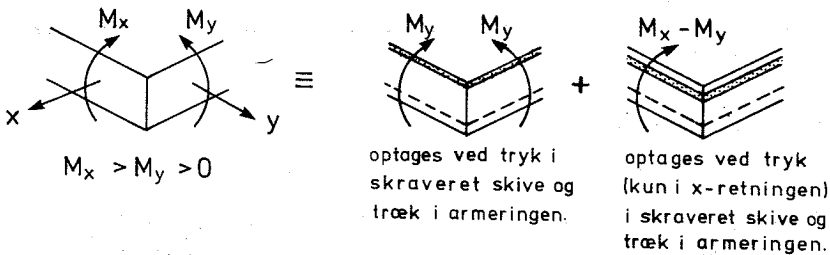


Fig. 4.8.

Opspaltning af trykskiven forårsager en større momentarm ved det numerisk mindste moment og dermed en armeringsreduktion. Hvis der samtidig skal optages forskydningskræfter i den yderste skive, vil opspaltningen stadig give en reduktion ved det numerisk mindste moment men en armeringsforøgelse ved det numerisk største moment på grund af kvadratrodsfunktionen i udtrykket for N_p i skivetilfælde 4. I så tilfælde vil opspaltningen kun være en fordel ved små forskydningskræfter.

Under hensyntagen til ovennævnte forhold er geometrien for SKIVEOPD 4 udformet, som vist i skema 4.2. Skalsnitkræfterne fordeles på følgende måde:

Skivekombination 4+2 optager forskydningskraften N_{xy} plus så stor en del af de bøjende momenter, at trykkrafterne i skive 4 netop når en størrelse, der er lig den numeriske værdi af forskydningskraften i skive 4 med modsat fortegn. Altså $N_{x4} = N_{y4} = - |N_{xy4}|$. Der kræves således ingen armering i skive 4. I visse tilfælde optages de vridende momenter også af denne skivekombination, se herom senere.

Skivekombination 1+2 optager normalkrafter, i visse tilfælde de vridende momenter samt differensen mellem det numerisk mindste bøjende moment og det moment, der optages af skivekombination 4-2. Dette moment påføres i begge retninger.

Skivekombination 3+2 optager det resterende moment, som kun optræder i den retning, hvor det numerisk største moment virker og kun når $M_x \neq M_y$.

Optagelse af det vridende moment

Når de bøjende momenter er positive gælder:

Hvis $M_{xy} \cdot N_{xy} > 0$ (forskydningskræfterne fra M_{xy} og N_{xy} virker i samme retning i trækzonen) så optages M_{xy} af skivekombination 1+2.

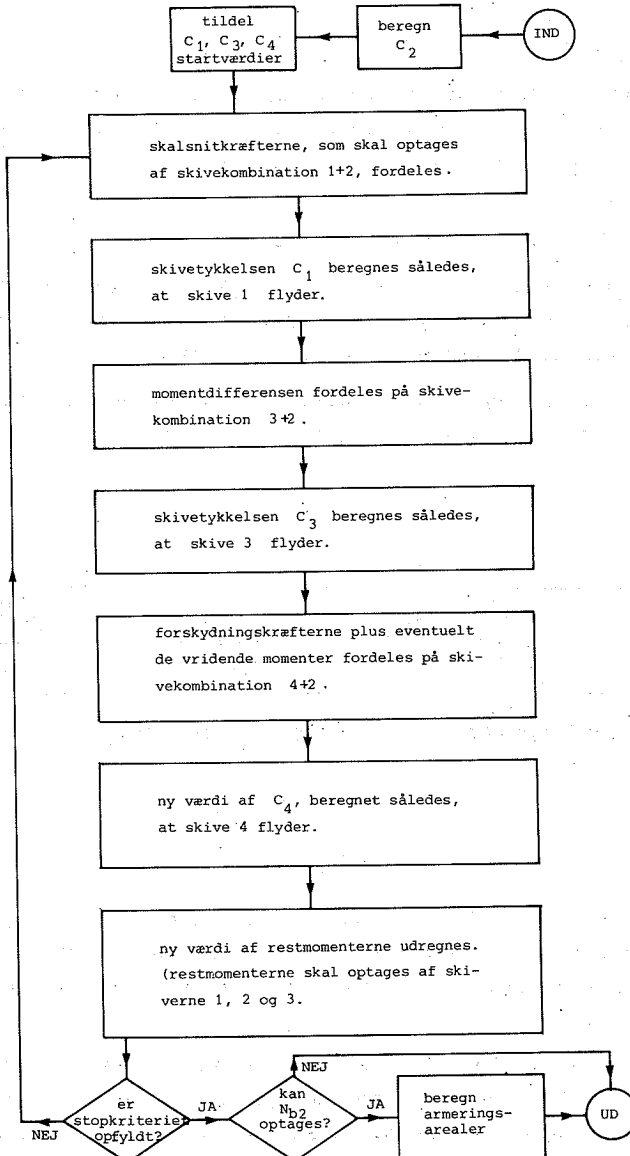
Hvis $M_{xy} \cdot N_{xy} < 0$ (forskydningskræfterne fra M_{xy} og N_{xy} virker i modsat retning i trækzonen) så optages M_{xy} af skivekombination 4+2.

Når de bøjende momenter er negative, skal ulighedstegnene vendes.

Denne fordeling af M_{xy} har vist sig gunstig, når forskydningskræfterne fra M_{xy} er små i forhold til N_{xy} . (Ved store vridende momenter kræves der armering i begge skalsider, da benyttes SKIVEOPDOPT).

Ligesom ved SKIVEOPD forudsætter denne model, at den forskydning, som skal optages i træksiden, kan optages, uden at den tilladelige betontrykkraft i trækskiven overskrides. Er dette ikke tilfældet, kan modellen ikke benyttes.

SKIVEOPD 4 er ikke velegnet til håndregning. Til brug for EDB-beregning er på fig. 4.9 vist et flow-diagram. Diagrammet forudsætter positive momenter. Ved negative momenter udskiftes C_1 med C_2 .



Stopkriteriet kræver lille forskel mellem den nye værdi af C_4 og den oprindelige samt lille forskel mellem det nye restmoment og det oprindelige.

"FLOW-DIAGRAM" AF SKIVEOPD 4

Fig. 4.9.

SKIVEOPDMFF

MFF betyder: Med fordelt forskydning. Denne model er udformet ud fra de samme forudsætninger, som benyttedes ved SKIVEOPD 4, dog foretages her ingen opspaltning af momenternes trykskive. Geometrien er vist i skema 4.2.

Skalsnitkræfterne fordeles på følgende måde:

Forskydningskraften og en fiktiv tryknormalkraft fordeles jævnt over hele skaltykkelsen. Øvrige skalsnitkræfter samt en fiktiv trækraft fordeles som under SKIVEOPD.

Ved en omformning af snitkræfterne kan beregningsmodel SKIVEOPD benyttes næsten uden ændringer, se fig. 4.10.

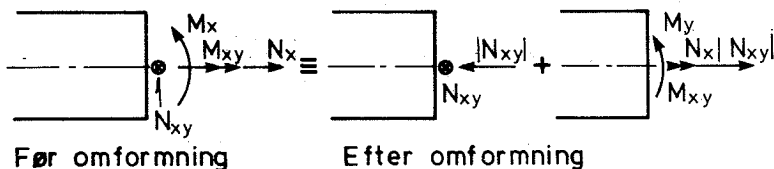


Fig. 4.10.

På fig. 4.10 bemærkes, at der er påført en fiktiv trykkraft, hvorved forskydningskraften kan optages uden armeringsforbrug, til de øvrige skalsnitkræfter er adderet en tilsvarende fiktiv trækraft.

Skallen kan da dimensioneres for de ændrede skalsnitkræfter med SKIVEOPD, idet der tages hensyn til den jævnt fordelte forskydnings- og normalspænding, som optræder over hele skaltværnsnittet.

Modellernes anvendelsesområde

Det har ikke været muligt at opstille simple udtryk, der kunne

forudsige hvilken beregningsmodel, der for bestemte snitkraft-kombinationer ville give det mindste armeringsforbrug.

Ud fra sammenligninger ved EDB-kørsler kan følgende siges:

SKIVEOPDOPT giver for alle snitkraftkombinationer rimeligt gode resultater. Når der kræves armering i begge skalsider, er den sammenlignet med SKIVEOPD i den mere generelle form og har her vist sig op til 38% bedre end SKIVEOPD.

For modellerne i gruppe 2 gælder, at både SKIVEOPD 4 og SKIVEOPDMFF er særligt velegnede, når tryknormalkræfterne er store. SKIVEOPD 4 er dog i de fleste tilfælde bedre end SKIVEOPDMFF.

5. ANBEFALET FREMGANGSMÅDE

Da det ikke har været muligt at opstille eksplicitte udtryk til at afgøre, hvilken model i gruppe 2 der giver det mindste armeringsforbrug for givne snitkræfter, er der ved EDB-beregningen skrevet en procedure, SKIVEOPDKOMB, som foretager gennemregning med alle 3 modeller i gruppe 2 og derefter bestemmer den mest økonomiske armeringsmængde for givne snitkræfter.

Før SKIVEOPDKOMB tages i anvendelse, skal to kriterier opfyldes:

- $M_x \cdot M_y$ skal være positiv.
- SKIVEOPD skal kunne optage skalsnitkræfterne uden brug af armering i tryksiden.

Det sidste kriterium kan udtrykkes på eksplicit form. Idet symmetriplanen i trækskiven er kendt (nemlig armeringstygdepunktsplanen) kan skivesnitkræfterne i trykskiven bestemmes.

Under forudsætning af positive momenter fås:

$$N_{x1} = \frac{-M_x + N_x \left(\frac{h}{2} - h_{c2}\right)}{h - \frac{c_1}{2} - h_{c2}}, \quad N_{y1} = \frac{-M_y + N_y \left(\frac{h}{2} - h_{c2}\right)}{h - \frac{c_1}{2} - h_{c2}}$$

$$N_{xy1} = \frac{-M_{xy} + N_{xy} \left(\frac{h}{2} - h_{c2} \right)}{h - \frac{c_1}{2} - h_{c2}}$$

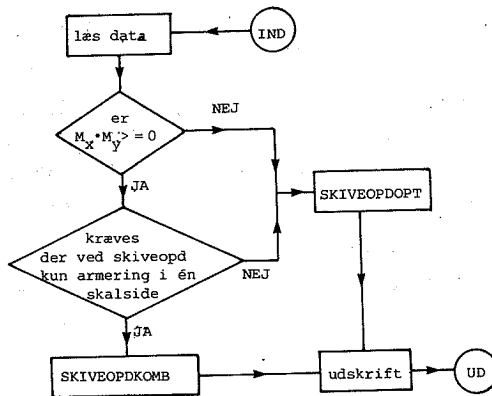
Det kræves nu, at N_{x1} , N_{y1} og N_{xy1} skal opfylde betingelserne for skivetilfælde 4, se skema 4.1 side 18. Indsættes ovenstående kræfter i ulighederne, svarende til skivetilfælde C_4 fås udtryk, som kun består af kendte størrelser, idet $h - \frac{c_1}{2} - h_{c2}$ kan bortforkortes, hvorved den ubekendte C_1 forsvinder.

Det endelige program kan da udformes, som vist i flow-diagram på fig. 4.11.

Et sådant program er skrevet i forbindelse med [5]. Det sammenlignes i afsnit 7 med et program, som bygger på matematisk optimering.

I programmet er indlagt en maksimal tilladelig højde af trykzonen svarende til de begrænsninger, som blev udledt i afsnit 3. Der er her gjort den antagelse, at resultaterne for bøjning med normalkraft med rimelighed kan overføres til det generelle tilfælde.

Hvis der var brug for yderligere at udvide trykzonen, kunne det klares ved at indlægge skiver, hvor det tilladelige betontryk var reduceret.



Flow-Diagram for endeligt program (kaldet E i afsnit 6)

Fig. 4.11

6. EKSEMPLER

Det i afsnit 5 udviklede program kaldet E er her sammenlignet med beregningsmetoden foreslået i [3]. Denne metode svarer nøje til SKIVEOPD men er mere generel, idet den benyttes på alle snitkraftkombinationer kun begrænset af den restriktion, at det skivelag, som ligger symmetrisk omkring armering, skal kunne optage de forskydningskræfter, som optræder der.

Der regnes på en skal med følgende data: $h = 250 \text{ mm}$, $h_{c1} = h_{c2} = 60 \text{ mm}$, se fig. 6.1.

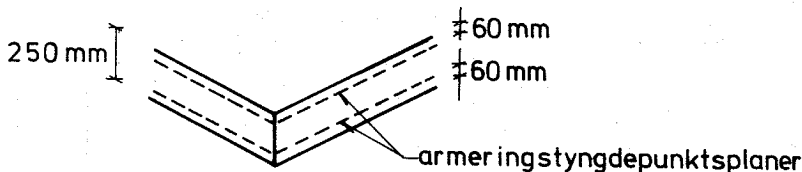


Fig. 6.1.

Ved EDB-beregninger er sammenlignet en række snitkraftkombinationer. E gav i alle tilfælde mindre eller samme armeringsmængde som SKIVEOPD. I tabel 6.1 er nogle af de tilfælde, hvor armeringsreduktionen var større end 2,5%, indført. Med "kryds" er angivet, hvilken beregningsmodel i E der har været i brug.

Af tabel 6.1 vil det ses, at E giver væsentlige reduktioner, når

- normalkræfterne er negative
- det vridende moment er stort.

Den største reduktion er på 51%, medens gennemsnittet af de anførte resultater er på ca. 13%.

Registrering af tilfælde hvor E er mere end 2.5% bedre end SKIVEOPD

N _x N/mm	N _y N/mm	N _{xy} N/mm	M _x N	M _y N	M _{xy} N	Skive- opdopt	Skive- opdmiff	Skive- opd 4	Reduktion i %
200	200	200	20.000	20.000	-60.000	x			17.46
200	200	200	20.000	20.000	40.000	x			15.41
-600	-200	200	20.000	20.000	1.000			x	6.71
-200	-200	-300	20.000	20.000	1.000			x	6.07
-200	-200	300	20.000	20.000	1.000			x	2.62
-200	-200	200	-120.000	20.000	1.000	x			6.70
-200	-200	200	-80.000	20.000	1.000	x			11.21
-200	-200	200	-40.000	20.000	1.000	x			21.24
-200	-200	200	0	20.000	1.000		x		2.64
-200	-200	200	40.000	20.000	1.000			x	4.09
-200	-200	200	80.000	20.000	1.000			x	5.22
-200	-200	200	120.000	20.000	1.000			x	7.07
-200	-200	200	20.000	20.000	-60.000	x			27.90
-200	-200	200	20.000	20.000	-40.000	x			28.36
-200	-200	200	20.000	20.000	0			x	4.11
-200	-200	200	20.000	20.000	60.000	x			17.49
200	-200	200	-120.000	20.000	1.000	x			5.61
200	-200	200	-80.000	20.000	1.000	x			7.48
200	-200	200	-40.000	20.000	1.000	x			8.31
-900	-400	400	40.000	40.000	2.000			x	20.87
-300	-400	400	40.000	40.000	2.000			x	7.05
0	-400	400	40.000	40.000	2.000			x	3.39
-400	-400	-600	40.000	40.000	2.000			x	10.42
-400	-400	400	-120.000	40.000	2.000	x			8.42
-400	-400	400	-80.000	40.000	2.000	x			14.35
-400	-400	400	-40.000	40.000	2.000	x			23.62
-400	-400	400	0	40.000	2.000		x		5.32
-400	-400	400	40.000	40.000	2.000			x	8.94
-400	-400	400	80.000	40.000	2.000			x	10.75
-400	-400	400	40.000	40.000	-20.000			x	50.48
-400	-400	400	40.000	40.000	0			x	9.66
-400	400	400	40.000	-120.000	2.000	x			6.16
-300	-800	200	40.000	40.000	2.000			x	8.48
-800	-800	-600	40.000	40.000	2.000			x	51.42
-800	-800	600	40.000	40.000	2.000			x	34.75
800	-800	200	-40.000	40.000	2.000	x			5.25
0	0	0	60.000	120.000	0			x	4.39

TABEL 6.1

7. MATEMATISKE PROGRAMMERINGSMETODER

Medens de foregående metoder har været baseret på optimering af armeringsmængden ud fra successiv bestemmelse ved iteration, skal sluttelig angives metoder, der under anvendelse af en matematisk optimeringsmetode bestemmer den optimale armeringsmængde. Analogt til det foregående benyttes som grundlag plasticitetsteoriens nedreværdiprincip, ligesom der benyttes opdeling i skiver.

Der udledes 2 metoder. Den ene metode anvender direkte flydebetingelsen for jernbetonskiver ved de armerede skivelag. Den anden metode anvender derimod flydebetingelsen på en indirekte måde, idet spændingerne regnes spaltet op i 2 bidrag, nemlig ét der skal optages af betonen, og ét der skal optages af armeringen. Da metoderne er baseret på samme forudsætninger, giver de samme resultat i ens snitkrafttilfælde.

Antages skiveinddelingen givet på forhånd, bliver ligevægtsligningerne lineære, ligesom optimeringsudtrykket, der angiver armeringsbehovet, bliver det. Desuden kan skiveflydebetingelserne, der danner en konveks flade, relativt let lineariseres. Det er derfor nærliggende at benytte lineær programmering, LP, som optimeringsmetode, da såvel restriktioner som optimeringsudtryk er lineære. Fordelen ved denne metode fremfor ikke-lineær behandling er, at metoden er relativt billig i brug, og altid giver det korrekte minimum, om et sådant eksisterer, se f.eks. [4].

Uanset hvilken matematisk optimeringsmetode der vælges, vil den benyttede fremgangsmåde dog være betydelig dyrere end anvendelse af iterative metoder. En af fordelene vil imidlertid være, at bestemmelse af maksimal snitkraftvariabel for given armering kan foregå helt anlog til bestemmelse af min. armering. Hertil kommer, at det er muligt på simpel vis at foretage en samlet optimering for flere snitkrafttilfælde.

I det følgende skitseres kort, hvorledes armeringsbehovet optimeres under forudsætning af armering efter akseretningerne. Skiveinddelingen foregår som vist på fig. 7.1, idet de på fig. 4.1 viste snitkræfter skal optages.

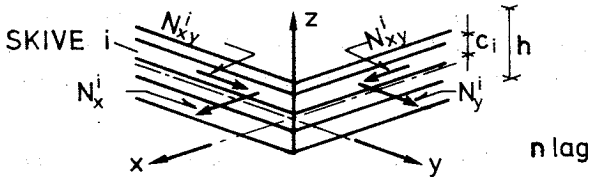


Fig. 7.1.

Ifølge nedreværdisætningen skal de statiske ligevægtsligninger (lighedsrestriktioner) være tilfredsstillet, ligesom det skal sikres, at flydebetingelserne er opfyldt (ulighedsrestriktioner). Den mindste armeringsmængde, der tilfredsstiller disse betingelser, kan dernæst bestemmes.

Ligevægtsligningerne udtrykker, at der skal være statisk ækivalens mellem skivespændinger og skalsnitkræfter:

$$N_x^i = \sum_{i=1}^{n\text{-lag}} N_x^i = \sum_{i=1}^{n\text{-lag}} c^i \sigma_x^i \quad (7.1)$$

$$M_x = \sum_{i=1}^{n\text{-lag}} N_x^i z^i = \sum_{i=1}^{n\text{-lag}} c^i z^i \sigma_x^i \quad (7.2)$$

$$N_{xy} = \sum_{i=1}^{n\text{-lag}} N_{xy}^i = \sum_{i=1}^{n\text{-lag}} c^i \tau_{xy}^i \quad (7.3)$$

$$M_{xy} = \sum_{i=1}^{n\text{-lag}} N_{xy}^i z^i = \sum_{i=1}^{n\text{-lag}} c^i \tau_{xy}^i z^i \quad (7.4)$$

$$N_y = \sum_{i=1}^{n\text{-lag}} N_y^i = \sum_{i=1}^{n\text{-lag}} c^i \sigma_y^i \quad (7.5)$$

$$M_y = \sum_{i=1}^{n\text{-lag}} N_y^i z^i = \sum_{i=1}^{n\text{-lag}} c^i \sigma_y^i z^i \quad (7.6)$$

Som ubekendte parametre benyttes spændingerne σ_x^i , τ_{xy}^i , σ_y^i . c^i er skivetykkelserne og z^i er z-koordinaten til skivemidten.

Flydebetingelserne skal i de enkelte skivelag være tilfredsstillet. Der vil hertil blive vist 2 metoder. Den metode, der benævnes den "direkte metode", benytter linearisering af flydebetingelsen for jernbetonskiver ved de armerede skivelag, og linearisering af betons brudbetingelse for de uarmerede skivelag. Ved den "indirekte metode" benyttes kun linearisering af sidstnævnte, medens armeringsbetingelserne indføres særskilt.

Med hensyn til linearisering kan enten anvendes indvendig linearisering (på den sikre side), udvendig linearisering (på den usikre side) eller en kombination af disse, se fig. 7.2.

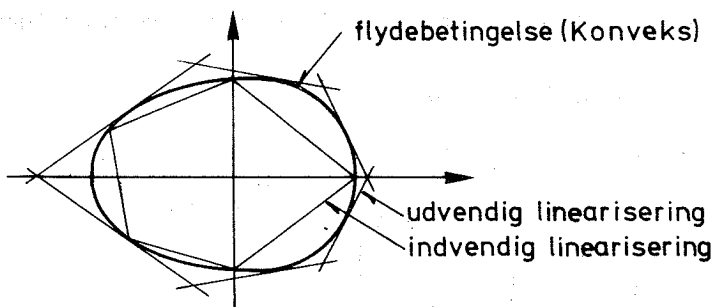


Fig. 7.2.

Under alle omstændigheder introduceres en afrundingsfejl. I det følgende vil af overskuelighedsgrunde blive vist en ret grov linearisering.

De ubekendte parametre ved flydebetingelserne er σ_x^i , τ_{xy}^i og σ_y^i , hvortil kommer armeringsparametrene. Da armeringen normalt koncentrerer sig i over- og underside, benyttes maksimalt kun 4 parametre (2 i hver retning). Ved den "indirekte metode" erstattes σ_x^i , τ_{xy}^i og σ_y^i af nogle nye variable, som det vil fremgå af det følgende.

Optimeringen foregår ved, at de armeringsparametre, der giver mindst armeringsbehov, bestemmes, idet de angivne ligevægtsligninger og flydebetingelsen samtidig er tilfredsstillet.

Direkte metode (MATOPT 1)

For hvert skivelag indføres spændingstørrelserne σ_x , τ_{xy} , σ_y samt evt. armeringsstørrelser som ubekendte. De lineære ligevægtsligninger (7.1) - (7.6) samt flydebetingelserne skal være opfyldte.

Flydebetingelser: De lineariserede skiveflydebetingelser for vilkårlig armeringsgrad fås ved at linearisere jernbetonskivernes flydebetingelse fra [10, s. 28] efter transformering til orthotrop armering. En relativ enkel og anvendelig linearisering fås ved at udtrykke flydebetingelsen ved følgende udtryk:

$$\left. \begin{aligned} \phi_x^i \sigma_c - \sigma_x^i - \tau_{xy}^i &\geq 0 \end{aligned} \right\} \quad (7.7)$$

$$\left. \begin{aligned} \phi_x^i \sigma_c - \sigma_x^i + \tau_{xy}^i &\geq 0 \end{aligned} \right\} \quad (7.8)$$

$$\left. \begin{aligned} \phi_y^i \sigma_c - \sigma_y^i - \tau_{xy}^i &\geq 0 \end{aligned} \right\} \quad (7.9)$$

$$\left. \begin{aligned} \phi_y^i \sigma_c - \sigma_y^i + \tau_{xy}^i &\geq 0 \end{aligned} \right\} \quad (7.10)$$

afhængige af
armering

$$\left. \begin{aligned} \sigma_c + \sigma_x^i - \tau_{xy}^i &\geq 0 \end{aligned} \right\} \quad (7.11)$$

$$\left. \begin{aligned} \sigma_c + \sigma_x^i + \tau_{xy}^i &\geq 0 \end{aligned} \right\} \quad (7.12)$$

$$\left. \begin{aligned} \sigma_c + \sigma_y^i - \tau_{xy}^i &\geq 0 & (7.13) \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{uafhængige af} \\ \text{armering} \end{array}$$

$$\left. \begin{aligned} \sigma_c + \sigma_y^i + \tau_{xy}^i &\geq 0 & (7.14) \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} \sigma_c/2 + \tau_{xy}^i &\geq 0 & (7.15) \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} \sigma_c/2 - \tau_{xy}^i &\geq 0 & (7.16) \end{aligned} \right\}$$

idet der kun benyttes trækarmring. σ_c angiver betontrykstyrken, medens ϕ angiver armeringsgraden for den aktuelle retning, idet ϕ^i er armeringskraft/betontrykkraft for skive i . ϕ udtrykker derfor armeringsbehovet og indgår som armeringsparameter. På fig. 7.3 er såvel den korrekte, som den lineariserede flydebetingelse (7.7 - 7.16) angivet i et $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ -koordinatsystem (kun øverste symmetrihalvdel, $\tau_{xy} \geq 0$, vist). Den lineariserede flydebetingelse ligger som en afskåret pyramide inden for eller sammenfaldende med den virkelige.

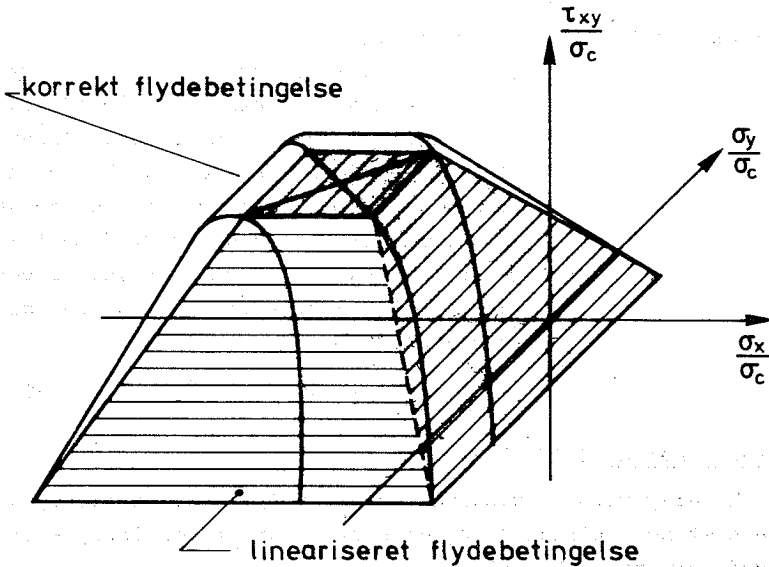


Fig. 7.3.

Optimering af armeringsmængden kan nu foretages ved lineær programmering, idet vi har:

Ubekendte spændingsparametre: $\sigma_x^i, \tau_{xy}^i, \sigma_y^i$

(antal = 3 x n-lag)

Ubekendte armeringsparametre: $\phi_x^\emptyset, \phi_y^\emptyset, \phi_x^N, \phi_y^N$

hvor \emptyset refererer til øvre armeringslag og N til nedre.

(antal = 4).

Optimeringsudtryk (objektft.): $\sum_{j=1}^2 (\phi_x^j + \phi_y^j) c^j \sigma_c$

der udtrykker den totale armeringsmængde.

Lineære lighedsrestriktioner i udtryk (7.1)-(7.6)

(antal restriktioner = 6).

Lineære ulighedsrestriktioner:

Idet oversidearmeringen for x- og y-retningen regnes koncentreret i én skive, og tilsvarende ved undersidearmeringen, fås 2 armerede skiver for hvilke betingelse (7.7)-(7.16) er gældende. Ved de uarmerede skiver er $\phi = 0$, hvorved betingelse (7.15)-(7.16) er unødvendig, da betingelse (7.7)-(7.14) også inkluderer disse tilfælde.

(antal restriktioner = 10 x 2 + 8(n-lag - 2)).

Indirekte metode (MATOPT 2)

I et skivelag regnes spændingerne σ_x og σ_y nu at skulle optages af dels et betonbidrag σ_b og dels af et armeringsbidrag a (lig med nul ved uarmerede skiver)

$$\sigma_x = \sigma_{xb} + a_x$$

$$\tau_{xy} = \tau_{xyb} \quad (7.17)$$

$$\sigma_y = \sigma_{yb} + a_y$$

Analogt til før kunne nu kræves, at σ_{xb} , τ_{xyb} , σ_{yb} skulle tilfredsstille de lineære, afgrænsende restriktioner (flader). Betonens brudbetingelse kan imidlertid karakteriseres ved hjørnepunkterne eller skæringspunkterne for de lineære flader, dvs. ved punkterne $S_0, S_1 \dots S_5$ på fig. 7.4, når den tidligere benyttede linearisering anvendes. Da brudbetingelsen er konveks, gælder at tilladte spændingstilstande kan gives ved en linearkombination som

$$\bar{\sigma}_b = (\sigma_{xb}, \tau_{xyb}, \sigma_{yb}) = \bar{s} \bar{d} \quad (7.18)$$

hvor $\bar{s} = [\bar{s}_1 \bar{s}_2 \dots \bar{s}_5]$, $\bar{s}_1 =$ stedvektor til S_1 osv.

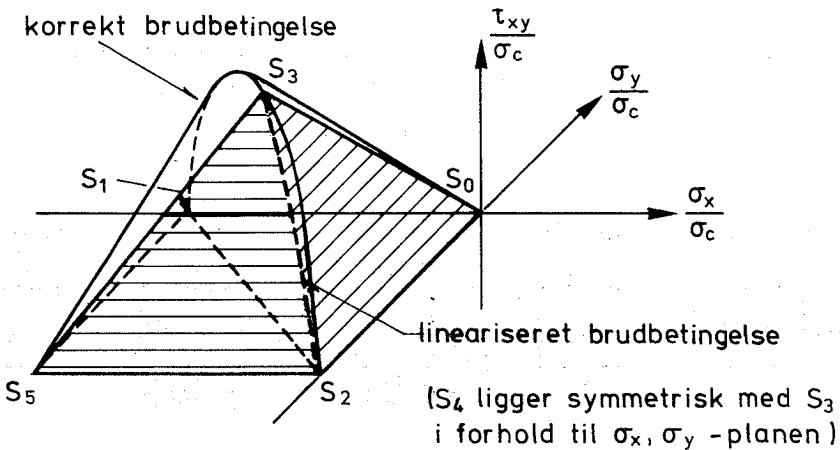


Fig. 7.4.

Samtidigt må kræves, se f.eks. [13], at

$$d_i \geq 0 \quad \text{og} \quad \sum_{i=1}^n d_i \leq 1. \quad (7.19)$$

Dvs. at vi ud fra et antal givne punkter på flydefladen kan bestemme alle tilladelige spændingstilstande. Dette svarer til, at vi vælger en linearkombination af de på fig. 7.5 angivne tilladelige tilstande, således at

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \tau_{xy} \\ \sigma_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -1 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ d_4 \\ d_5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_x \\ a_y \end{bmatrix} \quad (7.20)$$

Ved finere linearisering må tilsvarende medtages flere tilladelige punkter (tilstande).

Optimering foregår principielt som før, blot haves nu:

Ubekendte spændingsparametre: d_{1-5}^i, a_x^j, a_y^j
 (antal = $5 \times n\text{-lag} + 2 \times 2$)

Lineære lighedsrestriktioner: udtryk (7.1)-(7.6) med
 (7.20) indsat og $a = \phi \cdot \sigma_c$
 (antal restriktioner = 6).

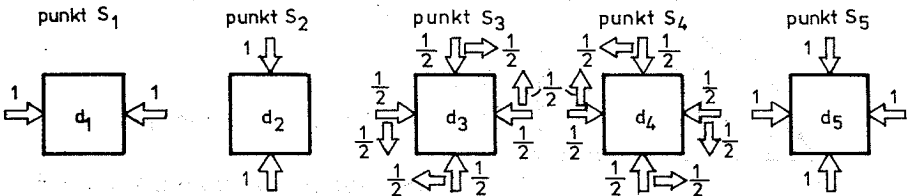


Fig. 7.5.

Lineær ulighedsrestriktion: $\sum_{i=1}^5 d_i \leq 1,$
 (antal = 1).

Variable og restriktioner

Antallet af variable og restriktioner for henholdsvis "direkte" og "indirekte" metode fremgår for et par udvalgte tilfælde af skema 7.1. Forholdet mellem antal variable og antal restriktioner vil være af samme størrelsesorden ved forbedret linearisering. Ved benyttelse af den forbedrede linearisering fås en reduktion af den relative afrundingsfejl fra ca. 30% til 8%. Sidstnævnte linearisering vil blive benyttet ved det efterfølgende eksempel.

Metode		VARIABLE			Restriktioner
		Spænd.	Armering	Ialt	
"Direkte"	1 armeret skivelag †	3	2	5	10
	1 armeret skivelag (bedre lin)	3	2	5	26
	Skal (5 uarm, 2 arm. † skivelag)	21	4	25	60
	Skal (5 uarm, 2 arm. skivelag)(bedre lin.)	21	4	25	162
"Indirekte"	1 armeret skivelag †	5	2	7	1
	1 armeret skivelag (bedre lin)	9	2	11	1
	Skal (5 uarm, 2 arm. † skivelag)	35	4	39	7
	Skal (5 uarm, 2 arm. skivelag)	67	4	71	7

†) Linearisering som vist på figur 7.3 og 7.4

Skema 7.1: Variable og restriktioner

Metodevalg

Ved valget mellem "direkte" og "indirekte" metode er det væsentligt at se på edb-beregningstiden. Denne regnes ofte ved LP at være bestemt ved $k \cdot v \cdot r^2$, hvor k er en konstant, v er antal variable og r antal restriktioner. Af dette skulle følge, at den "indirekte" metode er langt den fordelagtigste. Imidlertid har man ved LP ulighedsproblemer mulighed for at regne problemet, så variable og restriktioner bliver ombyttet. Dette betyder, at forholdet mellem beregningstiderne ikke bliver slet så grelt. Hertil kommer, at det ved samtidig optimering af flere snitkrafttilfælde er nødvendigt at indføre ekstra armeringsvariable og restriktioner ved den indirekte metode, hvilket kan undgås ved den anden metode.

Ved kun ét belastningstilfælde vil det derfor være mest fordelagtigt at anvende den "indirekte" metode (MATOPT 2), medens det ved flere belastningstilfælde ofte er mest fordelagtigt at anvende den "direkte" metode (MATOPT 1).

Som ved de foregående metoder kan tages hensyn til deformationsforholdene ved nedsætning af den benyttede betontrykstyrke i nogle af skiverne.

Sammenligning mellem det iterative optimeringsprogram og det, der er baseret på lineær programmering

Der regnes på samme skal som i afsnit 6.

For MATOPT må der opgives en skivelagsinddeling bestående af: antal skivelag, skivelagenes tykkelser samt hvilke skivelag, der kan forsynes med armering. Tyngdepunktsplanen for armeringen skal være sammenfaldende med skivelagets symmetriplan, se skema 7.2.

I skema 7.3 er nogle af resultaterne fra sammenligningen anført. Det iterative program er benævnt E. Skivelagtykkelserne, som er fremkommet ved beregning med E, er indført, desuden er udregnet en procentiel afvigelse mellem det samlede armeringsareal for E og S7.

Betegnelse	Antal skivelag	Skivelagstykkelser Lag 1, Lag 2, osv. mm	Armeringslag nr
S 7	7	25, 25, 20, 110, 20, 25, 25	3, 5
S 13	13	10, 10, 10, 10, 10, 20, 110, 20, 10, 10, 10, 10, 10.	6, 8

SKEMA 7.2: Skivelagsopdelinger i MATOPT.

Der er regnet med en betonstyrke på $\sigma'_{bk} = 10$ MPa samt en stålstyrke på $\sigma_{ak} = 240$ MPa. De karakteristiske værdier anvendes direkte uden reduktion med partialkoefficienter.

Konklusion på sammenligningen

Sammenligningen viser god overensstemmelse. Det bemærkes, at afvigelserne er særlig små, når de bøjende momenter har samme fortegn. I disse tilfælde giver MATOPT generelt de bedste resultater, største afvigelse er 1%. Når de bøjende momenter har forskellige fortegn, er afvigelserne større, og E giver her de bedste resultater, største afvigelse er -5,4%.

Grunden til, at E kan give bedre resultater end MATOPT, må tilskrives en for grov skivelagsopdeling samt den i afsnit 7 omtalte linearisering af skiveflydebetingelserne.

Sammenlignes lagerplads og regnetid, viser det sig, at MATOPT er betydelig dyrere at benytte end E. For et snitkrafttilfælde med opdeling i 13 skivelag benyttede MATOPT 1 ca. 175K samt en CPU-tid på ca. 40 sec., MATOPT 2 ca. 100K og ca. 5 sec., medens E kan gennemregne 60 snitkrafttilfælde på ca. 3 sec. med et minimum af pladskrav. MATOPT programmerne kan imidlertid, når der haves flere lasttilfælde, bestemme en mere fordelagtig armeringsmængde. Dette sker enten ved at optimere armeringsmængden for alle lasttilfælde samtidigt (dyreste og bedste løsning), eller ved at optimere for hvert enkelt lasttilfælde sam-

N_x N/mm	N_y N/mm	N_{xy} N/mm	M_x N	M_y N	M_{xy} N	Me- tode	A_{x1} mm	A_{y1} mm	A_{x2} mm	A_{y2} mm	Areal- sum mm	C_1 mm	C_2 mm	C_3 mm	C_4 mm	Afvi- gelse %	Bemærkninger
100	-100	200	90.000	30.000	30.000	S 7	0	0	3.883	1.684	5.566					0.6	
						E	0	0	3.812	1.781	5.593	53.11	120	0	0		
100	100	60	60.000	60.000	1.000	S 7	0	0	1.400	1.878	3.279					-0.3	
						E	0	0	1.376	1.894	3.270	36.52	120	0	5.17		
-100	100	200	90.000	30.000	1.000	S 7	0	0	2.563	1.461	4.024					1.0	
						E	0	0	2.553	1.511	4.064	12.84	1.20	37.92	20.13		
-100	100	60	60.000	-60.000	1.000	S 7	0	1.760	1.300	0	3.060						Afvigelse mel- lem S 7 og S 13 = 1.0%
						S 13	0	1.748	1.282	0	3.030						
						E	0	1.703	1.230	0	2.933	39.35	31.10	0	0	-3.3	
-100	100	30	30.000	-30.000	1.000	S 7	0	0.991	0.483	0	1.474					-5.4	
						E	0	0.954	0.445	0	1.399	20.46	13.11	0	0		

SKEMA 7.3

tidigt med, at der indføres ekstra restriktioner på armeringen i henhold til det behov, de foregående trin har angivet (betydelig billigere, men ikke så god en løsning). I alle andre tilfælde er den iterative fremgangsmåde langt at foretrække, som det fremgår af beregningstiderne.

8. KONKLUSION

Der udvikles et program baseret på skiveopdelingsmetoden og successiv iteration til dimensionering af et jernbetonskalelement for snitkræfterne N_x , N_y , N_{xy} , M_x , M_y , M_{xy} , idet der forudsættes ideal-plastisk opførsel.

Undersøgelse af den fejl, der begås ved at antage ideal-plastisk opførsel, er foretaget i afsnit 3 og har ført til restriktioner for de skivetykkelser, der opereres med i beregningerne.

Programmet sammenlignes med et andet skiveopdelingsprogram udviklet i afsnit 7. Dette bygger på matematisk optimering (lineær programmering). Sammenligninger viser god overensstemmelse.

Endelig er programmet sammenlignet med en skiveopdelingsmetode, som er anvendelig til håndregning. Denne sammenligning viser, at det udviklede program giver væsentlige armeringsreduktioner, når

- normalkræfterne er negative (tryk),
- det vridende moment er stort.

For en række snitkraftkombinationer af denne art er der konstateret en gennemsnitlig armeringsreduktion på ca. 10%.

Programmets regnetid er lille og betydelig mindre end ved lineær programmering.

9. LITTERATURLISTE

- [1] Berg, Steinar: Nonlinear finite element analysis of reinforced concrete plates.
Report No. 73-1. Institutt for Statikk, Norges tekniske Høgskole, februar 1973.
- [2] Berg, Steinar: A model for capacity control of a reinforced concrete shell section.
SINTEF - rapport nr. STF 71 A 75040, NtH, Trondheim, december 1975.
- [3] Brøndum-Nielsen, Troels: Optimum design of reinforced concrete shells and slabs.
Rapport nr. R 44, Afdelingen for Bærende Konstruktioner, Dth, 1974.
- [4] Gass, S.I.: Linear Programming (Methods and Applications).
McGraw-Hill, 1964, sec.edit.
- [5] Hansen, Karl Erik: Eksamensprojekt: Armeringsbestemmelse i skalkonstruktioner på grundlag af plasticitetsteorien.
Afdelingen for Bærende Konstruktioner, Dth, Foråret 1976.
- [6] Lange-Hansen, P.: Generel plasticitetsteori for idealt plastiske materialer og konstruktioner I og II.
Forelæsningsnotater nr. F 19, 1973 og F 20, 1970, Afdelingen for Bærende Konstruktioner, Dth.
- [7] Morley, C.T.: Optimum reinforcement of concrete slab elements against combination of moments and membrane forces.
Mag. Concr.Res., Vol. 22, No. 72, september 1970, pp. 155-162.
- [8] Nielsen, M.P.: Limit Analysis of Reinforced Concrete Slabs.
Acta Polytechnica Scandinavica, Ci 26, København 1964.
- [9] Nielsen, M.P.: Yield Condition for Reinforced Concrete Shells in the Membrane State.
Proc. IASS Symp. Non-classical Shell Problems, Amsterdam 1964.
- [10] Nielsen, M.P.: Om jernbetonskivers styrke.
København 1969.

- [11] Nielsen, M.P.: Bestemmelse af armering i jernbeton-skaller.
Rapport nr. 7104, Ren og anvendt mekanik, DIA-B, Aalborg 1971.

- [12] Nielsen, M.P.: On the strength of reinforced concrete discs.
Acta Polytechnica Scandinavica, Civil Engineering and Building Construction series no. 70, Copenhagen 1971.

- [13] Zavelani, A.: A Compact Linear Programming Procedure for Optimal Design in Plane Stress.
J.Struct.Mech., p. 301-324, 1973.

- [14] DS 411, Dansk Ingeniørforenings norm for beton-konstruktioner, 1970.

AFDELINGEN FOR BÆRENDE KONSTRUKTIONER

DANMARKS TEKNISKE HØJSKOLE

Structural Research Laboratory

Technical University of Denmark, DK-2800 Lyngby

RAPPORTER (Reports)

(1975 -)

- R 61. NIELSEN, LEIF OTTO: Spændingshybride finite elementer til svingningsproblemer. 1975.
- R 62. EGERUP, ARNE RYDÉN: Theoretical and experimental determination of the stiffness and ultimate load of timber trusses. 1975.
- R 63. LAURSEN, MARTIN: A curved beam equilibrium element applicable in standard finite element program systems. 1975.
- R 64. BACH, FINN: Metoder til måling af egenpændinger. 1975.
- R 65. BACH, FINN: En teoretisk og eksperimentel undersøgelse af den akustoelastiske metodes anvendelighed til egenpændingsmåling. 1975.
- R 66. PEDERSEN, FLEMMING BLIGAARD: Measurement of the complex modulus of viscoelastic materials. 1975. *)
- R 67. PEDERSEN, FLEMMING BLIGAARD: Svingningsforsøg med viskoelastisk dæmpede sandwichbjælker. 1975.
- R 68. AGERSKOV, HENNING: Analysis of high strength bolted connections subject to prying. A simplified approach. 1975.
- R 69. PEDERSEN, MAX ELGAARD: En 2.ordens tilnærmelse til de konstitutive ligninger for beton. 1976.
- R 70. RIBERHOLT, HILMER and PETER CHR. NIELSEN: Timber under combined compression and bending stress. 1976.
- R 71. KRENCHER, HERBERT og J. BJØRNBÆK-HANSEN: Undersøgelse af let konstruktionsbetons væsentligste materialemparametre. 1976.
- R 72. BRÆSTRUP, M.W., M.P. NIELSEN, FINN BACH and B.CHR. JENSEN: Shear tests on reinforced concrete T-beams. Series T. 1976.
- R 73. NIELSEN, M.P. and M.W. BRÆSTRUP: Plastic shear strength of reinforced concrete beams. 1976.
- R 74. Resume-oversigt 1975. Summaries of papers 1975. 1976. *)
- R 75. BRÆSTRUP, M.W., M.P. NIELSEN, B.CHR. JENSEN and FINN BACH: Axisymmetric punching of plain and reinforced concrete. 1976.
- R 76. BRØNDUM-NIELSEN, TROELS: Partial prestressing. 1976.
- R 77. LAURSEN, M.E.: EQSHELL. An equilibrium shell finite element for arbitrary shell geometry. 1977.
- R 78. DYRBYE, CLAES and FLEMMING BLIGAARD PEDERSEN: Rubber mountings and vibration isolation. 1977.
- R 79. BRÆSTRUP, M.W., M.P. NIELSEN and FINN BACH: Rational analysis and design of stirrups in reinforced concrete beams. 1977.

*) Udsolgt. Out of print.

- R 80. ABK's informationsdag 1977. 1977.
- R 81. Resumeoversigt 1976. Summaries of papers 1976. 1977.
- R 82. MØLLMANN, H.: Static and dynamic analysis of plane cable structures. 1977.
- R 83. RIBERHOLT, H.: Bolte indlimet i limtræ. 1977.
- R 84. AGERSKOV, H. and J. BJØRNBAK-HANSEN: Fatigue strength of welded connections in round bar steel structures. 1977.
- R 85. LAURSEN, M.E., M.P. NIELSEN and M.ROIKJÆR: Stability analysis of beams and arches by energy methods. 1977.
- R 86. LAURSEN, M.E.: Derivation of symmetric integration formulas for triangles. 1977.
- R 87. LAURSEN, M.E.: Stability and vibration analysis of plane curved beams by an equilibrium finite element method. 1977.
- R 88. PEDERSEN, FLEMMING BLIGAARD: Vibration analysis of viscoelastically damped sandwich structures. 1978.
- R 89. BRØNDUM-NIELSEN, TROELS: Epoxy resin repair of cracked concrete beams. 1978.
- R 90. HESS, UWE, B.CHR. JENSEN, M.W. BRÆSTRUP, M.P. NIELSEN og FINN BACH: Gennemlokning af jernbetonplader. 1978.
- R 91. HANSEN, KARL ERIK, KAJ L. BRYDER og M.P. NIELSEN: Armeringsbestemmelse i jernbetonskaller. 1978.