

AFDELINGEN FOR  
BÆRENDE KONSTRUKTIONER  
DANMARKS TEKNISKE HØJSKOLE



STRUCTURAL RESEARCH LABORATORY  
TECHNICAL UNIVERSITY OF DENMARK

J. F. Jensen , M. W. Bræstrup , F. Bach og M. P. Nielsen  
NOGLE PLASTICITETSTEORETISKE BJÆLKELØSNINGER

RAPPORT NR. R 101 1978

NOGLE PLASTICITETSTEORETISKE BJÆLKELØSNINGER

J.F.Jensen, civilingeniør  
M.W.Bræstrup, lic.techn.  
F.Bach, lic.techn.  
M.P.Nielsen, dr.techn.

Afdelingen for Bærende Konstruktioner  
Danmarks tekniske Højskole

FORORD

Rapportens forfattere har gennem længere tid arbejdet med brug af plasticitetsteorien til at bestemme forholdene i forskydningspåvirkede jernbetonbjælker i brudstadiet. Den er et supplement til tidligere udgivelser om emnet og indeholder nogle enkelte tidligere kendte løsninger, dog med væsentligt nyt tilføjet, samt en række helt nye, ikke tidligere publicerede løsninger. De nye delløsninger og løsninger er udledt i 1977 - 78 af J.F.Jensen, der ligeledes har udarbejdet rapporten.

## RESUMÉ

Rapporten behandler en række bæreevneproblemer ved jernbetonbjælker. Løsningerne findes ad ren teoretisk vej, idet de indgående materialer betragtes som værende stift, idealt plastiske.

Hovedvægten er lagt på bjælker uden forskydningsarmering, men i et enkelt afsnit behandles den forskydningsarmerede stringerbjælke under koncentreret last, og det nye er her en forbedret nedreværdi for små bøjlearmeringsmængder, hvilket for denne idealiserede bjælketype betyder, at der nu findes sammenfaldende øvre- og nedreværdi for alle grader af forskydningsarmering. For bjælker uden forskydningsarmering findes teoretisk set eksakte løsninger for tre belastningstilfælde, nemlig koncentreret last, jævnt fordelt last, samt central normalkraft kombineret med koncentreret last.

Ved udledelsen af ovennævnte løsninger, som findes i rapportens første del, er betonen ikke tillagt nogen trækstyrke. I den sidste del analyseres trækstyrkens betydning ved ikke-forskydningsarmerede bjælker, dels under koncentreret last, dels under jævnt fordelt last. Denne analyse gennemgås både for stringerbjælker og rektangulære bjælker, eftersom disse to bjælketyper opfører sig højst forskelligt under den fordelte last.

## SUMMARY

The report treats some problems of load-carrying capacity of reinforced concrete beams. The solutions are theoretical, considering both concrete and reinforcement being rigid, perfectly plastic.

The majority of the report deals with beams without web reinforcement, but in one section the shear reinforced stringer beam under concentrated loading is treated, and in this case a new improved lower bound solution for small amounts of stirrup reinforcement is found, such that coinciding upper- and lower bound solution now exists for all degrees of shear reinforcement for this idealized type of beam. For beams without web reinforcement exact solutions are found for three loading cases, namely concentrated loading, distributed loading and central normal force combined with concentrated loading.

In the solutions mentioned above, no tensile strength is attributed to the concrete. In the last part of the report the influence of the tensile strength is analysed for beams without shear reinforcement under concentrated loading and distributed loading as well. This analysis is expounded for both stringer beams and rectangular beams, since these two types of beams behave quite differently under the distributed loading.

INDHOLD:

INDLEDNING

NOTATION

1. LØSNINGER UDEN HENSYNTAGEN TIL BETONENS TRÆKSTYRKE
  - 1.1 Forudsætninger
  - 1.2 Koncentreret last på bjælke uden forskydningsarmering
    - 1.2.1 Nedreværdiløsning
    - 1.2.2 Øvreværdiløsning
  - 1.3 Jævnt fordelt last på bjælke uden forskydningsarmering
    - 1.3.1 Nedreværdiløsning
    - 1.3.2 Øvreværdiløsning
    - 1.3.3 Øvreværdiløsning for forskydningsbrud
  - 1.4 Central normalkraft og koncentreret last på bjælke uden forskydningsarmering
    - 1.4.1 Nedreværdiløsning
    - 1.4.2 Øvreværdiløsning
  - 1.5 Forskydningsarmeret stringerbjælke med koncentreret last
    - 1.5.1 Nedreværdiløsning
    - 1.5.2 Øvreværdiløsning
2. LØSNINGER MED HENSYNTAGEN TIL BETONENS TRÆKSTYRKE
  - 2.1 Forudsætninger
  - 2.2 Koncentreret last på stringerbjælke uden forskydningsarmering
    - 2.2.1 Nedreværdiløsning
    - 2.2.2 Øvreværdiløsning
  - 2.3 Koncentreret last på rektangulær bjælke uden forskydningsarmering
  - 2.4 Øvreværdiløsning for jævnt fordelt last på stringerbjælke uden forskydningsarmering
  - 2.5 Øvreværdiløsning for jævnt fordelt last på rektangulær bjælke uden forskydningsarmering

AFSLUTNING

LITTERATUR

INDLEDNING.

Indholdet af nærværende rapport består af rent teoretiske løsninger på en række matematisk set velformulerede bæreevneproblemer for jernbetonbjælker, og formålet er først og fremmest at viderebringe grundideerne i nogle bjækeløsninger, som ikke tidligere har været offentliggjort. Dog vil afsnittene 1.2 og 1.5 forekomme bekendte, fra f.eks. [78.1]; men også her er der indføjet væsentligt nyt.

Det er søgt at begrænse rapporten til et rimeligt omfang, eftersom hovedparten af læserne næppe kan forventes at have interesse i detaljerede gennemregninger. En sådan begrænsning går almindeligvis mest ud over nedreværdiløsningerne, og de læsere, der i enkelte afsnit således måtte savne en nøjere gennemgang af overgangs- og randbetingelser, er velkomne til at rekvirere supplerende materiale hos forfatterne.

De fundne løsninger vil naturligvis kun fremstå som gold teori, hvis de ikke via forsøg kan vises at give en tilfredsstillende beskrivelse af den fysiske virkelighed. En del af løsningerne er da også allerede med godt resultat blevet gennemarbejdet med store mængder af forskydningsforsøg, men beskrivelsen af dette arbejde falder uden for denne rapports rammer, i stedet henvises til f.eks. [78.1] og [78.2].

NOTATION

De vigtigste, hyppigt anvendte symboler fremgår af nedenstående liste.

A	Tværsnitsareal af langsgående armering
$A_a$	Bøjleareal krydsende betontværsnittet $b \cdot c'$
a	Forskydningsspændvidde
b	Bjælkebredde
C	Trykstringerkraft
c	Konstant
$c'$	Vandret bøjleleafstand
h	Bjælkehøjde
k	$(1 + \sin\varphi)/(1 - \sin\varphi)$
N	Normalkraft
p	Jævnt fordelt last pr. arealenhed
R	Reaktion
T	Trækstringerkraft
t	Integrationsvariabel
V	Forskydningskraft
$w_E$	Ydre arbejde
$w_I$	Indre arbejde
$w_l$	Indre arbejde pr. fladeenhed
$\alpha$	Fri vinkel
$\beta$	Fri vinkel
$\delta$	Relativ flytning
$\epsilon_1, \epsilon_2$	Hovedtøjninger
$\theta$	Betontrykkets hældning i bjælkekroppen. Relativ vinkeldrejning
$\lambda$	$1 - \rho(k - 1)$
$\mu$	$1 - \rho(k + 1)$
$\pi$	$N/b h \sigma_c$
$\rho$	$\sigma_t/\sigma_c$
$\sigma_1, \sigma_2$	Hovedspændinger
$\sigma_a$	Spænding i bøjlearmering
$\sigma_b$	Betonspænding
$\sigma_c$	Betonens trykstyrke
$\sigma_f$	Langsgående armerings flydespænding

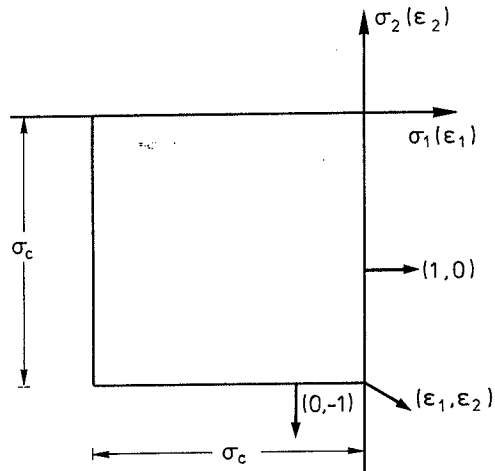
$\sigma_{fb}$	Bøjlearmeringens flydespænding
$\sigma_t$	Betonens trækstyrke
$\sigma_x, \sigma_y$	Normalspændinger
$\tau$	Formel forskydningsspænding
$\tau_{xy}$	Forskydningsspænding
$\Phi$	$A\sigma_f/bh \sigma_c$
$\varphi$	Betonens friktionsvinkel
$\varphi_b$	$A_a/bc'$
$\psi$	$\varphi_b \sigma_{fb}/\sigma_c$

1. LØSNINGER UDEN HENSYNTAGEN TIL BETONENS TRÆKSTYRKE

1.1 Forudsætninger

Til indledning antages følgende:

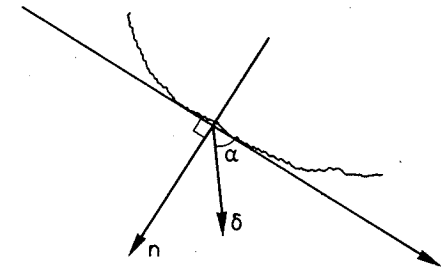
- a) Armeringsstålet er stift idealt plastisk og kan kun optage normalspændinger i sin længderetning. Flydespændingen for såvel træk som tryk er  $\sigma_f$ .
- b) Betonen er et stift idealt plastisk materiale med den modificerede Coulombske brudhypotese som flydebetingelse, idet betonen ikke regnes at kunne optage trækspændinger. Deformationerne styres af den associerede flydelov (normalitetsbetingelsen).
- c) Spændingstilstanden i bjælken er plan, hvilket betyder at armeringen må regnes jævnt fordelt over bjælkens bredde.



Figur 1: Flydebetingelse og flydelov for beton ved plan spændingstilstand.

Med de gjorte forudsætninger bliver det indre arbejde pr. areal-enhed af en flytningsdiskontinuitetslinie beliggende i betonen som vist i fig. 2 , (se f.eks. [78.1]):

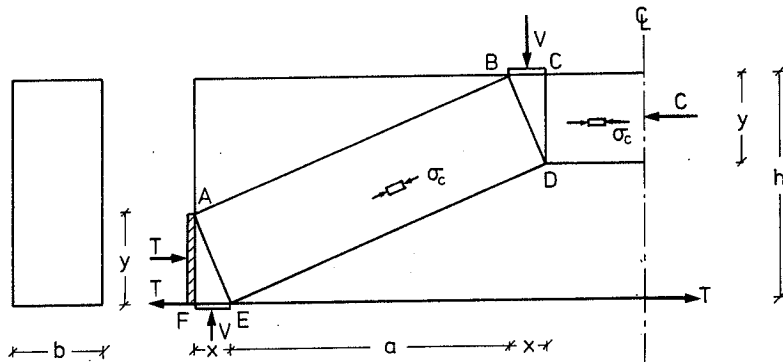
$$w_l = \frac{1}{2} \delta \sigma_c (1 - \sin \alpha)$$



Figur 2: Normalsnit gennem flytningsdiskontinuitet med indtegnet bevægelsesvektor.

1.2 Koncentreret last på bjælke uden forskydningsarmering

1.2.1 Nedreværdiløsning



Figur 3: Geometri og spændingsfordeling.

Betragt bjælken virkende som en bue, jævnfør fig. 3, hvor område ABDE befinder sig i énaksret tryktilstand. Last og reaktion samt stringerkræfterne overføres til buen gennem trekantområderne BCD og AEF, som begge regnes at være i toaksret hydrostatisk tryktilstand. Armeringskraften tænkes overført til betonen, som vist på figuren, af den del af bjælken, der ligger bag understøtningen. Den hydrostatiske trykspænding sættes til at være lig med den énaksede spænding i buen og begge lig med betonens trykstyrke,  $\sigma_c$ .

Bæreevnen,  $V$ , findes ved beregning af længden  $x$ , idet

$$V = b x \sigma_c$$

Eftersom betonen uden for buen regnes at være spændingsfri, må vinklerne i ABDE være rette, så ved gentagen brug af Pythagoras' læresætning findes følgende ligning til bestemmelse af  $x$ :

$$a + x = \sqrt{(a^2 + h^2) - (x^2 + y^2) - (h - y)^2}$$

som, da vi kun er interesseret i den positive rod, har løsningen

$$x = \frac{1}{2}(\sqrt{4y(h-y) + a^2} - a)$$

Ved indførelse af

$$\tau = \frac{V}{bh}$$

kan bæreevnen nu angives på den dimensionsløse form:

$$\frac{\tau}{\sigma_c} = \frac{1}{2}(\sqrt{4\frac{y}{h}(1-\frac{y}{h}) + (\frac{a}{h})^2} - \frac{a}{h})$$

Den største bæreevne, og dermed den bedste nedreværdi, findes ved differentiation med hensyn til  $y$ , hvilket leder frem til maksimum når

$$y = \frac{1}{2}h$$

Denne løsning kræver så megen langsgående armering, at

$$A\sigma_f \geq \frac{1}{2}hb\sigma_c$$

eller udtrykt ved armeringsgraden:

$$\phi \geq \frac{1}{2}, \quad \text{hvor } \phi = \frac{A\sigma_f}{hb\sigma_c}$$

Ved mindre armeringsgrader skal  $y$  således være størst mulig og samtidig opfylde relationen

$$A\sigma_f \geq yb\sigma_c$$



Den bedste nedreværdi fås derfor i dette tilfælde når

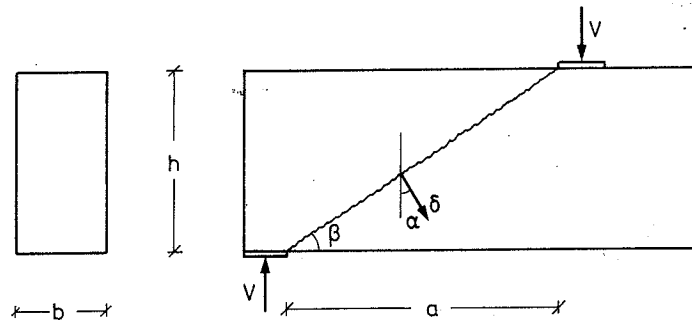
$$y = \phi h$$

Den fuldstændige nedreværdiløsning kan herefter opskrives som følger:

$$\frac{\tau}{\sigma_c} = \frac{1}{2} \left( \sqrt{1 + \left(\frac{a}{h}\right)^2} - \frac{a}{h} \right) \quad \text{for } \phi \geq \frac{1}{2}$$

$$\frac{\tau}{\sigma_c} = \frac{1}{2} \left( \sqrt{4\phi(1-\phi) + \left(\frac{a}{h}\right)^2} - \frac{a}{h} \right) \quad \text{for } \phi \leq \frac{1}{2}$$

### 1.2.2. Øvre værdiløsning



Figur 4: Brudmekanisme.

Med den på fig. 4 skitserede brudmekanisme findes den bedste øvre værdiløsning for den mindst mulige værdi af  $\beta$ , svarende til

$$\cot \beta = \frac{a}{h}$$

Det totale indre arbejde bliver

$$w_I = \frac{1}{2} \delta \sigma_c \frac{bh}{\sin \beta} (1 - \cos(\alpha - \beta)) + \delta \phi bh \sigma_c |\sin \alpha|$$

idet første led er betonens bidrag, og andet led er armeringens bidrag til arbejdet. Det ydre arbejde er

$$w_E = V \delta \cos \alpha$$

Af arbejdsligningen findes således bæreevnen

$$V = \frac{1}{2} \frac{bh \sigma_c}{\sin \beta} \frac{1 - \cos(\alpha - \beta) + 2\phi |\sin \alpha| \sin \beta}{\cos \alpha}$$

Dette udtryk minimeres med hensyn til  $\alpha$ , og minimum findes når

$$\sin \alpha = (1 - 2\phi) \sin \beta \quad \text{for } \phi \leq \frac{1}{2}$$

$$\sin \alpha = 0 \quad \text{for } \phi \geq \frac{1}{2}$$

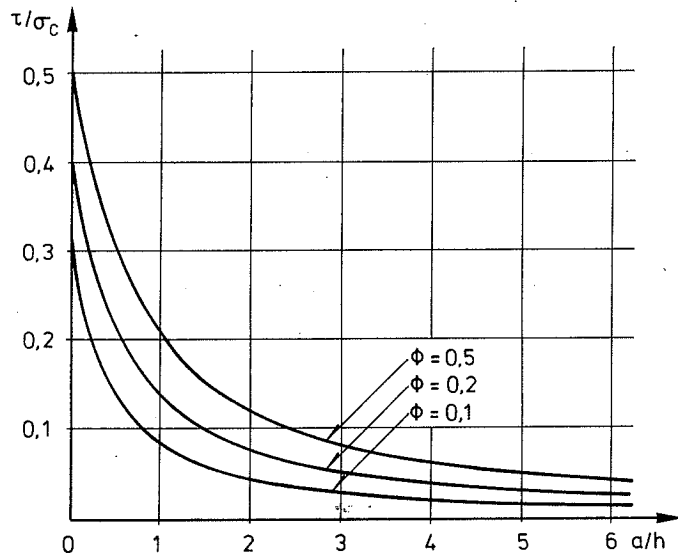
Øvre værdiløsningen kan herefter opskrives på dimensionsløs form som

$$\frac{\tau}{\sigma_c} = \frac{1}{2} \left( \sqrt{1 + \left(\frac{a}{h}\right)^2} - \frac{a}{h} \right) \quad \text{for } \phi \geq \frac{1}{2}$$

$$\frac{\tau}{\sigma_c} = \frac{1}{2} \left( \sqrt{4\phi(1-\phi) + \left(\frac{a}{h}\right)^2} - \frac{a}{h} \right) \quad \text{for } \phi \leq \frac{1}{2}$$

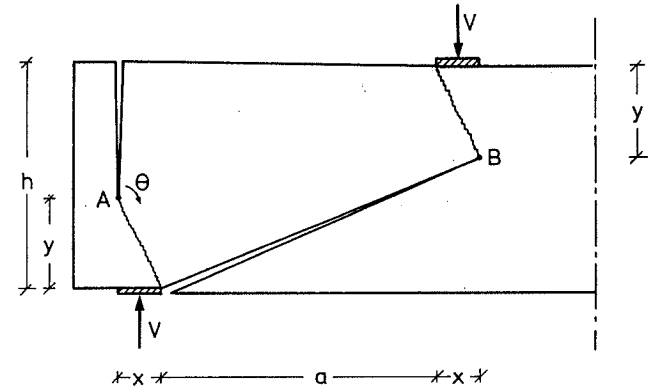
Det ses, at øvre- og nedreværdiløsningen er sammenfaldende, hvilket betyder, at de fundne udtryk er eksakte ifølge plasticitetsteoriens entydighedssætning.

På fig. 5 ses de opstillede bæreevneudtryk afbildet som funktion af forskydningsspændviddeforholdet,  $a/h$ , og armeringsgraden  $\phi$ .



Figur 5: Grafisk illustration af bæreevnen.

Det er interessant at bemærke, at der findes endnu en brudmekanisme, der giver samme bæreevne som nedreværdiløsningen. Denne brudmekanisme, der er vist i fig. 6, er en art bøjningsbrud, hvor en del af bjælken i forskydningsfaget roterer om punkt A, beliggende over og bag understøtningens forkant. Bevægelsen af bjælkens midterdel er en ren translation, idet også det viste punkt B fungerer som hængsel.



Figur 6: Alternativ brudmekanisme for enkeltkraft.

Det indre arbejde bliver

$$w_I = 2 \int_0^{\sqrt{x^2+y^2}} \theta b \sigma_c t dt + A \sigma_f |h - 2y| \theta$$

$$w_I = \theta b \sigma_c (x^2 + y^2 + \phi h |h - 2y|)$$

Det ydre arbejde er

$$w_E = (a + 2x) \theta V$$

Bæreevnen findes herefter af arbejdslikningen til

$$V = \frac{y^2 + x^2 + \phi h |h - 2y|}{a + 2x} \sigma_c$$

Ved minimering m.h.t.  $x$  og  $y$  findes de optimale værdier

$$y = \phi h \quad \text{for } \phi < \frac{1}{2}$$

$$y = \frac{1}{2} h \quad \text{for } \phi > \frac{1}{2}$$

$$x = \frac{1}{2} (\sqrt{4\phi(1-\phi)h^2 + a^2} - a) \quad \text{for } \phi < \frac{1}{2}$$

$$x = \frac{1}{2} (\sqrt{h^2 + a^2} - a) \quad \text{for } \phi > \frac{1}{2}$$

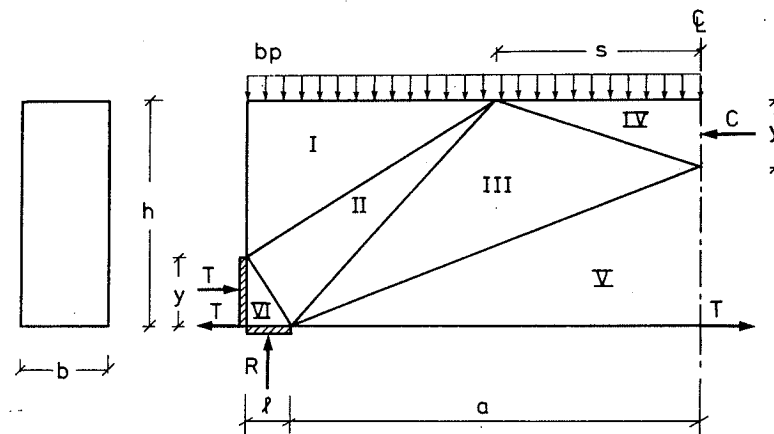
Bæreevnen bliver da som i det foregående:

$$\frac{\sigma_T}{\sigma_C} = \frac{1}{2} (\sqrt{4\phi(1-\phi) + (\frac{a}{h})^2} - \frac{a}{h}) \quad \text{for } \phi < \frac{1}{2}$$

$$\frac{\sigma_T}{\sigma_C} = \frac{1}{2} (\sqrt{1 + (\frac{a}{h})^2} - \frac{a}{h}) \quad \text{for } \phi > \frac{1}{2}$$

### 1.3 Jævnt fordelt last på bjælke uden forskydningsarmering

#### 1.3.1 Nedreværdiløsning



Figur 7: Bjælkens opdeling i områder med homogene spændingstilstande.

Bjælkedelen opdeles i seks områder med homogene spændingstilstande, som vist i fig. 7, hvor område V er spændingsfrit. Kraften i armeringen tænkes som vist ligesom i afsnit 1.2.1 overført til betonen af den del af bjælken, der ligger bag understøtningen. Vi finder, at lodret projektion og momentligevægt kræver:

$$R = .b p(a + l)$$

$$T = C = \frac{bp a (a + l)}{2(h - y)}$$

Der regnes nu med toakset hydrostatisk tryk i område VI, hvilket opnås når

$$l = \frac{2y(h-y)}{a}$$

Da område V er spændingsfrit, bliver spændingstilstanden i område III énakset, og det kræves derfor, at den samlede last på område IV er rettet efter skillelinien mellem område III og V. Dette krav er ensbetydende med at

$$s = \frac{1}{2}(a+l) = \frac{1}{2}\left(a + \frac{2y(h-y)}{a}\right)$$

Ved at indlægge forskellige snit i bjælken og projicere herpå kan samtlige spændinger i alle områder nu findes:

$$\text{Område I : } \sigma_1^I = \sigma_x^I = 0$$

$$\sigma_2^I = \sigma_y^I = -p$$

$$\text{Område II : } \sigma_1^{II} = -\frac{a^2 + 2y(h-y)}{a^2 + 2h(h-y)} p$$

$$\sigma_2^{II} = -\frac{a^2 + 2y(h-y)}{2y(h-y)} p$$

$$\text{Område III : } \sigma_1^{III} = 0$$

$$\sigma_2^{III} = -\frac{(a^2 + 2y(h-y))(a^2 + (h-y)^2)}{(h-y)(a^2(h+y) + 2y(h-y)^2)} p$$

$$\text{Område IV : } \sigma_1^{IV} = \sigma_y^{IV} = -p$$

$$\sigma_2^{IV} = \sigma_2^{II}$$

$$\text{Område V : } \sigma_1^V = \sigma_2^V = 0$$

$$\text{Område VI : } \sigma_1^{VI} = \sigma_2^{VI} = \sigma_2^{II}$$

Det ses, at der ingen steder optræder træk i betonen, og at bæreevnen er udtømt når den numerisk største trykspænding kommer op

på betonens trykstyrke,  $\sigma_c$ , det vil sige når

$$\sigma_2^{II} = \sigma_2^{IV} = \sigma_1^{VI} = \sigma_1^{VI} = -\sigma_c$$

således at bæreevnen bestemmes af

$$p = \frac{2y(h-y)}{a^2 + 2y(h-y)} \sigma_c$$

Da armeringen skal kunne optage den nødvendige kraft, findes maximum af bæreevnen for

$$y = \frac{1}{2}h \quad \text{for } \phi = \frac{A\sigma_f}{bh\sigma_c} \geq \frac{1}{2}$$

$$y = \phi h \quad \text{for } \phi \leq \frac{1}{2}$$

Herefter indføres

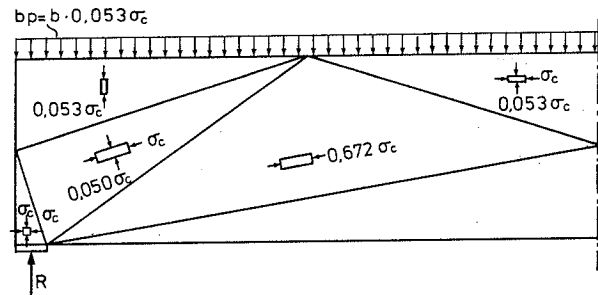
$$\tau = \frac{p a}{h}$$

og nedreværdiløsningen opskrevet på dimensionsløs form lyder da

$$\frac{\tau}{\sigma_c} = \frac{\frac{a}{h}}{2\left(\frac{a}{h}\right)^2 + 1} \quad \text{for } \phi \geq \frac{1}{2}$$

$$\frac{\tau}{\sigma_c} = \frac{2\phi(1-\phi)\frac{a}{h}}{\left(\frac{a}{h}\right)^2 + 2\phi(1-\phi)} \quad \text{for } \phi \leq \frac{1}{2}$$

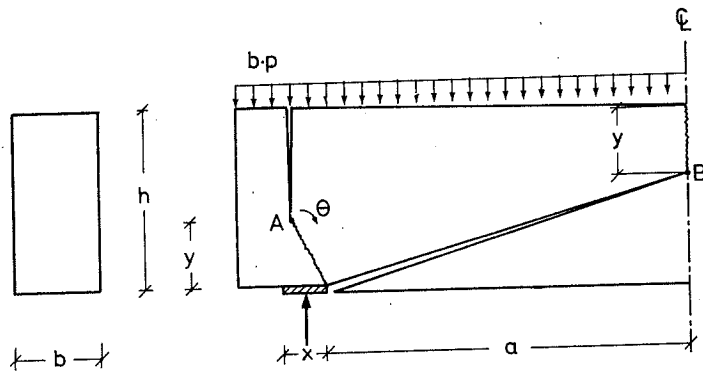
På fig. 8 ses den optimale spændingsfordeling ved brud optegnet for en bjælke, hvor  $\frac{a}{h} = 3$  og  $\phi \geq \frac{1}{2}$ .



Figur 8: Spændingsfordeling ved brud.  $\frac{a}{h} = 3$  og  $\phi \geq \frac{1}{2}$

### 1.3.2 Øvre værdiløsning

En mulig brudmekanisme er vist på fig. 9.



Figur 9: Brudmekanisme.

Idet punkt A og B fungerer som hængsler, drejer en del af bjælken sig vinklen  $\theta$  om punkt A, som det er vist på fig. 9. Armeringen tænkes at ligge i bunden af bjælken, så det indre arbejde bliver ialt:

$$w_I = b \int_0^y \sigma_c \theta t dt + b \int_0^{\sqrt{y^2 + x^2}} \sigma_c \theta t dt + \phi b h \sigma_c \theta |h - 2y|$$

og det ydre arbejde bliver

$$w_E = \frac{1}{2} (a + x)^2 \theta b p$$

Ved hjælp af arbejdslikningen findes bæreevnen

$$p = \frac{\sigma_c}{(a + x)^2} (2y^2 + x^2 + 2\phi h |h - 2y|)$$

Minimeres dette bæreevneudtryk med hensyn til  $x$  og  $y$ , findes den bedste øvre værdi for

$$y = \frac{1}{2} h \quad \text{og} \quad x = \frac{1}{2} \frac{h^2}{a} \quad \text{for} \quad \phi \geq \frac{1}{2}$$

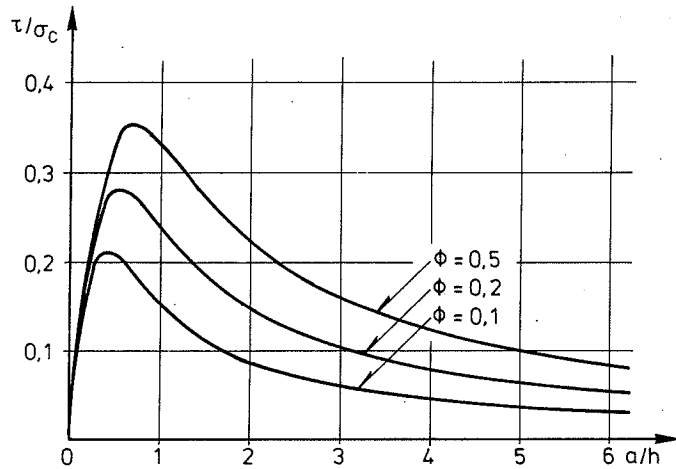
$$y = \phi h \quad \text{og} \quad x = 2\phi(1 - \phi) \frac{h^2}{a} \quad \text{for} \quad \phi \leq \frac{1}{2}$$

Øvre værdiløsningen opskrevet på dimensionsløs form bliver her-  
efter

$$\frac{\tau}{\sigma_c} = \frac{\frac{a}{h}}{2\left(\frac{a}{h}\right)^2 + 1} \quad \text{for} \quad \phi \geq \frac{1}{2}$$

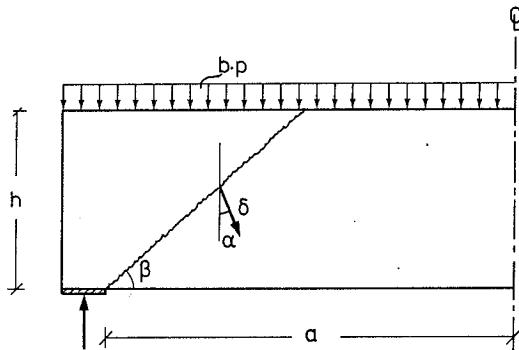
$$\frac{\tau}{\sigma_c} = \frac{2\phi(1 - \phi) \frac{a}{h}}{\left(\frac{a}{h}\right)^2 + 2\phi(1 - \phi)} \quad \text{for} \quad \phi \leq \frac{1}{2}$$

Det ses, at den fundne øvre værdi er identisk med nedreværdien, og er således den eksakte løsning på problemet.



Figur 10: Bæreevns afhængighed af armeringsgraden og spændvidden.

1.3.3 Øvre værdiløsning for forskydningsbrud



Figur 11: Brudmekanisme ved forskydningsbrud.

Ved den ovenfor viste mekanisme, hvor bevægelsen af bjælkens midterdel er en ren translation under vinklen  $\alpha$  med lodret, bliver det indre arbejde:

$$w_I = \frac{1}{2} \delta \sigma_c \frac{b h}{\sin \beta} (1 - \cos(\alpha - \beta)) + \delta \phi \sigma_c b h |\sin \alpha|$$

medens det ydre arbejde er

$$w_E = b p (a - h \cot \beta) \delta \cos \alpha$$

Anvendes arbejdsligningen, findes bæreevneudtrykket

$$p = \frac{1}{2} h \sigma_c \frac{1 - \cos(\alpha - \beta) + 2\phi |\sin \alpha| \sin \beta}{(a \sin \alpha - h \cos \beta) \cos \alpha}$$

Dette udtryk minimeres med hensyn til  $\alpha$  og  $\beta$ , og de optimale værdier findes at være:

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{tg} \alpha &= (1 - 2\phi) \frac{2ah}{a^2 + 4\phi(1 - \phi)h^2} \\ \operatorname{tg} \beta &= \frac{2ah}{a^2 - 4\phi(1 - \phi)h^2} \end{aligned} \right\} \text{for } \phi \leq \frac{1}{2}$$

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{tg} \alpha &= 0 \\ \operatorname{tg} \beta &= \frac{2ah}{a^2 - h^2} \end{aligned} \right\} \text{for } \phi \geq \frac{1}{2}$$

Indsættes disse værdier i bæreevneudtrykket og omskrives til dimensionsløs form, fås

$$\frac{\tau}{\sigma_c} = \frac{4\phi(1 - \phi) \frac{a}{h}}{\left(\frac{a}{h}\right)^2 + 4\phi(1 - \phi)} \quad \text{for } \phi \leq \frac{1}{2}$$

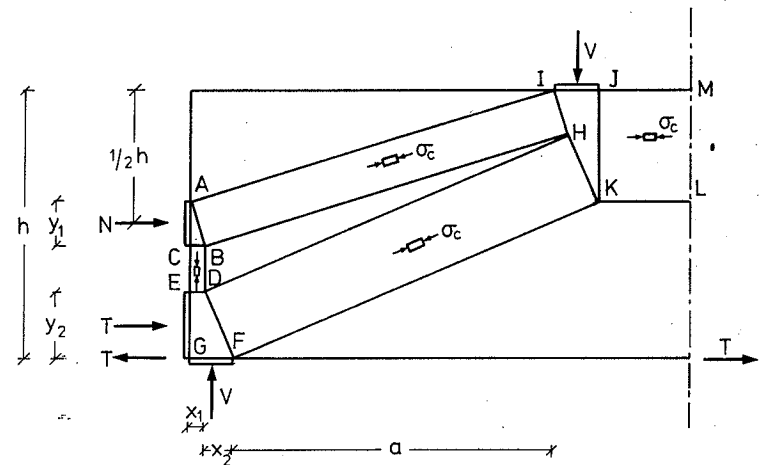
$$\frac{\tau}{\sigma_c} = \frac{\frac{a}{h}}{\left(\frac{a}{h}\right)^2 + 1} \quad \text{for } \phi \geq \frac{1}{2}$$

Det ses, at denne løsning giver væsentligt større bæreevner, end den eksakte løsning fra afsnit 1.3.1 og 1.3.2 angiver for den rektangulære bjælke. For denne bjælketype kan der derfor i almin-

delighed ikke forventes at opstå forskydningsbrud. Drejer det sig derimod om en bjælke med bredere trykflange end bjælkekrop, må man være opmærksom på faren for et sådant brud.

1.4 Central normalkraft og koncentreret last på bjælke uden forskydningsarmering

1.4.1 Nedreværdiløsning



Figur 12: Benyttet spændingsfordeling.

Bag understøtningen antages bjælken at være stærk nok til at kunne optage den angivne overførsel af trækstringerkraften til betonen. Den viste spændingsfordeling ses at være en superposition af to spændingsfordelinger, der begge er af samme type som den benyttede i afsnit 1.2.1. Områderne CBDE, AIHB, DHKF samt JMLK befinder sig i eenakset tryktilstand, hvor trykket regnes at være  $\sigma_c$ . Områderne ABC, EDFG samt IJKH er underlagt toakset hydrostatisk tryk, og ligeledes her regnes trykket at være  $\sigma_c$ . Af dette følger at

$$y_1 = \frac{N}{b\sigma_c}$$

$$y_2 = \frac{A\sigma_f}{b\sigma_c}$$

hvor det kræves, at  $\frac{1}{2}y_1 + y_2 \leq \frac{1}{2}h$ .

Som det fremgår af figur 12, svarer virkemåden af bjælken til, at en del af lasten,  $V$ , optages af en bjælke med højden  $\frac{1}{2}(h+y_1)$  og forskydningsspændvidden  $a+x_2$ , medens resten af lasten optages af en bjælke med højden  $h-y_1$  og forskydningsspændvidden  $a+x_1$ . Analogt til afsnit 1.2.1 findes da

$$x_1 = \frac{1}{2}(\sqrt{4\pi h(\frac{1}{2}(1+\pi)h - \pi h) + (a+x_2)^2} - (a+x_2))$$

$$x_2 = \frac{1}{2}(\sqrt{4\phi h((1-\pi)h - \phi h) + (a+x_1)^2} - (a+x_1))$$

idet vi har indført

$$\pi = \frac{N}{bh\sigma_c}$$

$$\phi = \frac{A\sigma_f}{bh\sigma_c}$$

hvor det er forudsat, at  $0 \leq \pi \leq 1$ . Efter omskrivning fås

$$x_1 + x_2 = \frac{1}{2}(\sqrt{\{2\pi(1-\pi-2\phi) + 4\phi(1-\phi)\}h^2 + a^2} - a)$$

Bæreevnen bestemmes nu af

$$\frac{\tau}{\sigma_c} = \frac{V}{bh\sigma_c} = \frac{b(x_1+x_2)\sigma_c}{bh\sigma_c}$$

og eftersom kravet  $\frac{1}{2}y_1 + y_2 \leq \frac{1}{2}h$  svarer til at  $\pi \leq 1 - 2\phi$ , har vi nu fundet at

$$\frac{\tau}{\sigma_c} = \frac{1}{2}(\sqrt{2\pi(1-\pi-2\phi) + 4\phi(1-\phi) + (\frac{a}{h})^2} - \frac{a}{h})$$

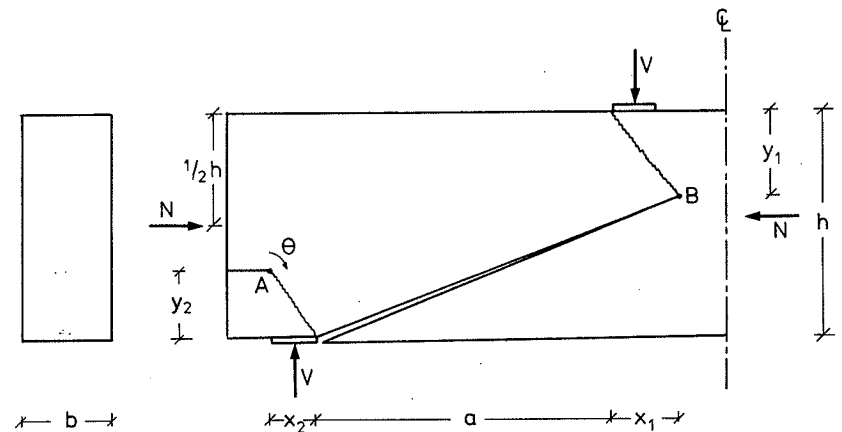
$$\text{for } 0 \leq \pi \leq 1 - 2\phi$$

Når  $\pi > 1 - 2\phi$ , opstår der ikke flydning i armeringen, og bæreevnen bestemmes da til

evnen bestemmes da til

$$\frac{\tau}{\sigma_c} = \frac{1}{2}(\sqrt{1 - \pi^2 + (\frac{a}{h})^2} - \frac{a}{h}) \quad \text{for } 1 - 2\phi \leq \pi \leq 1$$

#### 1.4.2. Øvre værdiløsning



Figur 13: Skitse af anvendt brudmekanisme.

Brudmekanismen vist ovenfor er i nær familie med en af mekanismerne, der anvendtes i afsnit 1.2.2, se fig. 6. I det en del af bjælken drejer sig vinklen  $\theta$  om punkt A, og punkterne A og B fungerer som hængsler, bliver det indre arbejde, når armeringen er placeret i bunden af bjælken:



$$w_I = b \int_0^{\sqrt{x_1^2 + y_1^2}} \theta \sigma_c t dt + b \int_0^{\sqrt{x_2^2 + y_2^2}} \theta \sigma_c t dt + A \sigma_f |h - y_1 - y_2| \theta$$

medens det ydre arbejde bliver

$$w_E = V(a + x_1 + x_2) \theta + N \left(\frac{1}{2}h - y_2\right) \theta - N(h - y_1 - y_2) \theta$$

Under anvendelse af arbejdsligningen bestemmes bæreevnen af udtrykket

$$V = \frac{1}{2} b \sigma_c \{x_1^2 + y_1^2 + x_2^2 + y_2^2 + 2\phi h |h - y_1 - y_2| + \pi h (h - 2y_1)\}$$

hvor vi som ved nedreværdiløsningen har indført

$$\phi = \frac{A \sigma_f}{b h \sigma_c}$$

$$\pi = \frac{N}{b h \sigma_c}$$

Mindste bæreevne findes for følgende værdier af de frie parametre:

$$y_1 = (\phi + \pi) h$$

$$y_2 = \phi h$$

$$x_1 = x_2 = \frac{1}{2} \left( \sqrt{(2\pi(1-\pi-2\phi) + 4\phi(1-\phi))h^2 + a^2} - a \right)$$

$$y_1 = \frac{1}{2}(1 + \pi)h$$

$$y_2 = \frac{1}{2}(1 - \pi)h$$

$$x_1 = x_2 = \frac{1}{2} \left( \sqrt{(1 - \pi^2)h^2 + a^2} - a \right)$$

for  $0 \leq \pi \leq 1 - 2\phi$

for  $1 - 2\phi \leq \pi \leq 1$

Indsættes dette i bæreevneudtrykket, som omskrives til dimensionsløs form ved brug af

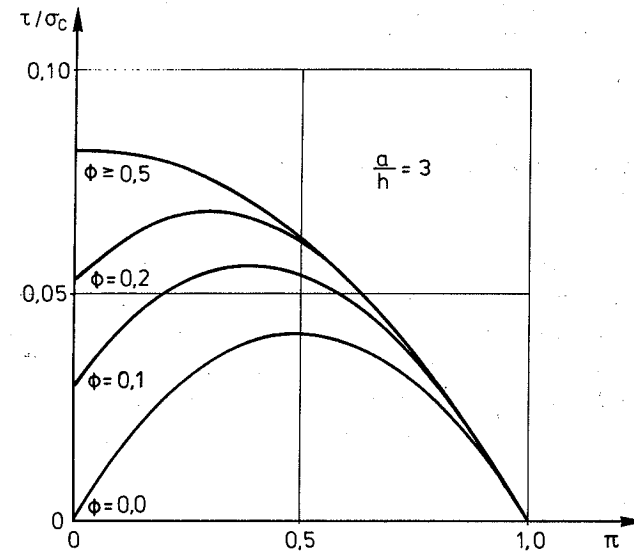
$$\tau = \frac{V}{b h}$$

fås således

$$\frac{\tau}{\sigma_c} = \frac{1}{2} \left( \sqrt{2\pi(1-\pi-2\phi) + 4\phi(1-\phi) + \left(\frac{a}{h}\right)^2} - \frac{a}{h} \right) \text{ for } 0 \leq \pi \leq 1 - 2\phi$$

$$\frac{\tau}{\sigma_c} = \frac{1}{2} \left( \sqrt{1 - \pi^2 + \left(\frac{a}{h}\right)^2} - \frac{a}{h} \right) \text{ for } 1 - 2\phi \leq \pi \leq 1$$

Eftersom øvre- og nedreværdiløsningen er identiske, er den bestemte bæreevne eksakt ifølge entydighedssætningen.

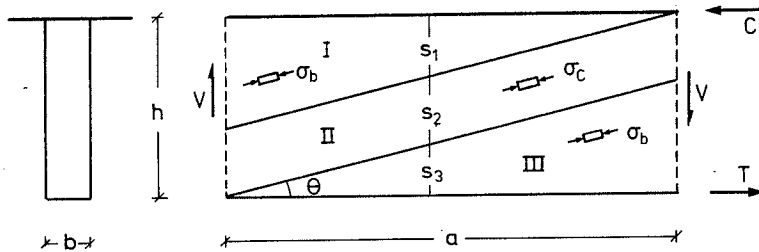


Figur 14: Normalkraftens indflydelse på bæreevnen.

Variationen af bæreevnen med forskydningsspændviddeforholdet,  $\frac{a}{h}$ , vil være ganske analog til det i fig. 5 viste. Bæreevnen som funktion af  $\pi$  er vist i fig. 14 for  $\frac{a}{h} = 3$ .

1.5 Forskydningsarmeret stringerbjælke med koncentreret last

1.5.1 Nedreværdiløsning



Figur 15: Bjælkens opdeling i områder med homogene spændingstilstande.

Betragt bjælkedelen mellem kraft og understøtning vist på fig. 15. I de tre viste områder er betonen underlagt énaksset tryk. Bøjlerne forudsættes placeret så tæt, at bøjlekræfterne kan erstattes af en ækvivalent bøjlespænding, svarende til en jævn fordeling af bøjlekræfterne ud over det betragtede betonareal. Hvis spændingerne i bøjlerne er  $\sigma_a$ , er den ækvivalente bøjlespænding

$$\sigma_y = \frac{A_a \sigma_a}{c' b} = \varphi_b \sigma_a$$

Her er  $A_a$  bøjlearealet der krydser betonarealet  $c' b$ , hvor  $c'$  er afstanden mellem bøjlerne i længderetningen.

I det følgende forudsættes den langsgående armering at være tilstrækkelig stærk til at kunne optage de nødvendige vandrette kræfter.

Den samlede spændingstilstand, der optages af betonen og bøjlerne i områderne I og III, kan skrives:

$$\sigma_x = -\sigma_b \cos^2 \theta$$

$$\sigma_y = -\sigma_b \sin^2 \theta + \varphi_b \sigma_{fb}$$

$$|\tau_{xy}| = \sigma_b \sin \theta \cos \theta$$

eftersom den bedste løsning findes, når der er flydning i bøjlerne, altså når  $\sigma_a = \sigma_{fb}$ .

Vi finder herefter

$$\sigma_b = \frac{|\tau_{xy}|}{\sin \theta \cos \theta}$$

hvor det kræves at

$$\sigma_b \leq \sigma_c$$

Langs toppen og bunden af bjælken skal

$$\sigma_y = 0$$

hvilket medfører at

$$|\tau_{xy}| = \varphi_b \sigma_{fb} \cot \theta$$

I område II ses umiddelbart at

$$|\tau_{xy}^{II}| = \sigma_c \sin \theta \cos \theta$$

Med den indførte spændingsfordeling kan bjælkedelen optage forskydningskraften:

$$V = b(s_1 + s_3) |\tau_{xy}| + b s_2 |\tau_{xy}^{II}|$$

Af geometrien ses, at

$$s_1 + s_3 = a \tan \theta$$

$$s_2 = h - a \operatorname{tg} \theta$$

så ved indførelse af

$$\tau = \frac{V}{bh}$$

kan bæreevnen opskrives på dimensionsløs form

$$\frac{\tau}{\sigma_c} = \frac{a}{h} \psi + \frac{\cot \theta - \frac{a}{h}}{1 + \cot^2 \theta}$$

hvor

$$\psi = \frac{\varphi_b \sigma_{fb}}{\sigma_c}$$

Optimeres bæreevnen med hensyn til  $\theta$  fås maximum for

$$\cot \theta = \sqrt{1 + \left(\frac{a}{h}\right)^2} + \frac{a}{h}$$

som indsat i bæreevneudtrykket giver

$$\frac{\tau}{\sigma_c} = \frac{a}{h} \psi + \frac{1}{2} \left( \sqrt{1 + \left(\frac{a}{h}\right)^2} - \frac{a}{h} \right)$$

Som nævnt er dette kun en løsning for

$$\sigma_b \leq \sigma_c$$

svarende til at

$$\frac{a}{h} \leq \frac{1 - 2\psi}{2\sqrt{\psi(1-\psi)}}$$

For større værdier af  $\frac{a}{h}$  bliver bæreevnen

$$V = b h \sigma_c \sin \theta \cos \theta$$

hvor det stadig skal opfyldes at

$$\sigma_y = -\sigma_c \sin^2 \theta + \varphi_b \sigma_{fb} = 0$$

det vil sige at

$$\cot \theta = \sqrt{\frac{1-\psi}{\psi}}$$

Indsat i bæreevneudtrykket giver dette

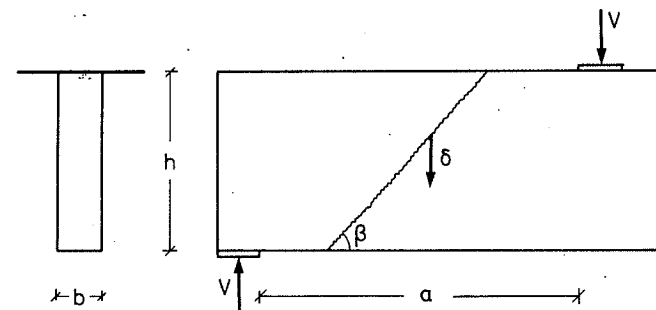
$$\frac{\tau}{\sigma_c} = \sqrt{\psi(1-\psi)}$$

Alt i alt er den samlede nedreværdiløsning således:

$$\frac{\tau}{\sigma_c} = \psi \frac{a}{h} + \frac{1}{2} \left( \sqrt{1 + \left(\frac{a}{h}\right)^2} - \frac{a}{h} \right) \quad \text{for } \frac{a}{h} \leq \frac{1-2\psi}{2\sqrt{\psi(1-\psi)}}$$

$$\frac{\tau}{\sigma_c} = \sqrt{\psi(1-\psi)} \quad \text{for } \frac{a}{h} \geq \frac{1-2\psi}{2\sqrt{\psi(1-\psi)}}$$

### 1.5.2. Øvre værdiløsning



Figur 16: Benyttet brudmekanisme.

Det antages ligesom ved nedreværdiløsningen, at bøjlerne kan regnes jævnt fordelte ud over bjælken, så forudsat der er tilstrækkelig langsgående armering til at sikre en lodret bevægelsesretning, bliver det indre arbejde

$$w_I = \frac{1}{2} \frac{\delta b h \sigma_c}{\sin \beta} (1 - \cos \beta) + \delta b \varphi_b \sigma_{fb} h \cot \beta$$

Med det ydre arbejde

$$w_E = V \delta$$

giver arbejdsligningen bæreevnen

$$V = \frac{1}{2} b h \sigma_c (\sqrt{1 + \cot^2 \beta} - \cot \beta + 2\psi \cot \beta)$$

Den mindste bæreevne findes for

$$\cot \beta = \frac{1 - 2\psi}{2\sqrt{\psi(1-\psi)}}$$

hvor det dog forlanges at

$$\cot \beta \leq \frac{a}{h}$$

for at sikre en geometrisk mulig brudfigur.

Med

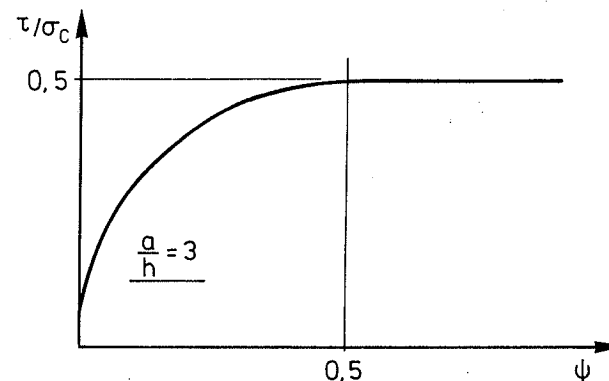
$$\tau = \frac{V}{b h}$$

bliver udtrykket for øvre- og nedreværdiløsningen derfor

$$\frac{\tau}{\sigma_c} = \psi \frac{a}{h} + \frac{1}{2} \left( \sqrt{1 + \left(\frac{a}{h}\right)^2} - \frac{a}{h} \right) \quad \text{for } \frac{a}{h} \leq \frac{1 - 2\psi}{2\sqrt{\psi(1-\psi)}}$$

$$\frac{\tau}{\sigma_c} = \sqrt{\psi(1-\psi)} \quad \text{for } \frac{a}{h} \geq \frac{1 - 2\psi}{2\sqrt{\psi(1-\psi)}}$$

Det ses, at øvre- og nedreværdi er sammenfaldende, så den fundne løsning er eksakt, se endvidere løsningen afbildet grafisk i nedenstående fig. 17.



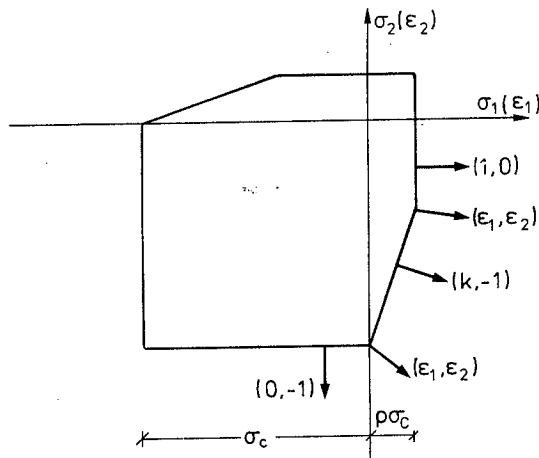
Figur 17: Forskydningsbæreevnenes afhængighed af bøjlearmeringsgraden,  $\psi$ .

2. LØSNINGER MED HENSYNTAGEN TIL BETONENS TRÆKSTYRKE

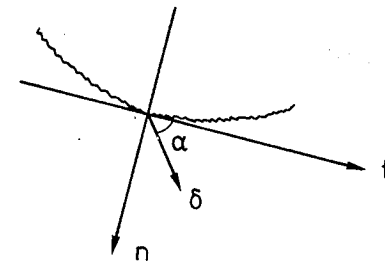
2.1 Forudsætninger

I det følgende antages, at

- a) Betonen er et stift, idealt plastisk materiale med Coulombs modificerede brudkriterium som brudbetingelse. Friktionsvinklen er  $\varphi$ , den enaksede trykstyrke er  $\sigma_c$  og trækstyrken er  $\sigma_t = \rho\sigma_c$ . Deformationerne bestemmes af den associerede flydelov, normalitetsbetingelsen.
- b) Spændingstilstanden i bjælken er plan.



Figur 18: Brudbetingelse og flydelov for beton ved plan spændingstilstand.



Figur 19: Normalsnit i beton med brudlinie og indtegnet bevægelsesvektor.

Med de gjorte forudsætninger bliver det indre arbejde pr. længdeenhed af en brudlinie:

$$w_\ell = \frac{1}{2} \delta \sigma_c (1 - \sin\alpha) \quad \text{for } 0 \leq \alpha \leq \varphi \quad (a)$$

$$w_\ell = \frac{1}{2} \delta \sigma_c (\lambda - \mu \sin\alpha) \quad \text{for } \varphi \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2} \quad (b)$$

hvor der er indført de to parametre:

$$\lambda = 1 - \rho(k - 1)$$

$$\mu = 1 - \rho(k + 1)$$

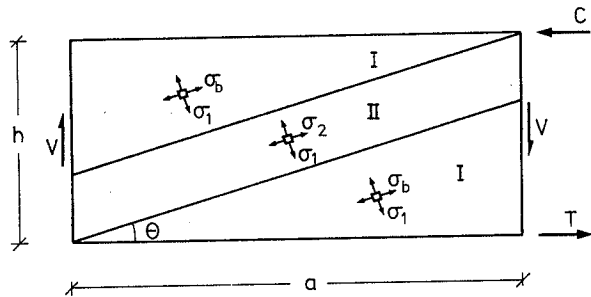
Konstanten k er givet ved

$$k = \frac{1 + \sin\varphi}{1 - \sin\varphi}$$

og sættes almindeligvis lig med 4 for beton, svarende til  $\varphi = 37^\circ$ , eller  $\tan\varphi = 0.75$ .

2.2 Koncentreret last på stringerbjælke uden forskydningsarmering

2.2.1 Nedreværdiløsning



Figur 20: Spændingsfordeling anvendt ved nedreværdiløsning.

På tegningen af bjælkedelen mellem kraft og understøtning er spændingsforholdene angivet i de viste områder med homogene spændingstilstande. Vi forudsætter, at stringerne er tilstrækkeligt stærke til at optage de nødvendige kræfter.

I område I er spændingstilstanden

$$\sigma_x^I = \sigma_b \cos^2 \theta + \sigma_1 \sin^2 \theta$$

$$\sigma_y^I = \sigma_1 \cos^2 \theta + \sigma_b \sin^2 \theta$$

$$|\tau_{xy}^I| = (\sigma_1 - \sigma_b) \sin \theta \cos \theta$$

Da vi i dette område må kræve  $\sigma_y = 0$  fås

$$\sigma_b = -\sigma_1 \cot^2 \theta$$

$$|\tau_{xy}^I| = \sigma_1 (1 + \cot^2 \theta) \sin \theta \cos \theta$$

I område II er

$$|\tau_{xy}^{II}| = (\sigma_1 - \sigma_2) \sin \theta \cos \theta$$

og brud i betonen svarer til, at

$$\sigma_2 = k \sigma_1 - \sigma_c$$

hvilket indsat i udtrykket for forskydningsspændingen giver

$$|\tau_{xy}^{II}| = (\sigma_1 - k \sigma_1 + \sigma_c) \sin \theta \cos \theta$$

Forskydningskraften, der kan optages af bjælken, kan herefter opskrives:

$$V = ba \operatorname{tg} \theta (1 + \cot^2 \theta) \sin \theta \cos \theta \sigma_1 + b(h - a \operatorname{tg} \theta) (\sigma_1 - k \sigma_1 + \sigma_c) \sin \theta \cos \theta$$

$$V = b(a \cot^2 \theta \sigma_1 + (h \sigma_1 - h k \sigma_1 + h \sigma_c) \cot \theta + a \sigma_1 - a \sigma_c) / (1 + \cot^2 \theta)$$

Vi optimerer nu m.h.t.  $\cot \theta$ :

$$\frac{dV}{d \cot \theta} = 0 \Rightarrow \cot \theta = \frac{a}{h} + \sqrt{1 + \left(\frac{a}{h}\right)^2}$$

som indsat i bæreevneudtrykket giver

$$V = b a \sigma_1 + \frac{1}{2} b h (\sigma_1 - k \sigma_1 + \sigma_c) \left( \sqrt{1 + \left(\frac{a}{h}\right)^2} - \frac{a}{h} \right)$$

Af dette udtryk ses den bedste nedreværdi at være opnået dersom

$$\sigma_1 = \sigma_t = \rho \sigma_c \quad \text{for } \frac{a}{h} \geq \frac{-1+k}{2\sqrt{k}} = \operatorname{tg} \varphi$$

$$\sigma_1 = 0 \quad \text{for } \frac{a}{h} \leq \frac{-1+k}{2\sqrt{k}} = \operatorname{tg} \varphi$$

Ved indsættelse fås da

$$\frac{\tau}{\sigma_c} = \frac{1}{2} \left( \sqrt{1 + \left(\frac{a}{h}\right)^2} - \left(\frac{a}{h}\right) \right) \quad \text{for } \frac{a}{h} < \operatorname{tg} \varphi$$

$$\frac{\tau}{\sigma_c} = \frac{1}{2} \left( \lambda \sqrt{1 + \left(\frac{a}{h}\right)^2} - \mu \frac{a}{h} \right) \quad \text{for } \frac{a}{h} \geq \operatorname{tg} \varphi$$

For at disse udtryk skal udgøre løsningen, må det kræves at

$$\sigma_b \geq -\sigma_c$$

svarende til at

$$\frac{a}{h} \leq \frac{1 - k\rho - \rho}{2 \sqrt{\rho(1 - k\rho)}} = \frac{\mu}{\sqrt{\lambda^2 - \mu^2}}$$

For større spændvidder bliver bæreevnen

$$V = b h (\sigma_1 - k\sigma_1 + \sigma_c) \sin\theta \cos\theta$$

hvor det stadig skal opfyldes at

$$\sigma_y = \sigma_1 \cos^2\theta + (k\sigma_1 - \sigma_c) \sin^2\theta = 0$$

eller at

$$\cot^2\theta = \frac{\sigma_c - k\sigma_1}{\sigma_1}$$

Indsat i bæreevneudtrykket giver dette

$$V = b h \sqrt{\sigma_1(\sigma_c - k\sigma_1)}$$

Den største bæreevne opnås her for

$$\sigma_1 = \sigma_t = \rho\sigma_c \quad \text{for } \rho \leq \frac{1}{2k}$$

$$\sigma_1 = \frac{\sigma_c}{2k} \quad \text{for } \rho \geq \frac{1}{2k}$$

så bæreevnen nu bliver

$$\frac{\tau}{\sigma_c} = \sqrt{\rho(1 - k\rho)} = \frac{1}{2} \sqrt{\lambda^2 - \mu^2} \quad \text{for } \rho \leq \frac{1}{2k}$$

$$\frac{\tau}{\sigma_c} = \frac{1}{2\sqrt{k}} = \frac{1}{2} (\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2\varphi} - \operatorname{tg}\varphi) \quad \text{for } \rho \geq \frac{1}{2k}$$

Nu er  $\rho = \frac{1}{2k}$  ensbetydende med at

$$\frac{\mu}{\sqrt{\lambda^2 - \mu^2}} = \operatorname{tg}\varphi$$

og den samlede nedreværdiløsning kan herefter opskrives som følger

$$\frac{\tau}{\sigma_c} = \frac{1}{2} \left( \sqrt{1 + \left(\frac{a}{h}\right)^2} - \frac{a}{h} \right) \quad \text{for } \frac{a}{h} \leq \operatorname{tg}\varphi$$

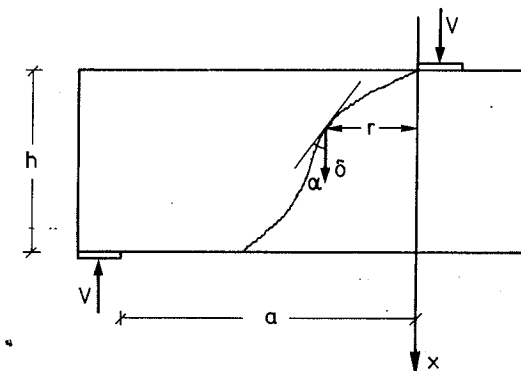
$$\frac{\tau}{\sigma_c} = \frac{1}{2} \left( \lambda \sqrt{1 + \left(\frac{a}{h}\right)^2} - \mu \frac{a}{h} \right) \quad \text{for } \operatorname{tg}\varphi \leq \frac{a}{h} \leq \frac{\mu}{\sqrt{\lambda^2 - \mu^2}}$$

$$\frac{\tau}{\sigma_c} = \frac{1}{2} \sqrt{\lambda^2 - \mu^2} \quad \text{for } \operatorname{tg}\varphi \leq \frac{\mu}{\sqrt{\lambda^2 - \mu^2}} \leq \frac{a}{h}$$

$$\frac{\tau}{\sigma_c} = \frac{1}{2} (\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2\varphi} - \operatorname{tg}\varphi) \quad \text{for } \frac{\mu}{\sqrt{\lambda^2 - \mu^2}} \leq \operatorname{tg}\varphi \leq \frac{a}{h}$$

Her skal det nævnes, at når  $\frac{a}{h} \geq \frac{\mu}{\sqrt{\lambda^2 - \mu^2}}$ , bliver spændingstilstandene i områderne I og II identiske.

### 2.2.2 Øvre værdiløsning



Figur 21: Brudmekanisme brugt ved øvre værdiløsning.

Beskrives brudlinien ved en funktion

$$r = r(x)$$

og antages den langsgående armering at være tilstrækkelig til at sikre en lodret bevægelsesretning for den relative flytning,  $\delta$ , bliver det indre arbejde ved den viste brudfigur:

$$w_I = \int_0^h \frac{1}{2} \delta b \sigma_c (\lambda - \mu \sin \alpha) \frac{dx}{\cos \alpha} \quad \text{for } \operatorname{tg} \varphi \leq \frac{a}{h} \text{ og } \operatorname{tg} \varphi \leq \operatorname{tg} \alpha$$

Dersom  $\operatorname{tg} \varphi > \frac{a}{h}$  anvendes (a) fra afsnit 2.1 til beregning af det indre arbejde, så løsningen for disse værdier af  $\frac{a}{h}$  bliver den tidligere fundne i afsnit 1.2, hvor der ikke blev taget hensyn til trækstyrken.

Det ydre arbejde er

$$w_E = \delta V$$

så bæreevnen er bestemt ved

$$V = \frac{1}{2} b \sigma_c \int_0^h (\lambda \sqrt{1 + (r')^2} - \mu r') dx \quad \operatorname{tg} \varphi \leq \frac{a}{h} \text{ og } \operatorname{tg} \varphi \leq r'$$

idet  $\operatorname{tg} \alpha = r' = \frac{dr}{dx}$ .

Bestemmelse af den optimale brudlinieform er et simpelt variationsproblem, og Eulerligningen hertil lyder:

$$\frac{d}{dx} \left( \lambda \frac{r'}{\sqrt{1 + (r')^2}} - \mu \right) = 0$$

Løsningen til denne differentiaalligning er

$$r' = c$$

hvor  $c$  er en arbitrær konstant. Dette betyder, at den optimale brudlinie er en ret linie, og ved indsættelse af  $r' = c$  i bæreevneudtrykket fås:

$$V = \frac{1}{2} b h \sigma_c (\lambda \sqrt{1 + c^2} - \mu c)$$

$$\operatorname{tg} \varphi \leq \frac{a}{h} \text{ og } \operatorname{tg} \varphi \leq c$$

Minimum af dette udtryk findes for

$$c = \frac{\mu}{\sqrt{\lambda^2 - \mu^2}}$$

der dog kun er en løsning, hvis

$$\operatorname{tg} \varphi \leq c \leq \frac{a}{h}$$

Disse grænser benyttes ved indsættelse af den optimerede værdi af  $c$  i bæreevneudtrykket, som sammen med løsningen fra afsnit 1.2 for  $\operatorname{tg} \varphi \geq \frac{a}{h}$  i alt kommer til at lyde

$$\frac{\tau}{\sigma_c} = \frac{1}{2} \left( \sqrt{1 + \left(\frac{a}{h}\right)^2} - \frac{a}{h} \right) \quad \text{for } \frac{a}{h} \leq \operatorname{tg} \varphi$$

$$\text{for } \frac{a}{h} \leq \operatorname{tg} \varphi$$

$$\frac{\tau}{\sigma_c} = \frac{1}{2} \left( \lambda \sqrt{1 + \left(\frac{a}{h}\right)^2} - \mu \frac{a}{h} \right) \quad \text{for } \operatorname{tg} \varphi \leq \frac{a}{h} \leq \frac{\mu}{\sqrt{\lambda^2 - \mu^2}}$$

$$\text{for } \operatorname{tg} \varphi \leq \frac{a}{h} \leq \frac{\mu}{\sqrt{\lambda^2 - \mu^2}}$$

$$\frac{\tau}{\sigma_c} = \frac{1}{2} \sqrt{\lambda^2 - \mu^2} \quad \text{for } \operatorname{tg} \varphi \leq \frac{\mu}{\sqrt{\lambda^2 - \mu^2}} \leq \frac{a}{h}$$

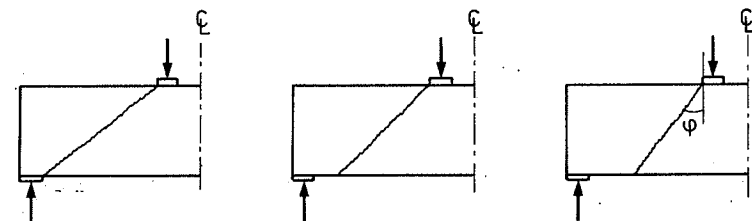
$$\text{for } \operatorname{tg} \varphi \leq \frac{\mu}{\sqrt{\lambda^2 - \mu^2}} \leq \frac{a}{h}$$

$$\frac{\tau}{\sigma_c} = \frac{1}{2} \left( \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi} - \operatorname{tg} \varphi \right) \quad \text{for } \frac{\mu}{\sqrt{\lambda^2 - \mu^2}} \leq \operatorname{tg} \varphi \leq \frac{a}{h}$$

$$\text{for } \frac{\mu}{\sqrt{\lambda^2 - \mu^2}} \leq \operatorname{tg} \varphi \leq \frac{a}{h}$$

Som det ses, er denne løsning identisk med nedreværdiløsningen.

Ifølge ovenstående grænser bliver de forskellige brudliniefigurer som fremgående af figuren nedenfor.



$$\frac{a}{h} \leq \frac{\mu}{\sqrt{\lambda^2 - \mu^2}}$$

$$\operatorname{tg} \varphi \leq \frac{\mu}{\sqrt{\lambda^2 - \mu^2}} \leq \frac{a}{h}$$

$$\frac{\mu}{\sqrt{\lambda^2 - \mu^2}} \leq \operatorname{tg} \varphi \leq \frac{a}{h}$$

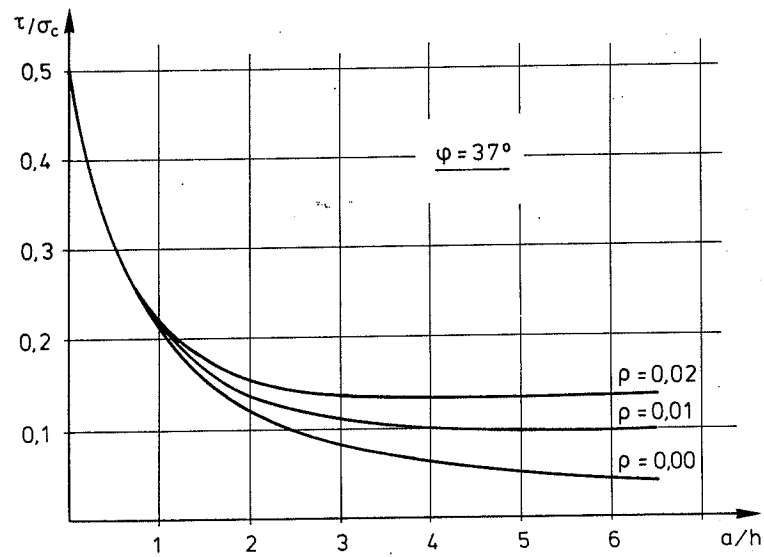
Figur 22: Eksempler på brudfigurens geometri.



I fig. 23 er den fundne løsning afbildet grafisk, idet der som almindeligt ved betonberegninger anvendes

$$\varphi = 37^\circ$$

Af figuren fremgår det, hvorledes bæreevnen bliver konstant ved store værdier af  $\frac{a}{h}$ , når trækstyrken medregnes under bæreevnebestemmelsen.



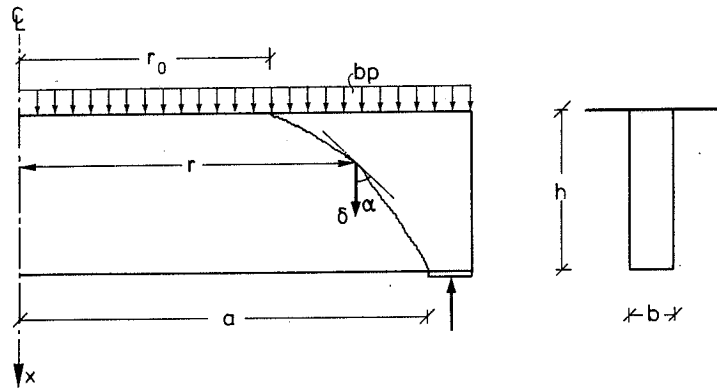
Figur 23: Bæreevnenes variation med trækstyrken og forskydnings-spændvidden.

### 2.3 Koncentreret last på rektangulær bjælke uden forskydningsarmering

Øvre værdiløsningen for stringerbjælken fra afsnit 2.2 er naturligvis også en øvre værdiløsning for den rektangulære bjælke.

Nedreværdiløsningen kan derimod ikke overføres til den rektangulære bjælke, så for denne bjælketype kan det ikke forventes, at den ovenfor nævnte øvre værdiløsning bestemmer den plasticitetsteoretisk set eksakte bæreevne, således som det er tilfældet ved stringerbjælken.

2.4 Øvre værdiløsning for jævnt fordelt last på stringerbjælke uden forskydningsarmering



Figur 24: Brudmekanisme ved jævn belastet stringerbjælke.

Der regnes igen med tilstrækkelig langsgående armering til at sikre en lodret bevægelse, og beregnes det indre arbejde af (b), side 33, leder brug af arbejdsligningen frem til bæreevneudtrykket:

$$p = \frac{1}{r_0} \frac{\sigma_c}{c} h \int_0^a (\lambda \sqrt{1 + (r')^2} - \mu r') dx$$

der kræver, at  $r' \geq \operatorname{tg} \varphi$ . Bestemmelse af brudlinieformen sker som ved enkeltkraften ved løsning af Eulerligningen, der også her har løsningen:

$$r' = c$$

hvor  $c$  er en arbitrær konstant. Vi kan herefter skrive

$$r_0 = a - hc$$

Bæreevneudtrykket kan nu med  $\tau = \frac{p a}{h}$  omskrives til

$$\frac{\tau}{\sigma_c} = \frac{\frac{1}{2} \frac{a}{h}}{\frac{a}{h} - c} (\lambda \sqrt{1 + c^2} - \mu c)$$

Differentieres dette udtryk med hensyn til  $c$ , findes minimum når

$$c = \frac{1}{\lambda^2 - \mu^2} \left( \mu \sqrt{\lambda^2 \left(\frac{h}{a}\right)^2 + \lambda^2 - \mu^2} - \frac{h}{a} \right) \quad \text{for } \mu \neq \lambda \quad (\sim \rho \neq 0)$$

$$c = \frac{a^2 - h^2}{2ah} \quad \text{for } \mu = \lambda \quad (\sim \rho = 0)$$

Såfremt  $c \leq \operatorname{tg} \varphi$ , skal  $\operatorname{tg} \varphi$  indsættes i stedet for  $c$  i bæreevneudtrykket. Ved små spændvidder, det vil sige for  $a/h < \sqrt{k}$ , løber den farligste brudlinie under en vinkel  $\alpha < \varphi$ , hvilket betyder, at dissipationen i betonen skal udregnes efter (a), side 33, således at bæreevnen i dette område bestemmes af den tidligere fundne formel fra afsnit 1.3.3, hvor trækstyrken er negligeret.

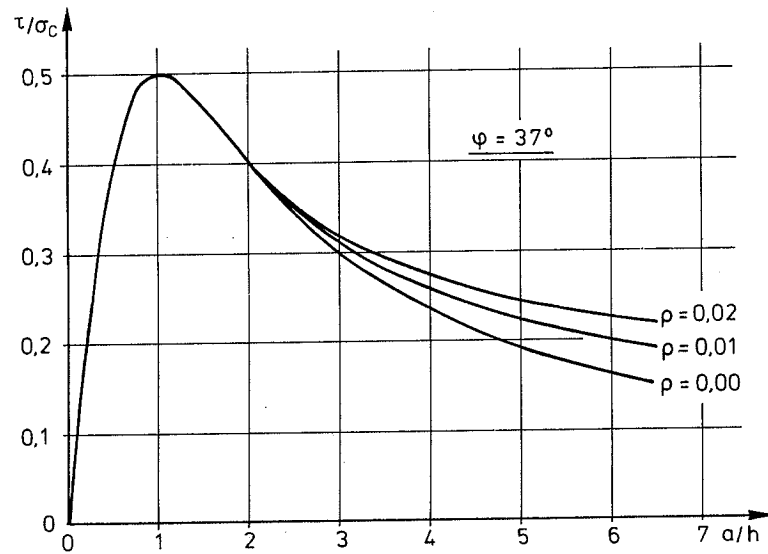
Endvidere skal det nævnes, at for  $\rho > 0$  bliver  $a/h > \sqrt{k}$ , når  $c \geq \operatorname{tg} \varphi$ , og at  $c = \operatorname{tg} \varphi$  netop svarer til at  $a/h = \sqrt{k}$ , når  $\rho = 0$ .

Det komplette formelsæt til bestemmelse af bæreevnen kan herefter opskrives:

$$\frac{\tau}{\sigma_c} = \frac{\frac{a}{h}}{\left(\frac{a}{h}\right)^2 + 1} \quad \text{for } \frac{a}{h} \leq \sqrt{k}$$

$$\frac{\tau}{\sigma_c} = \frac{\frac{1}{2} \frac{a}{h}}{\frac{a}{h} - \operatorname{tg} \varphi} (\lambda \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi} - \mu \operatorname{tg} \varphi) \quad \text{for } \frac{a}{h} \geq \sqrt{k} \text{ og } \operatorname{tg} \varphi \geq c$$

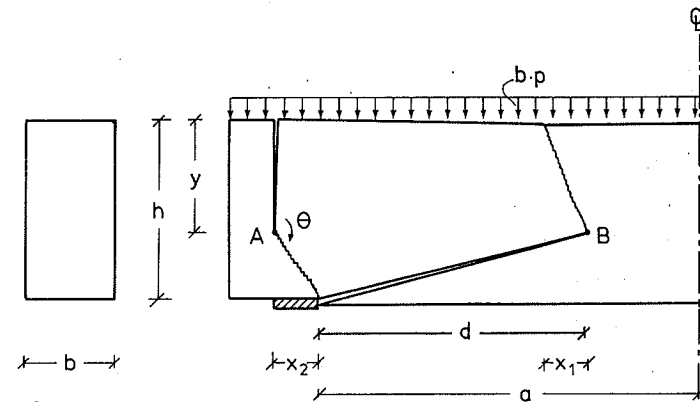
$$\frac{\tau}{\sigma_c} = \frac{\frac{1}{2} \frac{a}{h}}{\frac{a}{h} - c} (\lambda \sqrt{1 + c^2} - \mu c) \quad \text{for } c \geq \operatorname{tg} \varphi$$



Figur 25: Bæreevnens variation med trækstyrken og forskydnings-spændvidden.

Sammenlignes ovenstående figur med fig. 23, ses at trækstyrkens betydning for bæreevnen er relativt mindre ved jævn belastning end ved koncentreret last.

2.5 Øvre værdiløsning for jævnt fordelt last på rektangulær bjælke uden forskydningsarmering



Figur 26: Brudmekanisme brugt ved øvre værdiløsning.

Den her benyttede brudmekanisme er ganske analog til den i afsnit 1.3.2 anvendte, idet punkterne A og B virker som hængsler, og en del af bjælken drejes om punkt A. Som det fremgår af fig. 26 er bevægelsen af bjælkens midterdel en ren translation. Denne translation bliver lodret, når den langsgående armering er så stærk, at der ikke opstår flydning heri, og under denne forudsætning bliver det indre arbejde:

$$w_I = \int_0^y \sqrt{x_1^2 + y^2} \sigma_c \theta dt + \int_0^{\sqrt{(h-y)^2 + d^2}} \rho \sigma_c \theta dt + \int_0^{\sqrt{x_2^2 + (h-y)^2}} \sigma_c \theta dt + \int_0^y \rho \sigma_c \theta dt$$

medens det ydre arbejde bliver

$$w_E = \frac{1}{2}(d + x_2 - x_1)^2 \theta p + (d + x_2)(a - d + x_1) \theta p$$

Anvendes arbejds-ligningen og optimeres det fundne bæreevneudtryk, findes minimum når

$$y = \frac{1}{2} h$$

$$x_1 = 0$$

hvilket med

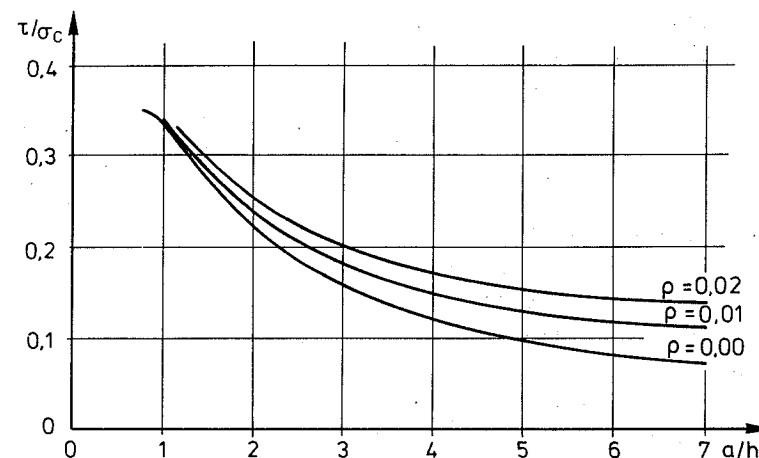
$$\tau = \frac{p \cdot a}{h}$$

leder frem til bæreevnen

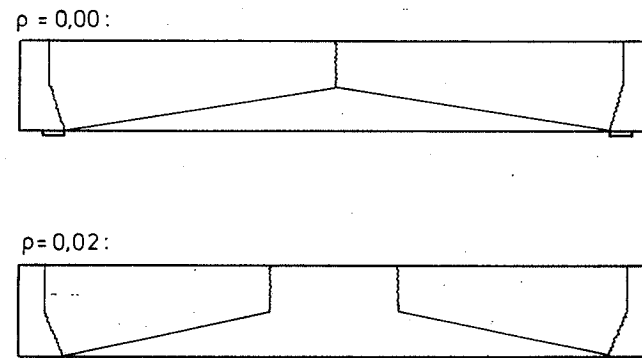
$$\frac{\tau}{\sigma_c} = \frac{x_2^2 + \rho d^2 + \frac{1}{2}(1 + \rho)h^2}{(d + x_2)^2 + 2(d + x_2)(a - d)} \cdot \frac{a}{h}$$

Det er her valgt at optimere parametrene  $x_2$  og  $d$  ad numerisk vej. Resultaterne er illustreret grafisk på fig. 27 og 28.

Af fig. 28 er det interessant at bemærke, hvorledes betontykningsbruddet i bjælketoppen flytter ud mod understøtningen, når trækstyrken tages med i regning.



Figur 27: Bæreevns variation med trækstyrken og forskydnings-spændvidden.



Figur 28: Eksempel på brudfigurens geometri ved  $a/h = 3$ .

## AFSLUTNING

I indledningen blev det nævnt, at denne rapport blandt andet indeholder nogle væsentlige tilføjelser til tidligere kendte løsninger. For eksempel kan det nu også forklares nedrevdimæssigt, hvorledes den såkaldte buevirkning kan opstå i bjælker med små mængder af forskydningsarmering. Dette betyder, at den udviklede teori på visse punkter bekræfter det empirisk udviklede additionsprincip.

Et andet interessant punkt er forholdene ved en rektangulær bjælke med jævnt fordelt last. Det viser sig her, at bruddet er en art bøjningsbrud, hvor trykbruddet i bjælketoppen, når betonen tillægges en iøvrigt minimal trækstyrke, er beliggende mellem bjælkemidte og understøtning, og hvor der dannes en trækrevne fra understøtningen og op til det nævnte trykbrud. Ses der bort fra trækstyrken vil trykbruddet opstå midt på bjælken. Dannelsen af trækrevnen forklarer, at der kan opnås en vis bæreevneforøgelse ved armering med bøjler, men udover at sikre et sejt brud er gevinsten herved generelt lille, eftersom bøjningsbæreevnen i forvejen praktisk talt er udtømt.

Anvendelse af den ovennævnte bøjningsbrudmekanisme har yderligere en spændende konsekvens for rektangulære, ikke-forskydningsarmerede bjælker, hvadenten de er påvirket af jævnt fordelt eller koncentreret last. Antager man nemlig som vanligt ved den plastiske bæreevneanalyse, at betonen ikke kan optage trækspændinger, viser mekanismen, at for disse bjælker kan man aldrig udnytte mere end halvdelen af bjælkehøjden som trykzone ved momentoptagelsen.

Løsningerne med betonens trækstyrke indregnet findes i rapportens sidste del, og det er her kun bjælker uden bøjlearmering, der betragtes, eftersom trækstyrkens indflydelse bliver forsvindende for bjælker med selv små mængder forskydningsarmering. Det er værd at hæfte sig ved de ganske lave værdier af trækstyrken, der skal tages i regning, typisk i størrelsesordenen én til to procent af trykstyrken. I overensstemmelse med erfaringerne fra forsøg, se [78.2], findes ved disse gennemregninger blandt andet, at forskydningsbæreevnen af en ikke-forskydningsarmeret bjælke udsat for konstant forskydningskraft over et fag bliver uafhængig af fagets spændvidde, når denne når over en vis grænse. Ydermere leder øvre-værdiløsningerne ved optimeringen frem til brudmekanismer, der

stemmer bedre med observationerne fra forsøg, når der tages hensyn til betonens trækstyrke.

Ved diskussion af løsningerne må opmærksomheden henledes på de antagelser, der har ligget til grund for udledningen. Et grundlæggende punkt er betragtningen af materialerne som værende stift, idealt plastiske, og i sammenhæng hermed valget af flydebetingelse med tilhørende flydelov. Foruden materialeantagelserne, som jo blandt andet betyder, at der ikke kan skelnes mellem forspændte og ikke-forspændte bjælker, skal forudsætningen om plan spændingstilstand i bjælken fremhæves. Denne forudsætning kan eksempelvis ikke forventes opfyldt omkring den indstøbte armering. Videre er armeringen ikke tillagt nogen forskydningsstyrke vinkelret på sin længdeakse, hvorved en eventuel dornvirkning lades ude af betragtning, og endelig er der ved behandlingen af stringerbjælkerne set bort fra flangernes bidrag til forskydningsbæreevnen. Som følge af disse idealiseringer er det nødvendigt at foretage en empirisk korrektion af løsningerne, men de vil stadig formidle en vigtig forståelse for det grundlæggende i bjælkernes virkemåde.

Selv om rapporten indeholder mange løsninger, er den teoretiske undersøgelse af jernbetonbjælker langt fra fuldført. Væsentlige problemer så som forholdene ved lastplade og understøtning i forskydningsarmerede bjælker, kombinerede belastninger og længdearmeringens indflydelse ved de forskydningsarmerede bjælker savner stadig afklaring. I relation til nogle af de gjorte tilnærmelser mangler der også en undersøgelse af eventuelle flangers betydning, længdearmeringens dornvirkning og hvilken indflydelse afvigelser i spændingstilstanden fra den forudsatte vil have på de fundne løsninger. Således kan det nævnes, at ved forholdsvis brede bjælker kan forholdene i betonen nærme sig til en plan deformationstilstand, hvorved de meget korte bjælkens bæreevne kan blive langt større end hvad der findes ud fra den plane spændingstilstand. Tilsvarende forhold kan gøre sig gældende ved bjælker med ekstrem kraftig forskydningsarmering bestående af lukkede bøjler, således at bæreevnen også her øges ud over det ellers forventede, når bøjlearmeringen øges.

LITTERATUR

- [78.1] Nielsen, M.P., M.W.Bræstrup, B.C.Jensen & F.Bach:  
Concrete Plasticity.  
Dansk Selskab for Bygningsstatik  
Specialpublikation, Lyngby 1978.
- [78.2] Roikjær, M., M.P.Nielsen, M.W.Bræstrup & F.Bach:  
Forskydningsbæreevnen af ikke-forskydningsarmerede  
bjælker.  
Afdelingen for Bærende Konstruktioner.  
Danmarks tekniske Højskole, København 1978.

AFDELINGEN FOR BÆRENDE KONSTRUKTIONER  
DANMARKS TEKNISKE HØJSKOLE

Structural Research Laboratory  
Technical University of Denmark, DK-2800 Lyngby

RAPPORTER (Reports)

(1975 - )

- R 61. NIELSEN, LEIF OTTO: Spændingshybride finite elementer til svingningsproblemer. 1975.
- R 62. EGERUP, ARNE RYDÉN: Theoretical and experimental determination of the stiffness and ultimate load of timber trusses. 1975.
- R 63. LAURSEN, MARTIN: A curved beam equilibrium element applicable in standard finite element program systems. 1975.
- R 64. BACH, FINN: Metoder til måling af egenspændinger. 1975.
- R 65. BACH, FINN: En teoretisk og eksperimentel undersøgelse af den akustoelastiske metodes anvendelighed til egenspændingsmåling. 1975.
- R 66. PEDERSEN, FLEMMING BLIGAARD: Measurement of the complex modulus of viscoelastic materials. 1975.\*)
- R 67. PEDERSEN, FLEMMING BLIGAARD: Svingningsforsøg med viskoelastisk dæmpede sandwichbjælker. 1975.
- R 68. AGERSKOV, HENNING: Analysis of high strength bolted connections subject to prying. A simplified approach. 1975.
- R 69. PEDERSEN, MAX ELGAARD: En 2.ordens tilnærmelse til de konstitutive ligninger for beton. 1976.
- R 70. RIBERHOLT, HILMER and PETER CHR. NIELSEN: Timber under combined compression and bending stress. 1976.
- R 71. KRENCHER, HERBERT og J. BJØRNBAK-HANSEN: Undersøgelse af let konstruktionsbetons væsentligste materialemparametre. 1976.
- R 72. BRÆSTRUP, M.W., M.P. NIELSEN, FINN BACH and B.CHR. JENSEN: Shear tests on reinforced concrete T-beams. Series T. 1976.
- R 73. NIELSEN, M.P. and M.W. BRÆSTRUP: Plastic shear strength of reinforced concrete beams. 1976.
- R 74. Resume-oversigt 1975. Summaries of papers 1975. 1976.\*)
- R 75. BRÆSTRUP, M.W., M.P. NIELSEN, B.CHR. JENSEN and FINN BACH: Axisymmetric punching of plain and reinforced concrete. 1976.
- R 76. BRØNDUM-NIELSEN, TROELS: Partial prestressing. 1976.
- R 77. LAURSEN, M.E.: EQSHELL. An equilibrium shell finite element for arbitrary shell geometry. 1977.
- R 78. DYRBYE, CLÆS and FLEMMING BLIGAARD PEDERSEN: Rubber mountings and vibration isolation. 1977.
- R 79. BRÆSTRUP, M.W., M.P. NIELSEN and FINN BACH: Rational analysis and design of stirrups in reinforced concrete beams. 1977.
- R 80. ABK's informationsdag 1977. 1977.
- R 81. Resumeoversigt 1976. Summaries of papers 1976. 1977.
- R 82. MØLLMANN, H.: Static and dynamic analysis of plane cable structures. 1977.
- R 83. RIBERHOLT, H.: Bolte indlimet i limtræ. 1977.
- R 84. AGERSKOV, H. and J. BJØRNBAK-HANSEN: Fatigue strength of welded connections in round bar steel structures. 1977.
- R 85. LAURSEN, M.E., M.P. NIELSEN and M.ROIKJØR: Stability analysis of beams and arches by energy methods. 1977.
- R 86. LAURSEN, M.E.: Derivation of symmetric integration formulas for triangles. 1977.
- R 87. LAURSEN, M.E.: Stability and vibration analysis of plane curved beams by an equilibrium finite element method. 1977.
- R 88. PEDERSEN, FLEMMING BLIGAARD: Vibration analysis of viscoelastically damped sandwich structures. 1978.
- R 89. BRØNDUM-NIELSEN, TROELS: Epoxy resin repair of cracked concrete beams. 1978.
- R 90. HESS, UWE, B.CHR. JENSEN, M.W. BRÆSTRUP, M.P. NIELSEN og FINN BACH: Gennemlokning af jernbetonplader. 1978.
- R 91. HANSEN, KARL ERIK, KAJ L. BRYDER og M.P. NIELSEN: Armeringsbestemmelse i jernbetonskaller. 1978.
- R 92. ASKEGAARD, V.: Stress and strain measurements in solid materials. 1978.
- R 93. SCHMIDT, HENRIK: Udbredelse af akustisk emission i beton. 1978.
- R 94. BYSKOV, ESBEN og STEEN KRENK: Konstruktionstræs mekaniske styrke. 1978.
- R 95. Resumeoversigt 1977. Summaries of papers 1977. 1978.
- R 96. DYRBYE, CLÆS: Admittance-curves. ZILSTORFF, ANNE and CLÆS DYRBYE: Admittance of bars. 1978.
- R 97. DYRBYE, CLÆS: Dynamic systems with sinusoidal mode shapes. 1978.
- R 98. ANDRESEN, CLÆS: Bjælker og søjler med åbne, tyndvæggede tværnsnit. 1978.
- R 99. RIBERHOLT, H.: Eingeleimte Gewindestangen. 1978.
- R100. PEDERSEN, C.: Opbøjjet længdearmring som forskydningsarmring. 1978.
- R101. JENSEN, J.F., M.W. BRÆSTRUP, F. BACH og M.P. NIELSEN: Nogle plasticitetsteoretiske bjælkeløsninger. 1978.
- R102. JENSEN, J.F., C. PEDERSEN, M.W. BRÆSTRUP, F. BACH og M.P. NIELSEN: Rapport over forskydningsforsøg med 6 spændbetonbjælker. 1978.
- R103. JENSEN, J.F., V. JENSEN, H.H. CHRISTENSEN, F. BACH, M.W. BRÆSTRUP and M.P. NIELSEN: On the behaviour of cracked reinforced concrete beams in the elastic range. 1978.

\*) Udsolgt. Out of print.

Abonnement 1.7.1978 - 1.7.1979 inden for Danmark kr. 40.

Subscription rate 1.7.1978 - 1.7.1979 D.Kr. 60.-.