

BÆRENDE KONSTRUKTIONER

DANMARKS TEKNISKE HØJSKOLE



STRUCTURAL RESEARCH LABORATORY
TECHNICAL UNIVERSITY OF DENMARK

Max Elgaard Pedersen

KIPSTABILITET

AF ARMEREDE BETONBJÆLKER

RAPPORT NR. R 116 1980

KIPSTABILITET

AF ARMEREDE BETONBJÆLKER

Max Elgaard Pedersen

ABK 1979

FORORD

Denne rapport behandler kipstabilitetsproblemet for betonbjælker under hensyntagen til betonens specielle materialeegenskaber og er udarbejdet som et led i betingelserne for erhvervelsen af den tekniske licentiatgrad.

Studiet er udført på Afdelingen for Bærende Konstruktioner, Danmarks tekniske Højskole, med professor, dr. techn. Troels Brøndum-Nielsen som faglærer.

For konstruktiv kritik og bistand takkes min faglærer og professor Bent Erik Pedersen, samt en række af Afdelingens øvrige medarbejdere.

En tak skal endvidere gives til assistent Annette Bærentzen for hendes omhyggelige maskinskrivning af manuskriptet, til teknisk assistent Ulla Madsen for hendes nydelige tegninger, samt til Cowiconsult, Rådgivende Ingeniører AS, for velvillig assistance under færdiggørelsen af rapporten.

Nærum, marts 1979

Max Elgaard Pedersen

RESUMÉ

Denne rapport behandler teoretiske undersøgelser af stabiliteten, specielt kipstabiliteten, af betonbjælker. Undersøgelsen har medtaget de indvirkninger på kipstabiliteten, som betinges af betonens specielle materialeegenskaber: ringe trækstyrke med heraf følgende revnedannelse, krum arbejdslinie og krybning.

I kapitel 2 gives en historisk oversigt over de arbejder, der er udført med henblik på teoretiske og eksperimentelle undersøgelser af kipstabilitet af betonbjælker.

Herefter gives en generel beskrivelse af stabilitetssvigt og stabilitetskriterier, samt en indplacering af initialstabilitetsteorien, som anvendes i denne rapport, i den generelle stabilitetsteori.

Kapitel 4 behandler den matematiske formulering af stabilitetsproblemet ved anvendelse af energikriteriet, medens kapitel 5 beskriver de forskellige bjækestabilitetsproblemer: søjlestabilitet, vridningsstabilitet og kipstabilitet.

I kapitel 6 omtales randbetingelser, beregning af tværsnitskonstanter og forskydningscenter, samt opstilling og løsning af stabilitets-eigenværdiproblemet.

I kapitel 7 sammenlignes beregningsmetodens resultater med forsøgsresultater. Endvidere gennemgås en række beregningseksempler, hvor forskellige arbejdskurver, randbetingelser og belastninger er anvendt. Effekten af forspænding og medtagning af hvælvningsstivheden i beregningerne er ligeledes undersøgt i kapitel 7.

INDHOLDSFORTEGNELSE

Resumé

Indholdsfortegnelse

Symbolliste

1. Indledning	1
2. Historisk oversigt	3
3. Stabilitet	7
3.1 Perfekte, linearelastiske systemer	7
3.2 Imperfekte, linearelastiske systemer	9
3.3 Systemer med elastisk-plastiske materialeegenskaber .	10
4. Den matematiske formulering af stabilitetsproblemet ved anvendelse af energikriteriet	13
4.1 Simpel energifunktional	13
4.2 $\delta^2\Pi_P$ for et isotropt, hyperelastisk materiale	16
4.3 Simplifikation af stabilitetsfunktionalen	20
4.4 Stabilitetsligninger og randbetingelser	32
5. Bjælkestabilitetsproblemer	37
5.1 Søjlestabilitet	37
5.2 Vridningsstabilitet	38
5.3 Kipstabilitet	41
6. Løsning af kipstabilitetsproblemet	43
6.1 Randbetingelser	43
6.2 Tværsnitskonstanter og forskydningscenter	48
6.2.1 Hvælningsfunktionen	49
6.2.2 Forskydningscentrets placering	52
6.2.3 Simplificeret beregning af tværsnitskonstanter og forskydningscenter	55
6.3 Egenværdiproblemet	62
6.4 Numerisk løsning af stabilitetsegenværdiproblemet ...	64
7. Beregningseksempler	67
7.1 Beregningsmetodens sammenligning med forsøgs- resultater	67
7.2 Parametervariation	70
8. Konklusion	79
Litteraturfortegnelse	82
Appendix A	
Første og anden variation af Lagrange's tøjningstensor udtrykt ved de virtuelle flytninger	A1

SYMBOLLISTE

Notation	Definition	Figur	Udtryk	Side
A	Tværsnitsareal		5.8	39
$\underline{A}, \underline{B}$	$\underline{K} = \underline{A} - \lambda \underline{B}$		4.15	16
A_i	Tøjningsenergi		4.18	16
A_y	Ydre arbejde		4.19	16
E	$E = E(z)$. Sekant-elasticitetsmodul		6.36	52
E_c	Elasticitetsmodul for beton	7.3		71
E_{sec}	Sekantelasticitetsmodul		4.67	25
E_t	Tangentelasticitetsmodul		4.50	22
EI	$(E_t I)_z$		6.74	62
$(EI)_i$	Den mindste af deltversnit i 's bøjningsstivheder om deltversnittets tyngdepunktsakser		6.66	60
$(EI)_{yO}$	Overflangens bøjningsstivhed om overflangens vandrette tyngdepunktsakse		6.67	60
$(EI)_{yU}$	Underflangens bøjningsstivhed om underflangens vandrette tyngdepunktsakse		6.67	60
$(EI)_z$	Sekantbøjningsstivhed om y -aksen		6.39	53
$(EI)_{zK}$	Bidrag fra kroppen til bøjningsstivheden om z -aksen		6.62	59
$(EI)_{zO}$	Bidrag fra overflangen til bøjningsstivheden om z -aksen		6.62	59
$(EI)_{zU}$	Bidrag fra underflangen til bøjningsstivheden om z -aksen		6.62	59

Notation	Definition	Figur	Udtryk	Side
EI_{φ}	$EI_{\varphi} = (E_t I)_{\varphi}$		5.7	39
$(E_t A)$	Tangentnormalstivhed		4.56	23
$(E_t I)_y$	Tangentbøjningsstivhed om z-aksen		4.57 b	23
$(E_t I)_z$	Tangentbøjningsstivhed om y-aksen		4.57 a	23
$(E_t I)_{\varphi}$	Tangenthvelvningsstivhed		4.58	23
GI_v	$GI_v = (G_{sec} I_v)$		4.75	27
G_{sec}	Sekantforskydningsmodul		4.67	25
$(G_{sec} I_v)$	Vridningsstivhed		4.71	25
$(G_{sec} I_v)_i$	Vridningsstivhed for del-tværsnit i		6.63	59
$G(z)$	$G(z) = G_{sec}(z)$		6.19	49
H	Afstand fra ophængningspunkt til koordinatsystemets begyndelsespunkt		6.17	48
H_w	Lodret wirelængde	6.3		46
I	Inertimoment		4.57	23
\underline{I}	Enhedsmatrix		6.87	65
$I(\underline{u})$	Energifunktional		4.1	13
I_{PF}	Polært inertimoment om forskydningscentret		5.8	39
I_z	Inertimoment om z-aksen	6.4	6.35	52
K	Vandret tværkraft	6.4		52
\underline{K}	Stivhedsmatrix		4.1	13
L	Bjælkelængde		7.1	74
\underline{L}	Choleski trekantmatrix		6.86	65
M_{kip}	Kipmoment	7.3		71
M_q	Moment fra tværbelastning uafhængig af λ		6.75	62

Notation	Definition	Figur	Udtryk	Side
$M_{q\lambda}$	Moment fra tværbelastning afhængig af λ		6.75	62
M_{Q_y}	Sum af moment fra tværbelastning i y-retningen og konstant moment om z-aksen		4.81	29
M_{Q_z}	Sum af moment fra tværbelastning i z-retningen og konstant moment om y-aksen		4.80	29
M_y	Moment om y-aksen		4.62	24
M_z	Moment om z-aksen		4.63	24
M_o	Konstant moment uafhængig af λ		6.75	62
$M_{o\lambda}$	Konstant moment afhængig af λ		6.75	62
P	Normalkraft		4.61	24
P	Sum af virkende normalkræfter uafhængig af λ		6.76	63
P	Koncentreret kraft	7.1		67
P_{kr}	Kritisk normalkraft		4.90	30
P_{tot}	Sum af virkende normalkræfter		6.76	63
P_λ	Størrelse som multipliceret med λ giver sum af normalkræfter afhængig af λ		6.76	63
Q_y, Q_z	Forskydningskræfter i y- og z-retningerne		4.77, 4.78	28
R	Lodret wirereaktion	6.3		46
R	Lodret wirereaktion uafhængig af λ		6.83	64
R_{tot}	Total lodret wirereaktion		6.83	64
R_o, R_L	Lodrette wirereaktioner	6.2		45

Notation	Definition	Figur	Udtryk	Side
R_λ	Lodret wirereaktion afhængig af λ		6.83	64
S	Wirereaktion	7.2		72
V	Wirereaktionens bidrag til det virtuelle tilbageførings- moment		6.15	47
v	Torsionsmoment		6.63	59
v_i	Torsionsmoment fra deltværsnit i		6.63	59
$W(\epsilon_{ij})$	Tøjningsenergi pr. volumenenhed		4.18	16
a_i, b_j, c_k	Parametre		4.91-4.93	31
a_p	Afstand fra P's angrebspunkt til forskydningscentret		6.77	63
$a_{p\lambda}$	Afstand fra P_λ 's angrebs- punkt til forskydningscentret		6.77	63
a_q	Afstand fra q's angrebspunkt til forskydningscentret		6.79	63
$a_{q\lambda}$	Afstand fra q_λ 's angrebs- punkt til forskydningscentret		6.79	63
a_R	z-koordinat for angrebspunktet til den del af Q_z , som er uaf- hængig af λ		6.84	64
$a_{R_{tot}}$	z-koordinat for angrebspunktet til Q_z i tværsnittet umiddel- bart indenfor wireangrebs- punktet		6.84	64
$a_{R\lambda}$	z-koordinat for angrebspunktet til den del af Q_z , som er afhængig af λ		6.84	64
a_y	y-koordinat for Q_y 's angrebs- punkt		4.84	29

Notation	Definition	Figur	Udtryk	Side
a_z	z-koordinat for Q_z 's angrebspunkt		4.85	29
b	Flangebredde		7.5	76
d	Afstand mellem flangernes tyngdepunkter		6.72	61
da	Infinitesimalt areal		4.19	16
dv	Infinitesimalt volumen		4.18	16
\underline{f}	Belastningsvektor		4.1	13
h	Afstand fra forskydningscenter til ophængningspunkt	6.3	6.12	46,47
h	Tværsnitshøjde	7.5		76
k	Dimensionsløs fjederkonstant		7.2	74
l	Bjælkelængde	4.3		30
l	Tværsnitshøjde		6.54,6.55	56
m	Kiplastparameter		7.1	74
n_j	Fladenormalenhedsvektor		4.27	18
p^i	Overfladekraft pr. arealenhed		4.19	16
q	Tværbelastning pr. længdeenhed uafhængig af λ		6.79	63
q_y, q_z	Tværbelastning pr. længdeenhed		4.98	33
q_λ	Tværbelastning pr. længdeenhed afhængig af λ		6.79	63
t	Tværsnitbredde		6.51	55
u	Forskydningscentrets flytning i y-retningen	4.1	4.39,4.40	20
\underline{u}	Knudflytningsvektor		4.1	13
u_i	Flytningsvektor		4.19	16
u_x, u_y, u_z	Flytninger		4.39-4.41	20

Notation	Definition	Figur	Udtryk	Side
u_0	Maksimaludbøjning	4.3	4.86	29,30
\underline{u}_0	Knudeflytningsvektor svarende til ligevægtstilstanden		4.3	13
u_{0i}	Flytningsvektor svarende til ligevægtstilstanden		4.33	19
v	Forskydningscentrets flytning i z-retningen	4.1	4.39,4.41	20
v	Kabelhældningsvinkel	7.2		72
\underline{v}	Virtuel flytningsvektor		4.4	13
v_i	Virtuel flytningsvektor		4.33	19
w	Flytningen af koordinatsystemets origo ved hvalvningens frit tværsnit	4.1	4.39	20
w_F	Forskydningscentrets flytning ud af tværsnittets plan	4.1	4.39 b	20,21
w_i	Virtuel flytningsvektor		4.33	19
x	Koordinat langs bjælkeaksen		4.52	23
y, z	Koordinater i tværsnittets plan	4.1	4.39-4.41	20
y_F, z_F	Koordinater til forskydningscentret		4.40,4.41	20
y_P, z_P	Koordinater til P's angrebspunkt		4.80,4.81	29
$z_{P\lambda}$	Z-koordinat til P_λ 's angrebspunkt		6.77	63
z_{TK}	Bjælke kroppens elastiske tyngdepunkt		6.62	59
z_{TO}	Overflangens elastiske tyngdepunkt		6.62	59
z_{TU}	Underflangens elastiske tyngdepunkt		6.62	59

Notation	Definition	Figur	Udtryk	Side
δ	Første variation		4.5	14
δ^2	Anden variation		4.5	14
ϵ	Arbitrær skalar		4.4, 4.33	13, 19
ϵ	$\epsilon = \epsilon_x$		4.48	22
ϵ_{ij}	Tøjningstensor		4.22	17
ϵ_ℓ	$\epsilon_\ell = (\epsilon_x)_\ell$. Normaltøjning svarende til ligevægts-tilstanden		4.48	22
ϵ_x	Normaltøjning		4.42	21
$\epsilon_{xy}, \epsilon_{xz}$	Forskydningstøjninger		4.44, 4.45	21
$(\epsilon_{xy})_\ell, (\epsilon_{xz})_\ell$	Forskydningstøjninger svarende til ligevægtstilstanden		4.48	22
ϵ_y, ϵ_z	Normaltøjninger		4.43	21
ϵ_{yz}	Forskydningstøjning		4.43	21
η	Korrektionsfaktor		6.54, 6.55	56
η_i	Korrektionsfaktor for deltværnsnit i		6.66	60
η_0, η_K, η_U	Korrektionsfaktorer for overflange, krop og underflange		6.67	60
θ	Vridningsvinkel	4.1	4.39-4.41	20
λ	Belastningsfaktor (egenværdi)		4.15, 6.75	16, 62
ν	Poissons forhold		4.67	25
Π_P	Potentiel energi		4.20	17
ρf^i	Massekræfter pr. volumenenhed		4.19	16
σ	$\sigma = \sigma_x$		4.48	22
σ_C	Betonens trykbrudstyrke			71
σ_{ct}	Betonens trækbrudstyrke			71
σ_{ij}	Spændingstensor		4.22	17

Notation	Definiton	Figur	Udtryk	Side
(σI_{PF})	Polært inertimoment om forskydningscentret vægtet med normalspændingen		4.64	24
$(\sigma I)_z, (\sigma I)_y$	Inertimomenter om tværsnittets tyngdepunktsakser vægtet med normalspændingen		6.60	58
σ_{kr}	Kritisk spænding		5.14	41
σ_x	Normalspænding			22
σ_{xy}, σ_{xz}	Forskydningsspændinger	4.65, 4.66		24, 25
σ_y, σ_z	Normalspændinger		4.47	21
$\sigma_{yxB}, \sigma_{zxB}$	Bidrag til forskydnings-spændingerne fra bøjning		6.41	53
$\sigma_{yXT}, \sigma_{zXT}$	Bidrag til forskydnings-spændingerne fra torsion	6.42, 6.43		53
σ_{yz}	Forskydningsspænding		4.47	21
φ	Hvælvningsfunktion		4.39	20
ψ	Spændingsfunktion	6.29, 6.30		50

1. INDLEDNING

Beregning af betonbjælkens kipstabilitet er et område, som i de senere år er blevet mere og mere aktuelt på grund af udførelsen af stadig spinklere og slankere konstruktioner betinget af en bedre udnyttelse af materialerne, samt en stadig forbedring af disse materialer. Risiko for kipning er derfor i stigende grad et problem, som må tages i betragtning ved dimensionering af betonbjælker. Specielt i montagesituationen for slanke, præfabrikerede spændbetonbjælker, hvor disse kan være wireophængte eller provisorisk afstivede, er en undersøgelse af kipningen relevant, idet den større frihed, som understøtningsbetingelserne i disse tilfælde giver bjælken, forøger faren for kipning.

For bjælker med tyndfligede tværsnit og lineærelastiske materialegenskaber findes der udmærkede og rimeligt nøjagtige formler til beregning af kiplaster. Anvendes disse formler uden korrektioner til beregning af kiplaster for betonbjælker, fås værdier, som er alt for store og dermed på den usikre side. En mere nøjagtig beregning må derfor tage hensyn til betonens og armeringens specielle materialegenskaber, herunder krumme arbejdslinier, revnedannelse, svind, krybning og relaksation.

I litteraturen er angivet en lang række tilnærmelsesformler og beregningsmetoder, som for specielle belastningssituationer og understøtningsbetingelser tager hensyn til nogle af de nævnte materialeforhold for beton og armering. En kontrol af rimeligheden af de gjorte tilnærmelser og antagelser i disse formler kan foretages ved forsøg eller ved sammenligning med en mere nøjagtig beregningsmetode, idet stabilitetsforsøg er meget vanskelige at gennemføre.

En sådan beregningsmetode, hvor der tages hensyn til krumme arbejdslinier, revnedannelse, svind, krybning og relaksation, opstilles i denne rapport. Beregningerne kan gennemføres med meget generelle belastningsopstillinger for gaffeloplagte eller wireophængte bjælker.

Det har endvidere været hensigten at opstille en beregningsmetode,

som kan anvendes i specialtilfælde, hvor de tilnærmede metoder er uanvendelige.

2. HISTORISK OVERSIGT

Kipstabilitetsproblemet blev første gang behandlet i en afhandling fra 1899 af Prandtl [Prandtl.99-1], hvor han betragtede bjælker med smalle, rektangulære tværsnit af lineærelastisk materiale. Prandtl's teori blev af Timoshenko i 1910 udvidet til at gælde for dobbeltsymmetriske I-tværsnit [Timoshenko.10-1], inden Vlasov's hvælvingsteori [Vlasov.40-1] i 1940 gjorde det muligt at opstille kipstabilitetsligningerne helt generelt for tyndfligede bjælker af lineærelastisk materiale, se f.eks. [Timoshenko.61-1],[Kollbrunner.61-2] og [Bürgermeister.66-1].

For betonbjælker gælder forudsætningerne om tyndfligede tværsnit og lineærelastiske materialeegenskaber ikke, men da teorien for bjælker med disse egenskaber er rimeligt afklaret, er det naturligt, at de fleste arbejder vedrørende kipstabilitet af betonbjælker tager deres udgangspunkt i denne teori. De første arbejder sigtede imod at tilvejebringe simple og praktisk anvendelige kriterier for, under hvilke omstændigheder en betonbjælke kan antages sikker imod kipning. For at opfylde kravene til simpel udformning og praktisk anvendelighed af formlerne var man tvunget til at benytte ret grove tilnærmelser. Lebelle [Lebelle.59-1] betragter kun fuldt forspændte bjælker, hvorved han undgår problemerne i forbindelse med betonens revnedannelse, medens han kompenserer for betonens ikke-lineære materialeegenskaber ved at benytte en reduceret elasticitetsmodul, som afhænger af belastningens varighed, trykstyrken og spændingen i det betragtede tværsnits mest trykkede fibre. Tværsnitskonstanter gældende for hele bjælken beregnes for bjælkens hårdest påvirkede tværsnit. En summarisk beskrivelse af de væsentligste afsnit i Lebelle's arbejde er foretaget i [Muller.62-1]. Pettersson [Pettersson.60-1] ser ligeledes bort fra revnedannelsen og de ikke-lineære materialeegenskaber. Endvidere negligerer han elasticitetsmodulens afhængighed af belastningen, idet han benytter en reduceret E-modul, som kun afhænger af betonens trykstyrke. På grund af E-modulens uafhængighed af belastningen kan kiplasten bestemmes uden iteration, men til gengæld opnår han kun en skønsmæssig bestemmelse.

Samtidig med disse forsøg på ad teoretisk vej at tilvejebringe simple kiplastformler, foregik der en række eksperimentelle studier af problemet, se [Vasarhelyi.54-1],[Smith.58-1],[Hansell.59-2],[BRS.59-3],[Siev.60-2],[Podolny.61-3] og [Sant.61-4]. Af disse referencer fremgår det, at der er store vanskeligheder med at tilvejebringe rimelige forsøgsbetingelser. Det er især kraftpåførelsen, som volder problemer, idet det er vanskeligt at påføre denne på en tilstrækkelig kontrolleret måde uden samtidig at påføre bjælken forskellige utilsigtede afstivninger. De udførte forsøg viser samstemmende, at de forskellige landes normer og de beregningsformler, som man ildvrigt betjener sig af, er overordentlig konservative. Antallet af publicerede forsøg er meget ringe, hvilket kan skyldes dels de store vanskeligheder ved forsøgenes gennemførelse, dels at man endnu ikke har erkendt et tilstrækkeligt behov for en løsning af denne type af stabilitetsproblemer ved betonbjælker. Tilføjer man følgende referencer til de allerede nævnte, har man en næsten fuldstændig liste over de hidtil udførte og publicerede kipningsforsøg med betonbjælker: [Massey.67-1],[Massey.69-1],[Frenzel.76-1] og [Jensen.78-1]. De fleste af de eksperimentelle arbejder er ledsagede af forsøg på opstilling af tilnærmede kiplastformler, som søger at beskrive de resultater, der er opnået ved forsøgene. De fleste af disse formler er meget specielle med stærkt begrænsede anvendelsesområder og kan i mange tilfælde kun give gode resultater for de forsøgsbjælker, som de er opstillet på grundlag af.

I [Siev.60-2],[Massey.67-1] og [Nowak.71-1] forsøges formlerne forbedrede ved at medtage bidrag fra armeringen ved bestemmelsen af bøjningsstivheden om tværsnittets lodrette akse og i [Hansell.59-2] ved kun at medtage betontrykzonen ved beregningen af torsionsstivheden. Endvidere søges der i [Massey.67-1] opstillet og medtaget et udtryk for tværsnittets hvælvningsstivhed.

På teoretisk grundlag opstilles i [Rafla.69-2],[Rafla.73-1],[Rafla.73-2],[Rafla.75-1],[Jeltsch.71-2],[Stiglat.71-3],[Hansen.71-4] og [Kreuzinger.74-1] tilnærmede udtryk for kiplasten af betonbjælker. Rafla tager hensyn til bidrag fra armeringen både

ved bestemmelsen af bøjningsstivheden og torsionsstivheden, hvor sidstnævnte størrelse bestemmes på basis af hele tværsnittet. Elasticitetsmodulen sættes lig med en middelsekantmodul bestemt på grundlag af spændinger og tøjninger i tværsnittets mest trykkede fibre. Jeltsch anvender en middeltangentmodul for hele bjælken og kan tage hensyn til forskellige belastninger og understøtningsbetingelser. Stiglat og Hansen opstiller begge forenklede udtryk på basis af [Rafla.69-2]. Grundlaget for Rafla's arbejde er [Rafla.68-1], hvori der beskrives en mere nøjagtig metode til kiplastbestemmelse, som derfor uundgåeligt kræver større beregningsarbejde. Den elastiske tøjningsenergis anden variation, som han benytter som stabilitetskriterium, minimeres ved en Ritz-metode og giver herved den søgte kiplast. De i energifunktionalen indgående bøjnings- og torsionsstivheder modificeres tilnærmet under hensyntagen til betons ikke-lineære arbejdskurve ved opdeling af tværsnittene i delområder. En fremgangsmåde byggende på disse principper er anvendt i [Laurson.77-1].

Mehlhorn, se [Mehlhorn.70-1],[Mehlhorn.70-2],[Mehlhorn.73-3] og [Mehlhorn.74-2], tager direkte hensyn til betonens ikke-lineære arbejdskurve, hvilket giver meget omfattende beregninger, og han begrænser sig derfor til at betragte bjælker med konstant moment, hvorved de belastningsafhængige tværsnitkonstanter bliver de samme i alle snit. Endvidere tages hensyn til tværsnitshvælvingen, hvorimod der ses bort fra revnedannelsen, idet der kun betragtes fuldt forspændte spændbetonbjælker. I særskilte artikler er omtalt en række af de delproblemer, som Mehlhorn og hans medarbejdere ved Darmstadts tekniske Højskole arbejder med, se [Mehlhorn.71-5],[Mehlhorn.72-1],[Mehlhorn.74-3] og [Link.74-4].

Det er i mange tilfælde tilstrækkeligt at anvende tilnærmede formler ved kiplastberegninger, men i enkelte ekstreme tilfælde er en mere nøjagtig beregning helt nødvendig. Et sådant tilfælde er refereret i [Alsen.74-5] og [Mehlhorn.74-6], hvor to 80.0 m lange spændbetonbrodragere skulle monteres som svævefag. Konstruktionshøjden var 5.30 m, kropsbredden 0.25 m, overflangen 2.75 m og underflangen 0.75 m. Den mest kritiske situation i montagefor-

løbet var efter, at bjælkerne var bragt på plads, men inden tværfastivningerne imellem dem var etableret.

3. STABILITET

I dette kapitel er det hensigten at give en bred beskrivelse af, hvad man forstår ved stabilitetssvigt, samt omtale principperne i forskellige stabilitetskriterier. Beskrivelsen har endvidere til formål at indplacere initialstabilitetsteorien, som vil blive benyttet i denne rapports følgende kapitler, i en større sammenhæng.

3.1 Perfekte, lineærelastiske systemer

Stabilitet af et system i ligevægt er grundlæggende et dynamisk fænomen, og det mest generelle kriterium til afgørelse af denne stabilitet er det dynamiske stabilitetskriterium: Hvis små perturbationer ud fra en given ligevægtstilstand forårsager en bevægelse, som divergerer fra den betragtede ligevægtstilstand, er tilstanden instabil. Opstår der derimod oscillationer omkring ligevægtstilstanden, er den stabil.

Anvendelsen af det dynamiske kriterium er ofte forbundet med meget store matematiske problemer, og for konservative systemer anvender man derfor i stedet det statiske kriterium eller energikriteriet. Det statiske kriterium udsiger, at den kritiske belastning er den mindste belastning, ved hvilken der foruden den forelagte ligevægtstilstand findes en anden mulig ligevægtstilstand. Denne grendeling af belastnings-flytningskurven giver anledning til navnet: bifurcation buckling, se figur 3.1, og den kritiske belastning svarer til bifurcationspunktet, som angiver overgangen fra det stabile til det instabile område for den udeformerede ligevægtstilstand. For belastninger større end den kritiske belastning vil den udbøjede ligevægtstilstand være stabil svarende til den på figur 3.1 viste kurve.

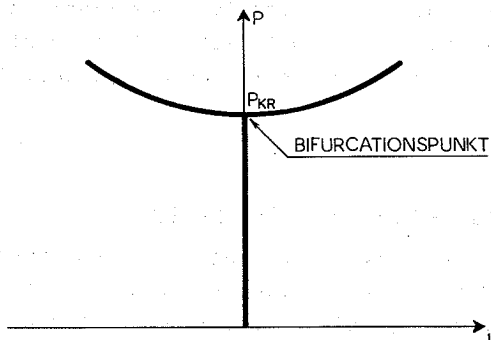


Fig. 3.1: Bifurcation af en lineærelastisk søjle.

Er flytningerne før grenpunktet så små, at man kan benytte den udeformerede tilstand som ligevægtstilstand, taler man om initial buckling, hvilket netop er den type af stabilitetsproblemer, som behandles i denne rapport.

For elastiske og dermed konservative systemer eksisterer der en potentiel energi, og en tilstrækkelig betingelse for stabilitet af en given ligevægtstilstand er, at denne potentielle energi har et minimum i ligevægtstilstanden. Den kritiske belastning er derfor den mindste belastning, ved hvilken systemets samlede potentielle energi ikke længere har et egentligt minimum i ligevægtstilstanden.

For konservative systemer fører energikriteriet, henholdsvis det statiske kriterium, som begge kun har mening for sådanne systemer, til samme resultat som det dynamiske kriterium. Endvidere kan man opfatte energikriteriet og det statiske kriterium som ækvivalente, idet de differentialligninger, som man finder ved anvendelse af

det statiske kriterium, er identiske med de Eulerske differentiaalligninger for det variationsproblem, som energikriteriet kan reduceres til.

3.2 Imperfekte, lineærelastiske systemer

Ovenstående er der kun omtalt perfekte systemer i modsætning til imperfekte, hvor der for alle værdier af belastningen er en entydig sammenhæng mellem belastning og flytning, se figur 3.2.

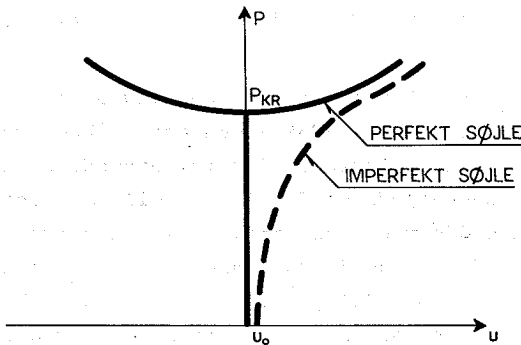


Fig. 3.2: Lineærelastisk søjle med initielle udbøjninger.

Det er dog vanskeligt at tage korrekt hensyn til denne sammenhæng, idet flytningstilstanden ved imperfekte systemer afhænger af en initial flytningstilstand, som ofte ikke er kendt. Dette har især betydning ved mindre belastninger, hvorimod flytningstilstanden for højere belastninger vil nærme sig asymptotisk til kurven for de perfekte systemer, se figur 3.2.

I modsætning til de perfekte systemer, som resulterer i egenværdiproblemer for lineære differentiaalligninger, fører de imperfekte

systemer til sædvanlige spændingsproblemer for ulineære differentiaalligninger. De kan derfor ikke opfattes som stabilitetsproblemer i sædvanlig forstand.

3.3 Systemer med elastisk-plastiske materialeegenskaber

I de foregående afsnit er der kun betragtet lineærelastiske systemer, hvilket ikke er tilstrækkeligt ved behandlingen af betonbjælker, som udviser elastisk-plastiske materialeegenskaber. I dette afsnit vil der derfor blive beskrevet stabilitetsproblemer for systemer med sådanne materialeegenskaber. For simpelhed skyld vil beskrivelsen basere sig på søjleproblemet, idet principperne let kan overføres til andre typer af stabilitetsproblemer.

Den første elastisk-plastiske behandling af søjlestabilitetsproblemer blev foretaget i 1889 af Engesser [Engesser.89-1], som foreslog, at man erstattede elasticitetsmodulen i Eulers søjleformel med tangentmodulen for et ikke-lineærelastisk materiale. Herimod indvendte man [Yasinski.95-1], at fibrene i søjlens konvekse side ved begyndende udbøjning ville aflastes og derfor arbejde med den oprindelige elasticitetsmodul. Engesser forbedrede herefter sit forslag ved at indføre en reduceret elasticitetsmodul [Engesser.95-2]. Denne teori, som idag betegnes Engesser-Karmán teorien, idet Karmán underbyggede den med forsøg og beregninger [Karmán.10-2], giver, som man kunne vente, større kritiske værdier end Engessers oprindelige teori.

Begge de ovennævnte teorier forudsætter, at den betragtede søjle forbliver retlinet, indtil den kritiske last nås, hvorefter udbøjningen indtræder. Dette krav fører imidlertid, som vist af Shanley, se [Shanley.46-1] og [Shanley.47-1], til en modstrid, idet søjlen nødvendigvis må begynde sin udbøjning ved den af Engesser oprindeligt foreslåede kritiske last, idet der i initialtilstanden ikke forekommer aflastning. Efter udbøjningens indtræden vil søjlen arbejde med den reducerede elasticitetsmodul, som stabiliserer søjlen, således at lasten kan øges yder-

ligere. Med stigende belastning nærmer belastnings-udbøjningskurven sig asymptotisk til den kritiske belastning bestemt efter Engesser-Karmán teorien, se kurve I figur 3.3.

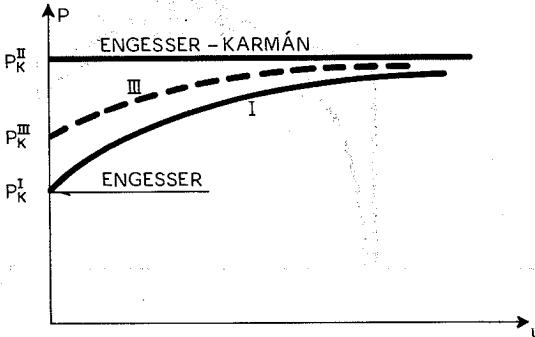


Fig. 3.3: Kritiske belastninger for elastisk-plastiske søjler.

Forhindres søjlen i at bøje ud, indtil belastningen P_K^{III} nås, vil søjlen følge kurven III og ikke følge den oprindelige Engesser kurve I. Dette skyldes, at udbøjningen medfører aflastning af visse tværsnitsdele med heraf følgende ændring af elasticitetsmodulen. Det initielle stabilitetsbrud kan derfor indtræde for en vilkårlig belastning mellem P_K^I og P_K^{II} , som betegnes henholdsvis den nedre og den øvre kritiske belastning. Man kan heraf konkludere, at en initialstabilitetsberegning på den sikre side må basere sig på den nedre kritiske last.

De hidtidige betragtninger i dette afsnit har forudsat, at systemet er perfekt, samt at der optræder plastiske tøjninger, inden den kritiske last nås. Er systemet derimod imperfekt, fås et forløb som vist på kurve I figur 3.4, hvor toppunktet S_I kan defineres som systemets stabilitetslast, medens B_I angiver brudpunktet. Kurve II på figur 3.4 svarer til et perfekt system, hvor

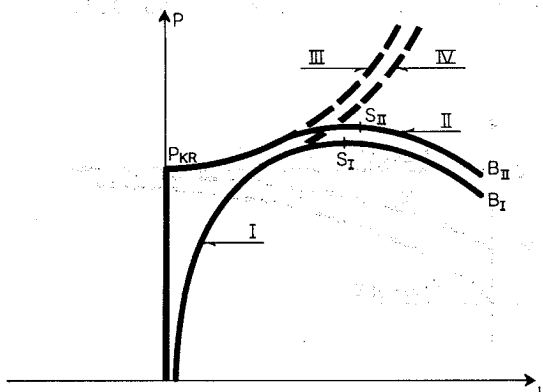


Fig. 3.4: Perfekte og imperfekte elastisk-plastiske søjler.

der først optræder plastiske tøjninger i det postkritiske område. Kurverne III og IV svarer til henholdsvis et perfekt og imperfekt, elastisk system.

På baggrund af de gjorte betragtninger kan man derfor på den sikre side beregne initielle stabilitetslaste ved brug af den oprindelige Engesser-teori. Da der i denne formulering ikke forekommer aflastning, kan man betragte materialet som ikke-lineærelastisk. Dette giver den fordel, at energikriteriet kan anvendes til opstilling af initialkipstabilitetsproblemets egenværdiproblem, hvilket er foretaget i næste kapitel.

4. DEN MATEMATISKE FORMULERING AF STABILITETSPROBLEMET VED ANVENDELSE AF ENERGIKRITERIET

I dette kapitel vil det i kapitel 3 omtalte energikriterium blive benyttet til formulering af det egenværdiproblem, som beskriver kipstabilitetsproblemet. Til belysning og anskueliggørelse af energikriteriet vil det først blive benyttet på en simpel kvadratisk funktional.

4.1 Simpel energifunktional

Den potentielle energi for en given konstruktion eller for et givet konstruktionselement tænkes angivet ved en kvadratisk energifunktional $I(\underline{u})$ af formen:

$$I(\underline{u}) = \frac{1}{2} \underline{u}^T \underline{K} \underline{u} - \underline{u}^T \underline{f} \quad , \quad (4.1)$$

hvor \underline{u} er en vilkårlig knudflytningsvektor, \underline{K} er systemets stivhedsmatrix og \underline{f} er belastningsvektoren.

I variationsregningen er det vist, at $I(\underline{u})$ er stationær, hvis følgende ligning, som betegnes Eulers ligning, er opfyldt:

$$\left[\frac{\partial I}{\partial \underline{u}} \right]_{\underline{u}=\underline{u}_0} = 0 \quad (4.2)$$

Anvendes ekstremumsbetingelsen (4.2) på (4.1), fås systemets ligevægtsligninger:

$$\underline{K} \underline{u}_0 - \underline{f} = \underline{0} \Rightarrow \underline{K} \underline{u}_0 = \underline{f} \quad (4.3)$$

Hvis energifunktionalen (4.1) antager en stationær værdi, har man derfor en ligevægtstilstand, og spørgsmålet er nu, om denne ligevægtstilstand er stabil. Til dette formål undersøges funktionalens variation i nærheden af ligevægtstilstanden, som svarer til $\underline{u} = \underline{u}_0$. Der benyttes flytninger af typen

$$\underline{u} = \underline{u}_0 + \varepsilon \underline{v} \quad , \quad (4.4)$$

hvor \underline{v} er en virtuel flytningsvektor, medens ε er en arbitrær skalar. Flytningsperturbationer af typen (4.4) betegnes svage variationer.

Indsættes (4.4) i (4.1) fås

$$\begin{aligned} & I(\underline{u}_0 + \varepsilon \underline{v}) \\ &= \frac{1}{2}(\underline{u}_0 + \varepsilon \underline{v})^T \underline{K}(\underline{u}_0 + \varepsilon \underline{v}) - (\underline{u}_0 + \varepsilon \underline{v})^T \underline{f} \\ &= \left(\frac{1}{2} \underline{u}_0^T \underline{K} \underline{u}_0 - \underline{u}_0^T \underline{f} \right) + \varepsilon (\underline{v}^T \underline{K} \underline{u}_0 - \underline{v}^T \underline{f}) \\ &\quad + \frac{1}{2} \varepsilon^2 \underline{v}^T \underline{K} \underline{v} \\ &= I(\underline{u}_0) + \varepsilon (\underline{v}^T \underline{K} \underline{u}_0 - \underline{v}^T \underline{f}) + \frac{1}{2} \varepsilon^2 \underline{v}^T \underline{K} \underline{v} \\ &= I(\underline{u}_0) + \delta I + \delta^2 I \end{aligned} \tag{4.5}$$

Fra kapitel 3 vides, at $I(\underline{u})$ i en ligevægtstilstand har et minimum, hvorfor der gælder:

$$\begin{aligned} I(\underline{u}_0) &\leq I(\underline{u}_0) + \delta I + \delta^2 I \\ \Rightarrow \delta I + \delta^2 I &\geq 0 \end{aligned} \tag{4.6}$$

Da \underline{K} for enhver stabil ligevægtstilstand er positiv definit, gælder der altid for den kvadratiske form $\delta^2 I$:

$$\delta^2 I = \frac{1}{2} \varepsilon^2 \underline{v}^T \underline{K} \underline{v} \geq 0 \tag{4.7}$$

Da ε kan vælges arbitrært, kan (4.6) derfor kun opfyldes, hvis den første variation δI antager værdien 0.

$$\begin{aligned} \delta I = 0 &= \varepsilon (\underline{v}^T \underline{K} \underline{u}_0 - \underline{v}^T \underline{f}) \\ &= \varepsilon \underline{v}^T (\underline{K} \underline{u}_0 - \underline{f}) \end{aligned} \tag{4.8}$$

$\delta I = 0$ giver i overensstemmelse med (4.3) ligevægtsligningerne. Af (4.8) fås endvidere ligevægtsligningernes Galerkin-form eller det virtuelle arbejdes princip:

$$\underline{v}^T \underline{K} \underline{u}_0 - \underline{v}^T \underline{f} = 0 \quad (4.9)$$

Ved brug af (4.6) og (4.8) kan stabilitetskriteriet for en given ligevægtstilstand nu angives ved et krav til den anden variation $\delta^2 I$:

$$\delta^2 I \geq 0 \quad (4.10)$$

Brugen af svage variationer (4.4) er ved de fleste anvendelser tilstrækkelig, og man opnår derved, at stabilitetskriteriet (4.10) kun inkluderer den anden variation $\delta^2 I$ og ikke variationer af højere orden.

Ifølge (4.10) er den betragtede ligevægtstilstand instabil for

$$\delta^2 I < 0 \quad (4.11)$$

Grænsetilstanden eller den kritiske tilstand fås derfor for

$$\delta^2 I = \frac{1}{2} \epsilon^2 \underline{v}^T \underline{K} \underline{v} = 0 \quad (4.12)$$

med den tilhørende Galerkin-form

$$\underline{v}^T \underline{K} \underline{v} = 0 \quad (4.13)$$

og stabilitetsligninger

$$\underline{K} \underline{v} = \underline{0} \quad (4.14)$$

(4.13) og (4.14) udgør to forskellige formuleringer af det egenværdiproblem, som beskriver den kritiske tilstand.

Man kan ofte skrive

$$\underline{K} = \underline{A} - \lambda \underline{B} \quad , \quad (4.15)$$

hvor λ angiver egenværdier, som afhængig af problemets karakter kan være en kritisk normalkraft, moment, lastparameter eller lignende.

Af (4.13) og (4.15) fås

$$\lambda = \frac{\underline{v}^T \underline{A} \underline{v}}{\underline{v}^T \underline{B} \underline{v}} \quad (4.16)$$

Af (4.14) og (4.15) fås

$$(\underline{A} - \lambda \underline{B}) \underline{v} = \underline{0} \Rightarrow \det(\underline{A} - \lambda \underline{B}) = 0 \quad (4.17)$$

Ovenstående ligninger afspejler den fundamentale egenskab ved initialstabilitetsproblemer, at de resulterer i egenværdiproblemer. Stabilitetskriteriet (4.10) og de øvrige udledelser i dette afsnit har ligeledes en mere almen gyldighed end beskrevet her, hvilket fremgår af det følgende afsnit.

4.2 $\delta^2 \Pi_P$ for et isotropt, hyperelastisk materiale

Der betragtes et legeme bestående af et isotropt, hyperelastisk materiale. For et sådant materiale eksisterer der en tøjningsenergi, som er givet ved

$$A_i = \int_V W(\epsilon_{ij}) dv \quad , \quad (4.18)$$

hvor $W(\epsilon_{ij})$ er tøjningsenergien pr. volumenenhed.

Legemet tænkes påvirket af massekræfterne pf^i pr. volumenenhed og overfladekræfterne p^i pr. arealenhed. Disse kræfter udfører tilsammen arbejdet

$$A_y = \int_V \rho f^i u_i dv + \int_a p^i u_i da \quad (4.19)$$

Idet den potentielle energi Π_P er givet ved tøjningsenergien minus det arbejde, som de ydre kræfter udfører på legemet, fås:

$$\begin{aligned}\Pi_P &= A_i - A_y \\ &= \int_V (W(\epsilon_{ij}) - \rho f^i u_i) dv - \int_a p^i u_i da\end{aligned}\quad (4.20)$$

Den første variation af (4.20) giver

$$\begin{aligned}\delta\Pi_P &= \int_V \left(\frac{\partial W}{\partial \epsilon_{ij}} \delta\epsilon_{ij} - (\delta(\rho f^i) u_i + \rho f^i \delta u_i) \right) dv \\ &\quad - \int_a (\delta p^i u_i + p^i \delta u_i) da\end{aligned}\quad (4.21)$$

Indføres definitionen på tøjningsenergifunktionen W :

$$\sigma^{ij} = \frac{\partial W}{\partial \epsilon_{ij}}, \quad (4.22)$$

hvor σ^{ij} angiver spændingstensoren, og antages den ydre belastning konstant i størrelse og retning:

$$\delta(\rho f^i) = \delta p^i = 0 \quad (4.23)$$

fås

$$\delta\Pi_P = \int_V (\sigma^{ij} \delta\epsilon_{ij} - \rho f^i \delta u_i) dv - \int_a p^i \delta u_i da \quad (4.24)$$

I ligevægtstilstanden er $\delta\Pi_P = 0$, og man får

$$\delta\Pi_P = \int_V (\sigma^{ij} \delta\epsilon_{ij} - \rho f^i \delta u_i) dv - \int_a p^i \delta u_i da = 0, \quad (4.25)$$

som angiver det virtuelle arbejdes princip. Formel (4.25) er analog til (4.9), hvilket indses ved hjælp af følgende omskrivning, samt Gauss' integralsætning:

$$\begin{aligned}(\sigma^{ij} \delta u_i)_{,j} &= \sigma^{ij}_{,j} \delta u_i + \sigma^{ij} \delta \epsilon_{ij} \\ \Rightarrow \sigma^{ij} \delta \epsilon_{ij} &= (\sigma^{ij} \delta u_i)_{,j} - \sigma^{ij}_{,j} \delta u_i\end{aligned}\quad (4.26)$$

Gauss' integralsætning anvendt på første led på højre side i (4.26):

$$\begin{aligned} \int_V (\sigma^{ij} \delta u_i)_{,j} dv &= \int_V \text{div}(\sigma^{ij} \delta u_i) dv \\ &= \int_a \sigma^{ij} n_j \delta u_i da \end{aligned} \quad (4.27)$$

Indsættes (4.26) og (4.27) i (4.25) fås

$$\begin{aligned} \delta \Pi_P &= \int_V \delta u_i (\sigma^{ij}_{,j} + \rho f^i) dv \\ &\quad + \int_a \delta u_i (p^i - \sigma^{ij} n_j) da \end{aligned} \quad (4.28)$$

som netop er af typen (4.9).

Af (4.28) fås endvidere ligevægtsligningerne

$$\sigma^{ij}_{,j} + \rho f^i = 0 \quad (4.29)$$

med tilhørende randbetingelser

$$p^i - \sigma^{ij} n_j = 0 \quad (4.30)$$

svarende til (4.3).

Ved en undersøgelse helt analog til den i afsnit 4.1 foretagne findes et stabilitetskriterium udtrykt ved den anden variation af den potentielle energi $\delta^2 \Pi_P$ identisk med formel (4.10):

$$\delta^2 \Pi_P \geq 0 \quad (4.31)$$

Ved anvendelse af (4.24) fås

$$\begin{aligned} \delta^2 \Pi_P &= \delta(\delta \Pi_P) \\ &= \int_V (\delta(\sigma^{ij} \delta \epsilon_{ij}) - \delta(\rho f^i \delta u_i)) dv - \int_a \delta(p^i \delta u_i) da \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \int_V (\delta \sigma^{ij} \delta \epsilon_{ij} + \sigma^{ij} \delta^2 \epsilon_{ij} - (\delta(\rho f^i) \delta u_i + \rho f^i \delta^2 u_i)) dv \\
 &\quad - \int_a (\delta p^i \delta u_i + p^i \delta^2 u_i) da \geq 0
 \end{aligned} \tag{4.32}$$

I lighed med afsnit 4.1 benyttes svage variationer, hvilket vil sige flytninger af typen:

$$u_i = u_{0i} + \epsilon v_i = u_{0i} + v_i \tag{4.33}$$

Herved fås

$$\delta u_i = \epsilon \left[\frac{d}{d\epsilon} (u_{0i} + \epsilon v_i) \right]_{\epsilon=0} = \epsilon v_i = v_i \tag{4.34}$$

$$\delta^2 u_i = \frac{1}{2} \epsilon^2 \left[\frac{d^2}{d\epsilon^2} (u_{0i} + \epsilon v_i) \right]_{\epsilon=0} = 0 \tag{4.35}$$

Ved indsættelse af formel (4.35), samt formel (4.23) svarende til dødvægtsbelastning i (4.32) fås følgende stabilitetskriterium:

$$\delta^2 \Pi_P = \int_V (\delta \sigma^{ij} \delta \epsilon_{ij} + \sigma^{ij} \delta^2 \epsilon_{ij}) dv \geq 0 \tag{4.36}$$

Idet materialet betragtes som hyperelastisk, kan man skrive:

$$\delta^2 \Pi_P = \int_V \left(\frac{\partial \sigma^{ij}}{\partial \epsilon_{kl}} \delta \epsilon_{kl} \delta \epsilon_{ij} + \sigma^{ij} \delta^2 \epsilon_{ij} \right) dv \geq 0 \tag{4.37}$$

Udtrykkes variationerne af ϵ_{ij} ved de virtuelle flytningskomponenter v_i , får man ved brug af appendix A:

$$\begin{aligned}
 \delta^2 \Pi_P &= \int_V \left(\frac{1}{4} \frac{\partial \sigma^{ij}}{\partial \epsilon_{kl}} (v_{k,l} + v_{l,k}) (v_{i,j} + v_{j,i}) \right. \\
 &\quad \left. + \sigma^{ij} v_{,i} v_{,j} \right) dv \geq 0
 \end{aligned} \tag{4.38}$$

Formel (4.38) angiver Galerkin-formen af stabilitetsligningerne for et isotropt, hyperelastisk legeme påvirket af en stationær belastning.

4.3 Simplifikation af stabilitetsfunktionalen

En beregning baseret på formel (4.38) i afsnit 4.2, som har gyldighed uanset størrelsen af den betragtede ligevægtstilstands flytninger og tøjninger, er ikke mulig uden væsentlige indskrænkninger i de generelle forudsætninger, som denne formel bygger på. Forudsætter man derfor små flytninger og tøjninger, kan stabilitetsligningerne med god tilnærmelse opstilles for den udeformerede tilstand. Denne forudsætning sammenholdt med følgende virtuelle flytningsfelt giver den ønskede forenkling af funktionalen (4.38).

Virtuelt flytningsfelt

$$u_x = w - u'y - v'z - \theta'\varphi \quad (4.39)$$

$$u_y = u - \theta(z - z_F) \quad (4.40)$$

$$u_z = v + \theta(y - y_F) \quad (4.41)$$

hvor (u,v) angiver forskydningscentrets flytning i tværsnittets plan, w angiver flytningen af koordinatsystemets origo ved hvelvningsfrit tværsnit, $\varphi = \varphi(y,z)$ angiver tværsnitshvelvningen for en enhedsvridningsvinkel pr. længdeenhed $\theta' = 1$, og (y_F, z_F) angiver forskydningscentrets koordinater.

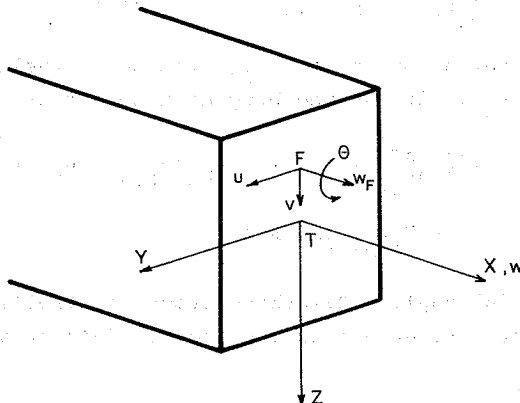


Fig. 4.1: Det benyttede koordinatsystem og de anvendte virtuelle flytninger.

Formel (4.39) fremkommer på følgende måde

$$\begin{aligned} u_x &= w_F - u'(y - y_F) - v'(z - z_F) - \theta'\phi \\ &= w_F + u'y_F + v'z_F - u'y - v'z - \theta'\phi \\ &= w - u'y - v'z - \theta'\phi \quad , \end{aligned} \quad (4.39b)$$

hvor de konstante led $w_F + u'y_F + v'z_F$ netop giver flytningen w af origo.

Formlerne (4.39) - (4.41) er analoge til Vlasov-bjælketeoriens forudsætninger.

Formlerne (4.39) - (4.41) giver anledning til følgende virtuelle tøjninger:

$$\epsilon_x = w' - u''y - v''z - \theta''\phi \quad (4.42)$$

$$\epsilon_y = \epsilon_z = \epsilon_{yz} = 0 \quad (4.43)$$

$$\begin{aligned} \epsilon_{xy} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right) \\ &= \frac{1}{2} (-u' - \theta' \frac{\partial \phi}{\partial y} + u' - \theta' (z - z_F)) = -\frac{1}{2} \theta' \left((z - z_F) + \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) \end{aligned} \quad (4.44)$$

$$\begin{aligned} \epsilon_{xz} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} \right) \\ &= \frac{1}{2} (-v' - \theta' \frac{\partial \phi}{\partial z} + v' + \theta' (y - y_F)) = \frac{1}{2} \theta' \left((y - y_F) - \frac{\partial \phi}{\partial z} \right) \end{aligned} \quad (4.45)$$

Af (4.39) - (4.41) ses endvidere, at flytningsgradienterne

$$\frac{\partial u_y}{\partial y} = \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0 \quad (4.46)$$

Da formel (4.43) giver, at

$$\sigma_y = \sigma_z = \sigma_{yz} = 0 \quad (4.47)$$

kan (4.38) med de nævnte indskrænkninger skrives, idet $\sigma = \sigma_x$ og $\epsilon = \epsilon_x$:

$$\begin{aligned} \delta^2 \Pi_P = \int_V & \left(\left(\frac{\partial \sigma}{\partial \epsilon_\ell} + \sigma \right) \epsilon^2 + \sigma \left(\left(\frac{\partial u_Y}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_Z}{\partial x} \right)^2 \right) \right. \\ & + 2 \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial (\epsilon_{xy})_\ell} \epsilon_{xy}^2 + 2 \sigma_{xy} \left(\frac{\partial u_x}{\partial x} \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial x} \frac{\partial u_z}{\partial y} \right) \\ & \left. + 2 \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial (\epsilon_{xz})_\ell} \epsilon_{xz}^2 + 2 \sigma_{xz} \left(\frac{\partial u_x}{\partial x} \frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \frac{\partial u_y}{\partial z} \right) \right) dv \geq 0 \quad (4.48) \end{aligned}$$

Størrelserne ϵ_ℓ , $(\epsilon_{xy})_\ell$ og $(\epsilon_{xz})_\ell$ angiver de virkelige tøjninger svarende til ligevægtstilstanden, medens ϵ , ϵ_{xy} og ϵ_{xz} er virtuelle tøjninger.

I det følgende betragtes de enkelte led i formel (4.48) med henblik på at omskrive og reducere formlen til et mere anvendeligt udtryk.

1. led i formel (4.48):

$$\int_V \left(\frac{\partial \sigma}{\partial \epsilon_\ell} + \sigma \right) \epsilon^2 dv = \int_V (E_t(\epsilon_\ell) + \sigma) \epsilon^2 dv, \quad (4.49)$$

idet der gælder

$$\frac{\partial \sigma(\epsilon_\ell)}{\partial \epsilon_\ell} = E_t(\epsilon_\ell), \quad (4.50)$$

hvor $E_t(\epsilon_\ell)$ angiver tangentelasticitetsmodulen.

Benyttes (4.42) fås

$$\begin{aligned} & \int_V (E_t + \sigma) (w' - u''y - v''z - \theta''\varphi)^2 dv \\ & = \int_V (E_t + \sigma) ((w')^2 + y^2 (u'')^2 + z^2 (v'')^2 + \varphi^2 (\theta'')^2 \\ & \quad - 2(yu'' + zv'' + \varphi\theta'')w' + 2(yz v'' + y\varphi\theta'')u'' \\ & \quad + 2z\varphi\theta''v'') dv \quad (4.51) \end{aligned}$$

Benyttes koordinataksler svarende til hovedakserne gennem det elastiske tyngdepunkt bestemt af vægtfunktionen $(E_t(\epsilon_\ell) + \sigma(\epsilon_\ell))$ får man

$$\begin{aligned} \int_V (E_t + \sigma) y u'' w' dv &= \int_x u'' w' \int_A (E_t + \sigma) y dA dx \\ &= \int_x u'' w' \cdot 0 dx = 0 \end{aligned} \quad (4.52)$$

hvor tværsnitssegmentet $dA = dy dz$.

Tilsvarende fås

$$\int_V (E_t + \sigma) z v'' w' dv = \int_V (E_t + \sigma) y z v'' u'' dv = 0 \quad (4.53)$$

Svarende til Vlasov-teorien er der mulighed for at vælge en normaliseret hvelvningssfunktion $\varphi(y, z)$, således at

$$\int_A (E_t + \sigma) \varphi(y, z) dA = 0 \quad (4.54)$$

samt

$$\int_A (E_t + \sigma) y \varphi dA = \int_A (E_t + \sigma) z \varphi dA = 0 \quad (4.55)$$

Følgende betegnelser indføres

$$(E_t A) = \int_A (E_t + \sigma) dA \quad (4.56)$$

$$(E_t I)_z = \int_A (E_t + \sigma) y^2 dA \quad (4.57a)$$

$$(E_t I)_y = \int_A (E_t + \sigma) z^2 dA \quad (4.57b)$$

$$(E_t I)_\varphi = \int_A (E_t + \sigma) \varphi^2 dA \quad (4.58)$$

Indsættes (4.52) - (4.58) i (4.51) fås

$$\int_x \left\{ (E_t A) (w')^2 + (E_t I)_z (u'')^2 + (E_t I)_y (v'')^2 + (E_t I)_\varphi (\theta'')^2 \right\} dx \quad (4.59)$$

2. led i formel (4.48):

$$\int_V \sigma \left(\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \right) dv$$

$$= \int_V \sigma \left((u' - \theta' (z - z_F))^2 + (v' + \theta' (y - y_F))^2 \right) dv \quad (4.60)$$

Idet

$$\int_A \sigma dA = P \quad (4.61)$$

$$\int_A z \sigma dA = M_Y \quad (4.62)$$

$$\int_A y \sigma dA = - M_Z \quad (4.63)$$

kan (4.60) omformes til

$$\int_x \left(P \left((u')^2 + (v')^2 \right) + (\theta')^2 \int_A \left((y - y_F)^2 + (z - z_F)^2 \right) dA \right. \\ \left. - 2(M_Y - Pz_F) u' \theta' - 2(M_Z + Py_F) v' \theta' \right) dx$$

$$= \int_x \left(\sigma I_{PF} (\theta')^2 + P \left((u')^2 + (v')^2 \right) - 2(M_Y - Pz_F) u' \theta' \right. \\ \left. - 2(M_Z + Py_F) v' \theta' \right) dx \quad , \quad (4.64)$$

hvor (σI_{PF}) angiver det polære inertimoment om forskydningscentret vægtet med normalspændingen σ .

3. led i formel (4.48):

Idet forskydningsspændingerne σ_{xy} og σ_{xz} antages at være lineære funktioner af forskydningstøjningerne $(\epsilon_{xy})_\ell$ og $(\epsilon_{xz})_\ell$, får man

$$\sigma_{xy} = 2(\epsilon_{xy})_\ell G_{\text{sec}}(\epsilon_\ell) \quad (4.65)$$

og

$$\sigma_{xz} = 2(\epsilon_{xz})_{\ell} G_{\text{sec}}(\epsilon_{\ell}) \quad (4.66)$$

hvor $G_{\text{sec}}(\epsilon_{\ell})$ er sekantforskydningsmodulen givet ved

$$G_{\text{sec}}(\epsilon_{\ell}) = \frac{E_{\text{sec}}(\epsilon_{\ell})}{2(1+\nu)} \quad (4.67)$$

hvor E_{sec} er sekantelasticitetsmodulen og ν er Poisson's forhold.

Idet G_{sec} er uafhængig af $(\epsilon_{xy})_{\ell}$ og $(\epsilon_{xz})_{\ell}$ får man

$$2G_{\text{sec}}(\epsilon_{\ell}) = \frac{\sigma_{xy}}{(\epsilon_{xy})_{\ell}} = \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial (\epsilon_{xy})_{\ell}} \quad (4.68)$$

og ligeledes

$$2G_{\text{sec}}(\epsilon_{\ell}) = \frac{\sigma_{xz}}{(\epsilon_{xz})_{\ell}} = \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial (\epsilon_{xz})_{\ell}} \quad (4.69)$$

Man kan derfor i (4.48) benytte følgende omskrivning:

$$\begin{aligned} & \int_V \left(2 \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial (\epsilon_{xy})_{\ell}} \epsilon_{xy} + 2 \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial (\epsilon_{xz})_{\ell}} \epsilon_{xz} \right) dv \\ &= \int_V 4G_{\text{sec}} \left(\left(-\frac{1}{2}\theta' \left((z - z_F) + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) \right)^2 + \left(\frac{1}{2}\theta' \left((y - y_F) - \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right) \right)^2 \right) dv \\ &= \int_x (\theta')^2 \int_A G_{\text{sec}} \left(\left((z - z_F) + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^2 + \left((y - y_F) - \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)^2 \right) dA dx \\ &= \int_x (G_{\text{sec}} I_V) (\theta')^2 dx \quad (4.70) \end{aligned}$$

hvor

$$(G_{\text{sec}} I_V) = \int_A G_{\text{sec}} \left(\left((z - z_F) + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^2 + \left((y - y_F) - \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)^2 \right) dA \quad (4.71)$$

angiver bjælkens vridningsstivhed. En anvendelse af (4.71) på et simpelt tværsnit er foretaget i eksempel 4.3.1.

Eksempel 4.3.1

På figur 4.2 er vist et tyndvægget, rektangulært tværsnit, og

et koordinatsystem med origo i det elastiske tyngdepunkt og akserne orienteret efter tværsnittets hovedakser.

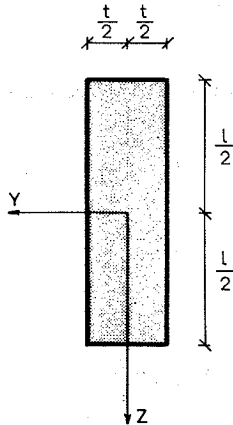


Fig. 4.2: Tyndvægget, rektangulært tværsnit.

Antages hvelvningsfunktionen $\varphi(y,z)$ givet ved

$$\varphi(y,z) = -yz \quad (4.72)$$

kan vridningsstivheden ($G_{\text{sec}}I_V$) beregnes af (4.71).

Antages materialet lineærelastisk fås:

$$G_{\text{sec}} = G = \text{konstant} \quad (4.73)$$

og

$$(y_F, z_F) = (0,0) \quad (4.74)$$

Indsættes (4.72) - (4.74) i (4.71) fås følgende udtryk for GI_V

$$\begin{aligned}
 GI_V &= G \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} (2y)^2 dz dy \\
 &= Gl \cdot \frac{4}{3} \left(\left(\frac{t}{2}\right)^3 - \left(-\frac{t}{2}\right)^3 \right) = \frac{1}{3} Gl t^3, \quad (4.75)
 \end{aligned}$$

som er et velkendt resultat.

4. led i formel (4.48):

$$\begin{aligned}
 &2 \int_V \sigma_{xy} \left(\frac{\partial u_x}{\partial x} \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial x} \frac{\partial u_z}{\partial y} \right) dv \\
 &= 2 \int_x (-w' u' \int_A \sigma_{xy} dA + u'' u' \int_A y \sigma_{xy} dA \\
 &\quad + v'' u' \int_A z \sigma_{xy} dA + \theta'' u' \int_A \sigma_{xy} dA \\
 &\quad + v' \theta \int_A \sigma_{xy} dA + \theta' \theta \int_A (y - y_F) \sigma_{xy} dA) dx \quad (4.76)
 \end{aligned}$$

I (4.76) er hvælvningens bidrag til flytningsgradienten $\frac{\partial u_x}{\partial y}$ regnet negligibel.

Følgende bemærkninger tjener til en yderligere reduktion af udtrykket (4.76):

Ved undersøgelse af initielle instabiliteter kan de for ligevægtstilstanden gældende forskydningsspændinger σ_{xy} og σ_{xz} ikke begge være forskellig fra nul, idet der da ikke vil optræde noget stabilitetsproblem.

Ved Euler-søjler er kun de virtuelle flytninger i retning af mindste bøjningsstyrke aktive, og både σ_{xy} og σ_{xz} er lig med nul. Samtlige led indeholdende σ_{xy} og σ_{xz} eller produkter af forskellige virtuelle flytninger forsvinder derfor.

Ved undersøgelse af ren vridningsstabilitetsbrud er kun den virtuelle rotation θ forskellig fra nul, medens u , v , σ_{xy} og σ_{xz} alle er lig med nul. Ved kombineret Euler- og vridningsstabilitetsbrud er én af de to virtuelle flytninger u eller v vinkelret på bjælkeaksen forskellig fra nul.

Ved kipstabilitetsbrud eller kombineret Euler- og kipstabilitetsbrud er u og σ_{xz} eller v og σ_{xy} , samt θ forskellig fra nul. Foranstående bemærkninger giver anledning til følgende reduktion af (4.76), idet de led, som i alle de nævnte tilfælde er nul, fjernes fra udtrykket, som herefter kan skrives.

$$\begin{aligned} & 2 \int_x (v' \theta \int_A \sigma_{xy} dA + \theta' \theta \int_A (y - y_F) \sigma_{xy} dA) dx \\ & = 2 \int_x (v' \theta Q_Y + \theta' \theta \int_A (y - y_F) \sigma_{xy} dA) dx \quad , \end{aligned} \quad (4.77)$$

hvor Q_Y er forskydningskraften i y -retningen.

Tilsvarende fås

$$\begin{aligned} & 2 \int_v \sigma_{xz} \left(\frac{\partial u_x}{\partial x} \frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \frac{\partial u_y}{\partial z} \right) dv \\ & = - 2 \int_x (u' \theta Q_Z - \theta' \theta \int_A (z - z_F) \sigma_{xz} dA) dx \end{aligned} \quad (4.78)$$

Ved anvendelse af formlerne (4.59), (4.64), (4.70), (4.77) og (4.78) får man herefter det ønskede simplificerede udtryk for funktionalen (4.48) og dermed for den generelle funktional (4.38):

$$\begin{aligned} & \int_x ((E_t A) (w')^2 + (E_t I)_z (u'')^2 + (E_t I)_y (v'')^2 + (E_t I)_\phi (\theta'')^2 \\ & + ((G_{\text{sec}} I_v) + (\sigma I_{PF})) (\theta')^2 + P((u')^2 + (v')^2) \\ & - 2(M_{Q_z} \theta) 'u' - 2P(z_p - z_F) u' \theta' - 2(M_{Q_y} \theta) 'v' \\ & + 2P(y_p - y_F) v' \theta' + 2\theta' \theta ((a_y - y_F) Q_Y \\ & + (a_z - z_F) Q_Z)) dx \geq 0 \quad , \end{aligned} \quad (4.79)$$

hvor der er anvendt følgende omskrivninger:

$$\begin{aligned} M_Y \theta' + Q_Z \theta &= (P_{Z_P} + M_{Q_Z}) \theta' + \frac{dM_{Q_Z}}{dx} \cdot \theta \\ &= P_{Z_P} \theta' + (M_{Q_Z} \theta)' \end{aligned} \quad (4.80)$$

$$\begin{aligned} M_Z \theta' - Q_Y \theta &= (-P_{Y_P} + M_{Q_Y}) \theta' + \frac{dM_{Q_Y}}{dx} \cdot \theta \\ &= -P_{Y_P} \theta' + (M_{Q_Y} \theta)' \end{aligned} \quad (4.81)$$

idet stabilitetsfunktionalen er opstillet for den udeformede tilstand.

Endvidere er der indført

$$\int_A (y - y_F) \sigma_{xy} dA = (a_Y - y_F) Q_Y \quad (4.82)$$

$$\int_A (z - z_F) \sigma_{xz} dA = (a_Z - z_F) Q_Z \quad (4.83)$$

idet der eksisterer værdier a_Y og a_Z , således at

$$a_Y Q_Y = \int_A y \sigma_{xy} dA \quad (4.84)$$

$$a_Z Q_Z = \int_A z \sigma_{xz} dA \quad (4.85)$$

Funktionalen (4.79) angiver stabilitetsligningernes Galerkin-form og kan således anvendes direkte til bestemmelse af kritiske belastninger.

Eksempel 4.3.2

Funktionalen (4.79) anvendes til beregning af den kritiske last P_{kr} for en Euler-søjle.

Søjleens bøjningsstivhed EI regnes konstant svarende til konstant tværsnit og lineærelastisk materiale.

Anvender man funktionalen (4.79) med følgende antagelser om de virtuelle flytninger:

$$u = u_0 \sin \frac{\pi}{l} x \quad (4.86)$$

$$w = v = \theta = 0 \quad , \quad (4.87)$$

får man

$$\int ((E + \sigma) I (u'')^2 + P (u')^2) dx \geq 0 \quad (4.88)$$

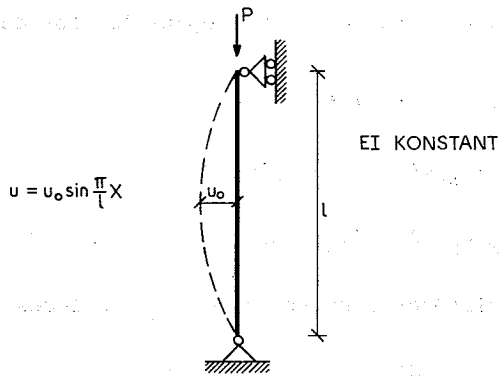


Fig. 4.3: Simpelt understøttet søjle af et lineærelastisk materiale.

Idet normalspændingen σ er lille sammenlignet med elasticitetskoefficienten ($\sigma \ll E$), kan man udelade σ i (4.88). Indsættes herefter (4.86) fås:

$$\int (EI (u_0 \frac{\pi}{l})^2 \sin^2 \frac{\pi}{l} x + P (u_0 \frac{\pi}{l})^2 \cos^2 \frac{\pi}{l} x) dx \geq 0 \quad (4.89)$$

Idet den kritiske last P_{kr} svarer til lighedstegnet i (4.89), får man:

$$EI u_0^2 \left(\frac{\pi}{l}\right)^4 \frac{l}{2} + P_{kr} u_0^2 \left(\frac{\pi}{l}\right)^2 \frac{l}{2} = 0$$

$$\Rightarrow P_{kr} = - \frac{\pi^2 EI}{l^2} \quad , \quad (4.90)$$

som er et velkendt resultat.

På simple problemer, som det i eksempel 4.3.2 viste, er det muligt at anvende funktionalen (4.79) direkte. Denne fremgangsmåde er også mulig på lidt mere komplicerede problemer i kombination med en Ritz-metode. En speciel udformning af denne metode betegnes Galerkin-metoden og svarer til følgende fremgangsmåde. De virtuelle flytninger opskrives som linearkombinationer af lineært uafhængige basisfunktioner.

$$u = a_1 u_1(x) + a_2 u_2(x) + \dots + a_n u_n(x) \quad (4.91)$$

$$v = b_1 v_1(x) + b_2 v_2(x) + \dots + b_p v_p(x) \quad (4.92)$$

$$\theta = c_1 \theta_1(x) + c_2 \theta_2(x) + \dots + c_q \theta_q(x) \quad (4.93)$$

De enkelte basisfunktioner skal opfylde randbetingelserne. Specielt kan samtlige parametre tilhørende en flytningsstørrelse være nul. I eksempel 4.3.2 var f.eks. parametrene b_j og c_k lig med nul. Formlerne (4.91) - (4.93) indsættes i funktionalen $\delta^2 \Pi_p$ (4.79), som differentieres partielt med hensyn til de af parametrene a_i , b_j og c_k , som er forskellige fra nul. Herved fremkommer et homogent, lineært ligningssystem, hvis laveste egenværdi er den søgte kritiske last.

Hvis antallet af basisfunktioner er begrænset, og randbetingelserne er simple, er den skitserede metode udmærket til håndberegninger. Ved komplicerede randbetingelser og et større antal basisfunktioner er metoden ikke anbefalelsesværdig af to grunde. For det første kan det være vanskeligt at fremstille et større antal tilstrækkeligt lineært uafhængige basisfunktioner, som alle opfylder randbetingelserne. For det andet kræver metoden et meget stort antal integrationer, hvilket man overbeviser sig om ved at indsætte (4.91) - (4.93) i (4.79).

Det viser sig derfor mere hensigtsmæssigt at anvende de egentlige stabilitetsdifferentialligninger, som de grundlæggende ligninger.

I det følgende afsnit vil disse blive udledt.

4.4 Stabilitetsligninger og randbetingelser.

Med udgangspunkt i formel (4.79), som angiver stabilitetsligningernes Galerkin-form, kan man udlede de egentlige stabilitetsdifferentialligninger med tilhørende randbetingelser.

De tre stabilitetsligninger fås ved anvendelse af Eulers ligning med $r = u, v, \theta$:

$$\frac{d^2}{dx^2} \left(\frac{\partial F}{\partial r''} \right) - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial r'} \right) + \frac{\partial F}{\partial r} = 0 \quad (4.94)$$

på funktionalen $\delta^2 \Pi_P$, hvor integranten betegnes F:

$$\delta^2 \Pi_P = \int_0^L F dx \quad (4.95)$$

Man får:

$$\underline{r = u}$$

$$\left((E_t I)_z u'' \right)' - (P u')' + (M_{Q_z} \theta)'' + (P(z_P - z_F) \theta')' = 0 \quad (4.96)$$

$$\underline{r = v}$$

$$\left((E_t I)_y v'' \right)' - (P v')' + (M_{Q_y} \theta)'' - (P(y_P - y_F) \theta')' = 0 \quad (4.97)$$

$$\underline{r = \theta}$$

$$\begin{aligned} & \left((E_t I)_\varphi \theta'' \right)' - \left((G_{\text{sec}} I_V) + \sigma I_{PF} \right) \theta' \\ & + \left(-M_{Q_z}' u'' + (M_{Q_z} u')' \right) + (P(z_P - z_F) u')' \\ & + \left(-M_{Q_y}' v'' + (M_{Q_y} v')' \right) - (P(y_P - y_F) v')' \\ & + \theta'' \left((a_y - y_F) Q_y + (a_z - z_F) Q_z \right) \\ & - \left(\theta \left((a_y - y_F) Q_y + (a_z - z_F) Q_z \right) \right)' = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow & ((E_t I)_\phi \theta''') - ((G_{\text{sec}} I_V) + \sigma I_{PF}) \theta'' \\ & + M_{Q_Z} u'' + (P(z_P - z_F) u') + M_{Q_Y} v'' - (P(y_P - y_F) v') \\ & + ((a_Y - y_F) q_Y + (a_Z - z_F) q_Z) \theta = 0 \end{aligned} \quad (4.98)$$

hvor q_Y og q_Z angiver bjælkens tværbelastninger i henholdsvis y og z -retningerne, medens a_Y og a_Z angiver henholdsvis y og z -koordinater til disse belastningers angrebepunkter.

Formlerne (4.96) og (4.97) angiver bøjningsligningerne i henholdsvis y og z retningerne, medens (4.98) angiver vridningsligningen. Ligningerne ses at være homogene, lineære og koblede og kan generelt set ikke løses analytisk.

Til det angivne sæt af homogene differentiaalligninger svarer der et sæt randbetingelser, som lettest findes i forbindelse med følgende alternative udledning af stabilitetsligningerne (4.96) - (4.98).

Funktionalen (4.79) med lighedstegnet gældende svarende til den kritiske tilstand søges opskrevet på følgende måde:

$$\int_x (Fu + Gv + H\theta) dx + [RB]_0^L = 0 \quad , \quad (4.99)$$

hvor F , G og H er funktioner af de virtuelle flytninger og deres afledede.

Differentieres (4.99) med hensyn til x , får man

$$Fu + Gv + H\theta = 0 \quad (4.100)$$

Da u , v og θ ikke kan være identisk nul hen langs bjælkeaksen, må der gælde

$$F \equiv 0, \quad G \equiv 0, \quad H \equiv 0 \quad (4.101)$$

Ligningerne (4.101) er identiske med differentiaalligningerne

(4.96) - (4.98), og $[RB]_0^L$ er de tilhørende randbetingelser.

Omformuleringen af (4.79) til (4.99) kræver udførelse af følgende delvise integrationer, samt hermed analoge:

$$\begin{aligned} \int P(u')^2 dx &= \int Pu'u' dx \\ &= [Pu'u]_0^L - \int (Pu')'u dx \end{aligned} \quad (4.102)$$

$$\begin{aligned} \int (E_t I)_z (u'')^2 dx &= \int (E_t I)_z u''u'' dx \\ &= [(E_t I)_z u''u']_0^L - \int ((E_t I)_z u'')'u dx \\ &= [(E_t I)_z u''u' - ((E_t I)_z u'')'u]_0^L + \int ((E_t I)_z u'')''u dx \end{aligned} \quad (4.103)$$

$$\begin{aligned} \int 2(M_{Q_z} \theta)'u' dx &= [(M_{Q_z} \theta)'u + M_{Q_z} \theta u']_0^L - \int ((M_{Q_z} \theta)''u + M_{Q_z} u''\theta) dx \end{aligned} \quad (4.104)$$

$$\begin{aligned} \int 2Pz_F u'\theta' dx &= [Pz_F \theta' u + Pz_F u'\theta]_0^L - \int ((Pz_F \theta')'u + (Pz_F u')'\theta) dx \end{aligned} \quad (4.105)$$

$$\begin{aligned} \int 2(a_Y - y_F) Q_Y \theta' \theta dx &= \int (a_Y - y_F) Q_Y \theta' \theta dx + [(a_Y - y_F) Q_Y \theta^2]_0^L \\ &\quad - \int ((a_Y - y_F) Q_Y \theta)' \theta dx \\ &= \int (a_Y - y_F) Q_Y \theta' \theta dx + [(a_Y - y_F) Q_Y \theta^2]_0^L \\ &\quad - \int (a_Y - y_F) Q_Y \theta' \theta dx - \int (a_Y - y_F) \frac{dQ_Y}{dx} \theta^2 dx \\ &= [(a_Y - y_F) Q_Y \theta^2]_0^L + \int (a_Y - y_F) \alpha_Y \theta^2 dx \end{aligned} \quad (4.106)$$

Man verificerer let, at integranterne i ovenstående, samt analoge udtryk fører til stabilitetsligningerne (4.96) - (4.98). De tilhørende randbetingelser, som fremkommer ved de delvise integrationer, er givet ved følgende udtryk:

$$\begin{aligned}
 & [(E_t I)_z u'' u']_0^L \\
 & + [(-((E_t I)_z u'')' + P u' - (M_{Q_z} \theta)' - P(z_P - z_F) \theta') u]_0^L \\
 & + [(E_t I)_y v'' v']_0^L \\
 & + [(-((E_t I)_y v'')' + P v' - (M_{Q_y} \theta)' + P(y_P - y_F) \theta') v]_0^L \\
 & + [(E_t I)_\varphi \theta'' \theta']_0^L \\
 & + [(-((E_t I)_\varphi \theta'')' + (G_{\text{sec}} I_v) + (\sigma I_{PF})) \theta' \\
 & - (M_{Q_z} + P(z_P - z_F)) u' - (M_{Q_y} - P(y_P - y_F)) v' \\
 & + (a_y - y_F) Q_y \theta + (a_z - z_F) Q_z \theta]_0^L = 0 \quad (4.107)
 \end{aligned}$$

Stabilitetsdifferentialligningerne (4.96) - (4.98) kombineret med randbetingelserne (4.107) udgør det generelle stabilitetsrandværdiproblem.

Randbetingelserne kan opdeles i følgende geometriske og statiske betingelser, idet kun den ene af de to flytningsstørrelser medtages på grund af deres analoge betydning.

Geometriske randbetingelser:

1. Forhindret tværflytning: (4.108)
 $u = 0$

2. Forhindret drejning af bjælkeende: (4.109)
 $u' = 0$

3. Forhindret torsion om bjælkeaksen: (4.110)
 $\theta = 0$

4. Forhindret hvelvning af tværsnittet: $(E_t I)_z \theta' = 0$ (4.111)

Statiske randbetingelser:

1. Moment om den lodrette z-akse lig med nul: $(E_t I)_z u'' = 0$ (4.112)

2. Forskydningskraft i y-retningen lig med nul: $-((E_t I)_z u'')' + Pu' - (M_{Q_z} \theta)' - P(z_P - z_F)\theta' = 0$ (4.113)

3. Hvelvningsmoment lig med nul: $(E_t I)_\varphi \theta'' = 0$ (4.114)

4. Torsionsmoment lig med nul: $-((E_t I)_\varphi \theta'')' + ((G_{\text{sec}} I_V) + (\sigma I_{PF}))\theta' - (M_{Q_z} + P(z_P - z_F))u' + (a_z - z_F)Q_z \theta = 0$ (5.115)

I den generelle udformning af stabilitetsligningerne og randbetingelserne, som kommer til udtryk i (4.96) - (4.98), samt (4.107), eksisterer der ikke nogen fysisk tolkning, men udtrykkene danner basis for de mere specifikke ligninger, der beskriver søjle-, vridnings- og kipstabilitetsproblemerne, som vil blive beskrevet i det følgende kapitel.

5. BJÆLKESTABILITETSPROBLEMER

I dette kapitel vil de forskellige typer af stabilitetssvigt for søjler og bjælker blive beskrevet med udgangspunkt i de generelle udtryk (4.96) - (4.98) og (4.107), som udvikledes i kapitel 4.

5.1 Søjlestabilitet

Ved den rene søjlestabilitet eller Euler-stabilitet er den virtuelle vridningsvinkel θ identisk lig med nul. Af (4.96), (4.97) og (4.107) fås derfor følgende stabilitetsligninger med tilhørende randbetingelser:

$$DL\ 1: ((E_t I)_z u'')'' - (Pu')' = 0 \quad (5.1a)$$

$$RB\ 1: [(E_t I)_z u'' u' - ((E_t I)_z u'')' - Pu'] u \Big|_0^L = 0 \quad (5.1b)$$

$$DL\ 2: ((E_t I)_z v'')'' - (Pv')' = 0 \quad (5.2a)$$

$$RB\ 2: [(E_t I)_y v'' v' - ((E_t I)_y v'')' - Pv'] v \Big|_0^L = 0 \quad (5.2b)$$

Man ser, at de to differentially ligninger er ukoblede, og de kan derfor løses hver for sig. Den kritiske belastning P_{kr} er den mindste af de løsninger, der fås ved løsning af de to systemer. P_{kr} afhænger dels af bjælkens bøjningsstivheder, dels af randbetingelserne. Antages randbetingelserne identiske i y- og z-retningerne, vil bjælken bøje ud i retning af mindste bøjningsstivhed.

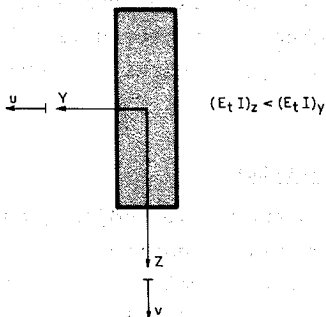


Fig. 5.1: Ved identiske randbetingelser for u og v vil $(E_t I)_z < (E_t I)_y$ medføre udbøjning i y-retningen.

Betragtes randbetingelserne (5.1b) til søjleligningen (5.1a), som er en 4. ordens differentiaalligning, der kræver to betingelser ved hver bjælkeende, ser man, at der er mulighed for at foreskrive to geometriske og to statiske randbetingelser.

Geometriske betingelser

Virtuel udbøjning lig med nul:

$$u = 0 \quad (5.3a)$$

Virtuel drejning af bjælkeende lig med nul:

$$u' = 0 \quad (5.3b)$$

Statiske betingelser

Virtuelt moment lig med nul:

$$(E_t I)_z u'' = 0 \Rightarrow u'' = 0 \quad (5.3c)$$

Virtuel forskydningskraft lig med nul:

$$-((E_t I)_z u'')' + Pu' = 0 \quad (5.3d)$$

Af disse 4 udtryk kan der dannes de velkendte understøtningsbetingelser: simpel understøtning, fast indspænding, bevægelig indspænding og fri ende. Af naturlige grunde er der, som det fremgår af (5.1b), ikke mulighed for at foreskrive både moment og vinkeldrejning eller både forskydningskraft og udbøjning lig med nul.

5.2 Vridningsstabilitet

Ved stabilitetsproblemer, hvor bøjning og torsion kan optræde samtidig, taler man om vridningsstabilitet, når der optræder en centrisk eller excentrisk normalkraft og ingen tværbelastning. Stabilitetsligningerne (4.96) - (4.98) får i dette tilfælde følgende udseende:

$$((E_t I_z u'')'' - (Pu')' + (P(z_P - z_F)\theta')' = 0 \quad (5.4)$$

$$((E_t I_y v'')'' - (Pv')' - (P(y_P - y_F)\theta')' = 0 \quad (5.5)$$

$$((E_t I_\varphi \theta'')'' - ((G_{\text{sec}} I_v + \sigma I_{PF})\theta')' + (P(z_P - z_F)u')' - (P(y_P - y_F)v')' = 0 \quad (5.6)$$

Angriber normalkraften excentrisk, har man i almindelighed ikke noget initialstabilitetsproblem, idet differentialligningerne herved bliver inhomogene og koblede. Er $y_P = y_F$ og $z_P = z_F$ svarende til lastangreb i forskydningscentret, ser man, at ligningerne (5.4) - (5.6) afkobles. De to bøjningsdifferentialligninger (5.4) og (5.5) fører sædvanligvis ikke til stabilitetsproblemer, men derimod til spændingsproblemer, idet den betragtede bjælke er udsat for de bøjende momenter $M_y = Pz_F$ og $M_z = -Py_F$. Heraf ses, at (5.4) og (5.5) kun har gyldighed for $(y_F, z_F) = (0, 0)$ og kun i dette tilfælde fører til Euler-søjleproblemet. Torsionsligningen (5.6) giver derimod anledning til et vridningsstabilitetsproblem, som i denne ukoblede form betegnes ren vridningsstabilitet.

Eksempel 5.2.1

Tilfældet ren vridningsstabilitet betragtes for en bjælke med konstant tværsnit og af et lineærelastisk materiale. Af (5.6) fås ved benyttelse af (4.64):

$$EI_\varphi \theta^{(4)} - (GI_v + \int_A \sigma ((y - y_F)^2 + (z - z_F)^2) dA) \theta'' = 0 \quad (5.7)$$

Forudsættes $(y_F, z_F) = (0, 0)$, således at normalkraften angriber gennem det elastiske tyngdepunkt, kan spændingen σ med god tilnærmelse regnes konstant over tværsnittet. Man får derfor, idet tværsnittets polære inertimoment om forskydningscentret betegnes I_{PF} :

$$EI_\varphi \theta^{(4)} - (GI_v + \frac{P}{A} I_{PF}) \theta'' = 0 \quad (5.8)$$

Antages bjælken gaffeloplågt som vist på figur 5.2, får man følgende randbetingelser ved bjælkens to ender:

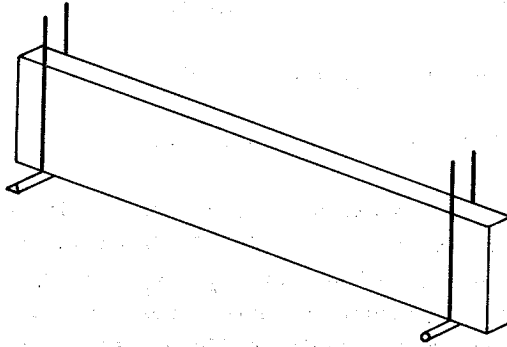


Fig. 5.2: Gaffelopløgt bjælke. Randbetingelser for torsionsvinklen
 θ : $\theta = 0$ og $\theta'' = 0$ for $x = 0$ og $x = L$.

Hindret torsion: $\theta = 0$
for $x = 0$ og $x = L$ (5.9)

Bimomentet lig med nul: $\theta'' = 0$

Løsningen svarende til egenværdiproblemet (5.8) - (5.9) er givet ved egenfunktionerne:

$$\theta = K \sin\left(\frac{n\pi}{L} x\right) \quad (5.10)$$

Indsættes (5.10) i (5.8) får man efter bortforkortning:

$$EI_{\varphi} \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 + (GI_V + \frac{P}{A} I_{PF}) = 0$$
$$\Rightarrow P = - \frac{A}{I_{PF}} (EI_{\varphi} \cdot \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 + GI_V) \quad (5.11)$$

Den mindste egenværdi og dermed den kritiske trykkraft fås for $n = 1$:

$$P_{kr} = - \frac{A}{I_{PF}} (EI_{\varphi} \left(\frac{\pi}{L}\right)^2 + GI_V) \quad (5.12)$$

For tværsnit med hvalvningsstivheden I_{φ} lig med nul får man:

$$P_{kr} = - \frac{AGI_V}{I_{PF}} \quad (5.13)$$

Af (5.13) ses, at det rene vridningsstabilitetsbrud kun er aktuelt ved tværsnit, hvor vridningsinertimomentet I_V er meget mindre end det polære inertimoment, da man ellers vil få en kritisk spænding af størrelsesorden som G , hvilken ikke er realistisk.

$$\sigma_{kr} = \frac{P_{kr}}{A} = - G \frac{I_V}{I_{PF}} \quad (5.14)$$

For usymmetriske tværsnit, hvor forskydningscentret ligger på den ene hovedakse, samt for enkelt- og dobbeltsymmetriske tværsnit består der ligeledes et vridningsstabilitetsproblem forudsat normalkraften angriber på symmetriaksen eller hovedaksen. Antages z-aksen at være denne akse, fås de styrende differentialligninger ved at sætte $y_P = y_F = 0$ i (5.4) - (5.6). Her giver (5.5), som er ukoblet, et spændingsproblem, idet bjælken udsættes for bøjningsmomentet $M_y(x) = P(x)z_P(x)$. De koblede ligninger (5.4) og (5.6) giver det generelle vridningsstabilitetsproblem. Man får

$$((E_t I)_z u'')'' - (Pu')' + (P(z_P - z_F)\theta')' = 0 \quad (5.15)$$

$$((E_t I)_\varphi \theta'')'' - ((G_{sec} I_V + \sigma I_{PF})\theta')' + (P(z_P - z_F)u')' = 0 \quad (5.16)$$

Udtrykkene (4.108) - (4.115) indeholder de relevante randbetingelser under anvendelse af $M_{Q_z} = Q_z = 0$.

5.3 Kipstabilitet

Ved stabilitetsproblemer, hvor både bøjning og torsion kan optræde samtidig, taler man om kipstabilitet, når der optræder tværbelastning. Herudover kan der samtidig optræde en normalkraftbelastning, der skal have angrebepunkt, som beskrevet under vridningsstabilitetsproblemet. Tværbelastningen skal angribe langs en hovedakse og

gennem forskydningscentret, hvilket udelukker tilfælde, hvor forskydningscentret ikke ligger på en hovedakse. I alle andre tværbelastede tilfælde end de her beskrevne består der ikke et initialkipstabilitetsproblem, men et sædvanligt spændingsproblem, som ikke behandles i denne rapport.

Antages z-aksen at være den hovedakse, hvorpå forskydningscentret ligger, skal der ifølge ovenstående bemærkninger gælde

$$M_{Q_Y} = Q_Y = q_Y = y_P = y_F = 0 \quad (5.17)$$

Indsættes (5.17) i (4.96) og (4.98), får man følgende stabilitetsligninger:

$$((E_t I)_z u''') - (P u')' + (M_{Q_z} \theta''') + (P(z_P - z_F) \theta')' = 0 \quad (5.18)$$

$$((E_t I)_\varphi \theta''') - (((G_{\text{sec}} I_v) + \sigma I_{PF}) \theta')' + M_{Q_z} u'' + (P(z_P - z_F) u')' + (a_z - z_F) q_z \theta = 0 \quad (5.19)$$

Ligning (4.97), som er bøjningsdifferentialligningen i z-retningen eller lastretningen, giver et spændingsproblem. I overensstemmelse hermed ses (4.97) at være ukoblet.

Ligningerne (5.18) og (5.19) angiver de generelle kipstabilitetsligninger, og der er ikke mulighed for en tilsvarende total afkobling som ved ren vridningsstabilitet. Formlerne (4.108) - (4.115) giver randbetingelserne under anvendelse af (5.17).

I kapitel 6 vil der blive givet en mere detaljeret fremstilling af problemerne i forbindelse med løsningen af det generelle kipstabilitetsproblem.

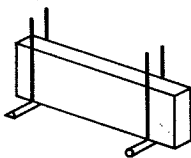
6. LØSNING AF KIPSTABILITETSPROBLEMET

I dette kapitel vil en række forhold af betydning for en praktisk gennemførlig løsning af kipstabilitetsproblemet blive belyst.

6.1 Randbetingelser

Helt analog med søjleproblemet vil randbetingelser, som giver bjælken større frihed, øge faren for kipning. Det er derfor bjælker med sådanne understøtningsbetingelser, der i praksis især er relevante at undersøge for kipning. Det vil ofte sige bjælker i montagesituationer, hvor disse kan være under ophejsning eller provisorisk afstivning. Her vil to typer af understøtningsbetingelser, som er relevante i denne forbindelse, blive behandlet: gaffeloplægning og wireophængning.

A.



B.

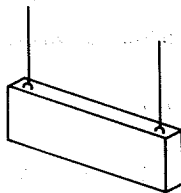


Fig. 6.1: A: Gaffeloplægning. B: Wireophængning.

Gaffeloplægning

Dette tilfælde giver anledning til meget simple randbetingelser, idet både tværflytningen u og torsionen θ er forhindrede (se formlerne 4.108 og (4.110)).

$$u = 0 \quad \text{for } x = 0 \text{ og } x = L \quad (6.1)$$

$$\theta = 0 \quad (6.2)$$

Endvidere er momentet om den lodrette z -akse lig med nul (se (4.112)):

$$(E_t I)_z u'' = 0 \quad \text{for } x = 0 \text{ og } x = L \quad (6.3)$$

I (6.3) er $(E_t I)_z \neq 0$, hvilket giver

$$u'' = 0 \quad \text{for } x = 0 \text{ og } x = L \quad (6.4)$$

Idet bjælkens ender frit kan hvælve sig og er belastningsfrie, fås den sidste randbetingelse af (4.114), da bimomentet under de nævnte betingelser er lig med nul:

$$(E_t I)_\varphi \theta'' = 0 \quad \text{for } x = 0 \text{ og } x = L \quad (6.5)$$

Er $(E_t I)_\varphi \neq 0$ kan man skrive (6.5) på formen

$$\theta'' = 0 \quad \text{for } x = 0 \text{ og } x = L \quad (6.6)$$

Er $(E_t I)_\varphi = 0$ er (6.5) identisk opfyldt, og θ vil derfor kun have randbetingelser givet ved (6.2). Dette er også tilstrækkeligt, idet vridningsdifferentialligningen (5.19) for $(E_t I)_\varphi = 0$ reduceres til en 2. ordens differentialligning.

De ønskede randbetingelser ved gaffeloplægning er hermed givet ved:

$$(E_t I)_\varphi \neq 0:$$

$$u = u'' = \theta = \theta'' = 0 \quad \text{for } x = 0 \text{ og } x = L \quad (6.7)$$

$$(E_t I)_\varphi = 0:$$

$$u = u'' = \theta = 0 \quad \text{for } x = 0 \text{ og } x = L \quad (6.8)$$

Wireophængning

Wireophængningen giver anledning til mere komplicerede randbetingelser end gaffeloplægningen, og randbetingelserne (4.108) - (4.115) kan ikke alle benyttes direkte, idet de virtuelle flytninger og drejninger af bjælkeenderne medfører virtuelle tilbageføringsmomenter. Da kun de lodrette komponenter af kabelreaktionerne indgår i randbetingelserne, betragtes i dette afsnit ikke hældende kabler.

Formlerne (4.112) og (4.114), som angiver momentet om den lodrette z-akse, henholdsvis bimomentet, kan anvendes i deres oprindelige udformning, idet bjælketværsnittene ved wireophængningspunkterne frit kan dreje sig i vandret plan og frit kan hvælve sig.

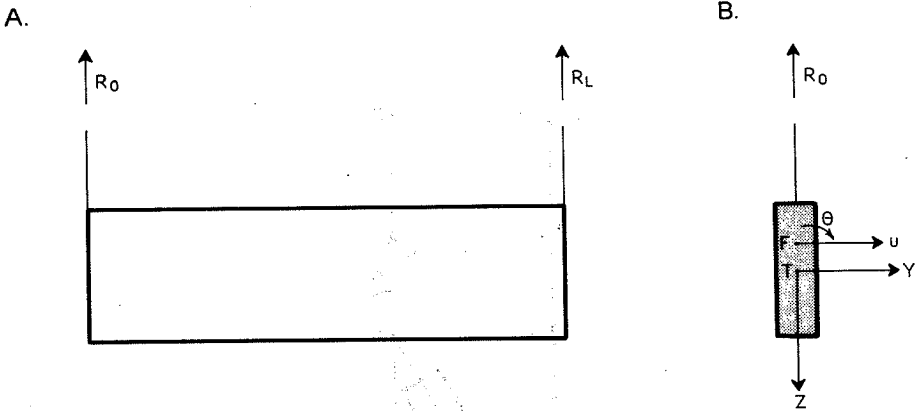


Fig. 6.2: A: Wireophængt bjælke med wirereaktioner R_0 og R_L .
 B: θ og u angiver de positive retninger af de virtuelle drejninger og flytninger af forskydningscentret F . Koordinatsystemet er indlagt med origo i det elastiske tyngdepunkt T .

Moment om den lodrette z -akse lig med nul:

$$(E_t I)_z u'' = 0 \Rightarrow u'' = 0 \quad \text{for } x = 0 \text{ og } x = L \quad (6.9)$$

Bimoment lig med nul for $(E_t I)_\varphi \neq 0$:

$$\theta'' = 0 \quad \text{for } x = 0 \text{ og } x = L \quad (6.10)$$

For $(E_t I)_\varphi = 0$ er (6.10) ikke nødvendig.

Foruden ovenstående to randbetingelser kræves yderligere to betingelser, som vil blive udledt i det følgende.

På fig. 6.3 betragtes den ene bjælkeende af en wireophængt bjælke underkastet en virtuel deformationstilstand givet ved u og θ .

Bjælken er stift forbundet med punktet A , som betegnes ophængningspunktet, medens B betegner wireophængningspunktet.

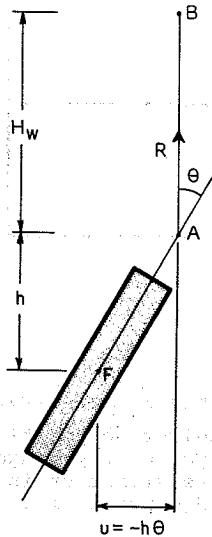


Fig. 6.3: Principskitse for wireophængt bjælke.

Wiren og reaktionen R vil forblive lodret, idet belastningen er lodret, og der ikke kan overføres forskydningskræfter gennem wiren. Dette betyder, at forskydningskraften i vandret plan er nul for wireophængningstværsnittet, hvorved udtrykket (4.113) for forskydningskraften i vandret retning kunne tænkes at give den ene af de to søgte randbetingelser.

$$(4.113): -((E_t I)_z u'')' + P u' - (M_Q \theta)' - P(z_P - z_F) \theta' = 0 \quad (6.11)$$

Benyttes ved begge bjælkeender de statiske betingelser (6.09) og (6.11), som giver randbetingelserne for u , ser man, at disse kun kan give en bestemmelse af u på nær en konstant. Det er derfor nødvendigt at erstatte (6.11) med en geometrisk betingelse, som

indeholder u direkte. På figur 6.3 ser man, at der eksisterer følgende geometriske betingelse:

$$u = -h \cdot \theta \quad \text{for } x = 0 \text{ og } x = L \quad (6.12)$$

hvor h er afstanden fra forskydningscentret til ophængningspunktet A. Formel (6.12) angiver, at punktet A ligger fast svarende til, at kablet forbliver lodret. Matematisk kan man dog ligeså godt fastholde forskydningscentret og give punkt A en udbøjning på $h \cdot \theta$, hvilket giver den mere bekvemme randbetingelse

$$u = 0 \quad \text{for } x = 0 \text{ og } x = L \quad (6.13)$$

Den sidste randbetingelse fås ved modifikation af formel (4.115) for det virtuelle torsionsmoment.

$$(4.115): - ((E_t I) \varphi \theta'')' + ((G_{\text{sec}} I_v + (\sigma I_{PF})) \theta)' - (M_{Q_z} + P(z_P - z_F)) u' + (a_z - z_F) Q_z \theta = 0 \quad (6.14)$$

Formel (6.14) svarer til torsionsrandbetingelsen ved en fri ende, hvor der ikke optræder noget tilbageføringsmoment. Et sådant moment eksisterer derimod ved wireophængte bjælker og består af det kraftpar, der udgøres af wirereaktionen og forskydningskraften i bjælken ved wireophængningstværsnittet. Forskydningskraftens moment om forskydningscentret $(a_z - z_F) Q_z \theta$ er medtaget i formel (6.14), og det er derfor kun nødvendigt at tilføje wirereaktionens moment om forskydningscentret. Betragter man fig. 6.3, ser man, at wirereaktionens bidrag til det virtuelle tilbageføringsmoment er givet ved

$$V = h R \theta \quad (6.15)$$

Med den i formel (6.14) anvendte fortegnsregning kan den søgte randbetingelse for det virtuelle torsionsmoment skrives

$$- ((E_t I) \varphi \theta'')' + ((G_{\text{sec}} I_v + (\sigma I_{PF})) \theta)' - (M_{Q_z} + P(z_P - z_F)) u' + (a_z - z_F) Q_z \theta = -h R \theta \quad (6.16)$$

Skrives h som $H-z_F$, hvor H er afstanden fra ophængningspunktet til det anvendte koordinatsystems begyndelsespunkt, får (6.16) følgende udseende, idet $Q_z = -R$:

$$\begin{aligned}
 & - ((E_t I)_\varphi \theta'')' + ((G_{\text{sec}} I_V) + (\sigma I_{PF})) \theta' \\
 & - (M_{Q_z} + P(z_P - z_F)) u' + (H - a_z) R \theta = 0
 \end{aligned} \tag{6.17}$$

For $(E_t I)_\varphi = 0$ forsvinder første led i (6.17).

Samtlige randbetingelser for den wireophængte bjælke udgøres hermed af formlerne (6.9), (6.19), (6.13) og (6.17).

Randbetingelser generelt

Ved anvendelse af de i dette afsnit udledte randbetingelser, samt formel (4.107) kan randbetingelserne til kipproblemet inkluderende wireophængning skrives på følgende måde:

$$\begin{aligned}
 & [(E_t I)_z u'' u']_0^L + [(E_t I)_\varphi \theta'' \theta']_0^L \\
 & + [(-(E_t I)_z u'')' + Pu' - (M_{Q_z} \theta)' - P(z_P - z_F) \theta'] u_0^L \\
 & + [(-(E_t I)_\varphi \theta'')' + ((G_{\text{sec}} I_V) + (\sigma I_{PF})) \theta'] \\
 & - (M_{Q_z} + P(z_P - z_F)) u' + (H - a_z) R \theta]_0^L = 0
 \end{aligned} \tag{6.18}$$

6.2 Tværsnitskonstanter og forskydningscenter

I dette afsnit omtales beregningen af nogle af de tværsnitskonstanter, som indgår i kipstabilitetsligningerne (5.18) og (5.19), samt beregningen af forskydningscentrets placering. I det generelle tilfælde varierer størrelsen af disse tværsnitskonstanter og placeringen af forskydningscentret hen langs bjælkeaksen, idet de ikke-lineære materialeegenskaber bevirker, at disse størrelser bliver belastningsafhængige.

I forarbejdet [Pedersen.79-1] til denne rapport er de tværsnitskonstanter, som vedrører bøjningstilstanden, behandlet. De øvrige

tværsnitskonstanter, som alle omtales her, er hvælvningsstivheden, vridningsstivheden og det polære inertimoment vægtet med tværsnittets normalspændinger. Endvidere omtales beregningen af forskydningscentrets z-koordinat. Den tilhørende y-koordinat er lig med nul, idet koordinatsystemet er orienteret på en sådan måde, at tværsnittet og belastningen er symmetriske om z-aksen.

6.2.1 Hvælvningsfunktionen

En forudsætning for beregningen af de nævnte størrelser er, at man for de enkelte tværnit kender den i afsnit 4.3 definerede hvælvningsfunktion $\varphi(y, z)$.

For tilfældet ren torsion uden hvælvningshindring kan φ bestemmes af følgende partielle differentiaalligning:

$$G(z) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial}{\partial z} (G(z) \frac{\partial \varphi}{\partial z}) = (y - y_F) \frac{\partial G(z)}{\partial z} \quad (6.19)$$

Den tilhørende randbetingelse (6.20) udtrykker, at spændingen vinkelret på den belastningsfrie rand er nul:

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} + (z - z_F) \right) dy - \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z} - (y - y_F) \right) dz = 0 \quad (6.20)$$

Udtrykkene (6.19) og (6.20) fremkommer på følgende måde:

Idet ligevægtsligningerne ved ren torsion er givet ved

$$\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = \sigma_{yz} = 0 \quad (6.21)$$

$$\frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial x} = \frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial x} = 0 \quad (6.22)$$

$$\frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} = 0 \quad (6.23)$$

fås (6.19) ved at indsætte σ_{xy} og σ_{xz} i (6.23).

Ved brug af (4.44) og (4.45) fås:

$$\sigma_{xy} = 2G\epsilon_{xy} = -G\theta' \left((z - z_F) + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) \quad (6.24)$$

$$\sigma_{xz} = 2G\varepsilon_{xz} = G\theta'((y-y_F) - \frac{\partial\varphi}{\partial z}) \quad (6.25)$$

Formlerne (6.23), (6.24) og (6.25) giver herefter

$$\frac{\partial}{\partial y} (G(\frac{\partial\varphi}{\partial y} + (z-z_F))) + \frac{\partial}{\partial z} (G(\frac{\partial\varphi}{\partial z} - (y-y_F))) = 0 \quad (6.26)$$

Idet tværsnittet og den betragtede belastning er symmetrisk om z-aksen, er den belastningsafhængige forskydningsmodul G kun en funktion af z, og (6.26) kan derfor reduceres til følgende udtryk, som er identisk med (6.19).

$$G(z) \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial}{\partial z} (G(z) \frac{\partial\varphi}{\partial z}) = (y-y_F) \frac{\partial G(z)}{\partial z} \quad (6.27)$$

Randbetingelsen (6.20) udledes på lignende måde ud fra

$$\frac{\sigma_{xz}}{\sigma_{xy}} = \frac{dz}{dy} \quad , \quad (6.28)$$

som udtrykker, at spændingerne på randen er tangentielle til denne. Ovenstående fremgangsmåde er benyttet i [Mehlhorn.70-1] og [Mehlhorn.73-3] til bestemmelse af hvælvningsfunktionen i forbindelse med kipstabilitetsproblemer.

En alternativ repræsentation af (6.19) og (6.20) kan opnås ved benyttelse af en spændingsfunktion ψ defineret ved følgende udtryk

$$-\frac{\partial\psi}{\partial y} = \sigma_{xz} = G((y-y_F) - \frac{\partial\varphi}{\partial z}) \quad (6.29)$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial z} = \sigma_{xy} = -G((z-z_F) + \frac{\partial\varphi}{\partial y}) \quad (6.30)$$

Ifølge (6.29) og (6.30) gælder der

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2} &= \frac{\partial}{\partial y} (G(\frac{\partial\varphi}{\partial z} - (y-y_F))) \\ &- \frac{\partial}{\partial z} (G(\frac{\partial\varphi}{\partial y} + (z-z_F))) \\ \Rightarrow \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2} &= \frac{\partial G(y)}{\partial y} (\frac{\partial\varphi}{\partial z} - (y-y_F)) - 2G(y) \end{aligned} \quad (6.31)$$

Omformes (6.29) til

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z} = \frac{1}{G} \frac{\partial \psi}{\partial y} + (y - y_F) \quad (6.32)$$

og indsættes i (6.31) fås

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} - \frac{1}{G} \frac{\partial G}{\partial y} \frac{\partial \psi}{\partial y} &= -2G \\ \Rightarrow \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} - \frac{\partial (\ln G)}{\partial y} \frac{\partial \psi}{\partial y} &= -2G \end{aligned} \quad (6.33)$$

Randbetingelsen for ψ fås af (6.28)

$$\begin{aligned} \sigma_{xy} dz - \sigma_{xz} dy &= 0 \\ \Rightarrow \frac{\partial \psi}{\partial z} dz + \frac{\partial \psi}{\partial y} dy &= d\psi = 0 \end{aligned} \quad (6.34)$$

Af (6.34) ser man, at spændingsfunktionen på randen er konstant, specielt nul.

Løsningen af ovenstående randværdiproblemer er meget komplicerede, omfattende og tidskrævende, hvilket også gælder i tilfælde, hvor der anvendes EDB. Blandt andet gør en speciel tværsnitsgeometri det vanskeligt at anvende differensmetoder, medens de ikkelineære materialeegenskaber vanskeliggør benyttelsen af integralligningsmetoder. I [Mehlhorn.71-5] er problemet løst for lineære materialer og vilkårlige tværsnit ved brug af en integralmetode. En ulempe ved de opstillede randværdiproblemer (6.19) - (6.20) og (6.33) - (6.34) er endvidere, at de kun gælder for ren torsion, og derfor kun i specielle tilfælde kan anvendes i forbindelse med kipstabilitetsproblemer. En beregning på basis af elementmetoden med hensyntagen til de korrekte ligevægtsligninger er foretaget i [Link. 74-4]. Ved betonbjælker vil tilstedeværelsen af armeringsjern og eventuelle revner endvidere have stor indflydelse på tværsnitshvælvningen, hvilket der ikke kan tages hensyn til i de opstillede ligninger. Man kan derfor af ovenstående bemærkninger konkludere, at man på trods af de komplicerede beregninger kun opnår moderat nøjagtige resultater ved anvendelse af de angivne ligninger. I denne rapport vil der derfor blive anvendt en simplificeret fremgangsmåde, som omtales i afsnit 6.2.3.

6.2.2 Forskydningscentrets placering

For lineære materialer er der i [Trefftz.35-1] udledt formler for forskydningscentrets placering. Formel (6.35) angiver udtrykket for forskydningscentrets z-koordinat.

$$z_F = - \frac{1}{I_Z} \int \varphi y dA \quad , \quad (6.35)$$

hvor I_Z er inertimomentet om z-aksen, og fladeintegralet udføres over det betragtede tværsnit.

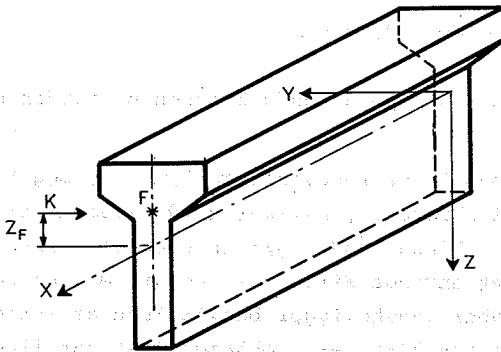


Fig. 6.4: Hvælvningsfrit indspændt bjælke påvirket af en horisontal tværkraft.

En fremgangsmåde helt analog til Trefftz er for ikkelineære materialer foretaget i [Mehlhorn.73-3]. Betragtes en hvælvningsfrit indspændt bjælke påvirket af en vandret tværkraft, se figur 6.4, vil denne udelukkende fremkalde bøjning i bjælken, hvis lastangrebet sker gennem forskydningscentret. En bestemmelse af dette lastangrebspunkts z-koordinat vil derfor give forskydningscentrets z-koordinat z_F , medens y-koordinaten y_F er lig med nul, idet kipning, som nævnt i afsnit 5.3, kun er aktuel for enkelt- eller dobbeltsymmetriske tværsnit. Antages elasticitetsmodulen at være en funktion af z , får man:

$$E = E(z) \quad \text{og} \quad G(z) = \frac{E(z)}{2(1+\nu)} \quad (6.36)$$

For den betragtede belastning gælder der:

$$\sigma_y = \sigma_z = \sigma_{yz} = \frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial x} = \frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial x} = 0 \quad (6.37)$$

Ligevægtsbetingelsen for x-retningen giver herefter:

$$\frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial z} + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} = 0 \quad (6.38)$$

Normalspændingen σ_x er givet ved

$$\sigma_x = - \frac{M_z(x)}{(EI)_z} E(z)y = - \frac{K(\ell-x)}{(EI)_z} E(z)y, \quad (6.39)$$

hvor ℓ er bjækelængden.

Indsættes (6.39) i (6.38) fås

$$\frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial z} = - \frac{K}{(EI)_z} E(z)y \quad (6.40)$$

Deles spændingerne op i bidrag fra henholdsvis torsion σ_{yxT} , σ_{zxT} og bøjning σ_{yxB} , σ_{zxB} , kan man, når K angriber gennem forskydningscentret, opskrive følgende udtryk, som skyldes Trefftz:

$$\int_A \frac{1}{G} (\sigma_{yxT} \cdot \sigma_{yxB} + \sigma_{zxT} \cdot \sigma_{zxB}) dA = 0 \quad (6.41)$$

Formel (6.41) udtrykker, at de resulterende forskydningsspændinger fra torsionen ved den betragtede deformationstilstand ikke udfører noget arbejde.

Idet alle tværsnit frit kan hvælve sig, er der tale om fri vridning, og tyngdepunktsaksen kan derfor vælges som rotationsakse. Heraf følger, at σ_{yxT} og σ_{zxT} kan skrives

$$\sigma_{yxT} = - G\theta' \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} + z \right) \quad (6.42)$$

$$\sigma_{zxT} = - G\theta' \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z} - y \right) \quad (6.43)$$

Indsættes (6.42) og (6.43) i (6.41) fås

$$\begin{aligned} & \int_A \left(\left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} + z \right) \sigma_{yxB} + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z} - y \right) \sigma_{zxB} \right) dA = 0 \\ & \Rightarrow \int_A (z \sigma_{yxB} - y \sigma_{zxB}) dA \\ & = - \int_A \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} \sigma_{yxB} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \sigma_{zxB} \right) dA \end{aligned} \quad (6.44)$$

Opstilles torsionsligningen mellem de indre og ydre kræfter fås

$$\begin{aligned} Kz_F &= \int_A (z \sigma_{yxB} - y \sigma_{zxB}) dA \\ &+ \int_A (z \sigma_{yxT} - y \sigma_{zxt}) dA \end{aligned} \quad (6.45)$$

Idet lastangrebet sker gennem forskydningscentret, er det andet integral i (6.45) ifølge definitionen på forskydningscentret lig med nul.

$$Kz_F = \int_A (z \sigma_{yxB} - y \sigma_{zxB}) dA \quad (6.46)$$

Indsættes (6.46) i (6.44), og benyttes delvis integration på højresiden af (6.44), får man

$$\begin{aligned} Kz_F &= \int_A \varphi \left(\frac{\partial \sigma_{yxB}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zxB}}{\partial z} \right) dA \\ &- \oint_L \varphi (\sigma_{yxB} dz - \sigma_{zxB} dy) \end{aligned} \quad (6.47)$$

Da forskydningsspændingerne på randen er tangentielle til denne, er det angivne cirkulationsintegral lig med nul. Man får

$$Kz_F = \int_A \varphi \left(\frac{\partial \sigma_{yxB}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zxB}}{\partial z} \right) dA \quad (6.48)$$

Det endelige udtryk for z_F fås herefter ved indsættelse af (6.40) i (6.48).

$$z_F = - \frac{1}{(EI)_z} \int_A \varphi(y, z) E(z) y dA \quad (6.49)$$

Sætter man $E = E(z)$ konstant i (6.49), ses (6.49) at være identisk med Trefftz's udtryk (6.35).

6.2.3 Simplificeret beregning af tværsnitskonstanter og forskydningscenter

I det følgende vil der kun blive behandlet rektangulære tværnit, samt T- og I-tværnit, idet disse er de mest relevante i forbindelse med kipning af betonbjælker. For rektangulære, massive tværnit foreslog Vlasov [Vlasov.40-1] følgende simplificerede hvalvningsfunktion

$$\varphi(y, z) = - yz \quad (6.50)$$

som indirekte allerede var blevet benyttet af Timoshenko [Timoshenko. 10-1] for tyndfligede, dobbeltsymmetriske I-tværnit.

I det følgende vil hvalvningsfunktionen givet ved (6.50) blive benyttet.

I. Rektangulære tværnit

A. Forskydningscenter

Indsættes (6.50) i (6.49), fås

$$\begin{aligned} z_F &= \frac{1}{(EI)_z} \int_A zE(z)y^2 dA \\ &= \frac{1}{(EI)_z} \cdot \frac{I_z}{t} \int_A zE(z) dz = 0 \end{aligned} \quad (6.51)$$

idet koordinatsystemets begyndelsespunkt er det elastiske tyngdepunkt. Man får derfor

$$(y_F, z_F) = (0, 0) \quad (6.52)$$

I (6.51) betegnes tværsnitsbredden med t .

B. Torsionsstivhed

Torsionsstivheden er givet ved formel (4.71):

$$(4.71): (G_{\text{sec}} I_V) = \int_A G_{\text{sec}} \left((z - z_F) + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^2 + \left((y - y_F) - \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)^2 dA$$

I eksempel 4.3.1 er det velkendte resultat for et lineært elastisk materiale angivet:

$$(4.75): G I_V = \frac{1}{3} G \ell t^3 = \frac{2}{1+\nu} E I_Z$$

hvor ℓ og t er tværsnittets højde og bredde, og $E I_Z$ er bøjningsstivheden om den lodrette tyngdepunktsakse.

Indsættes (6.50) og (6.52) i (4.71) fås

$$\begin{aligned} (G_{\text{sec}} I_V) &= \int_A G_{\text{sec}} (2y)^2 dA \\ &= \frac{4}{2(1+\nu)} \int_A E_{\text{sec}} y^2 dA = \frac{2}{1+\nu} (E I)_Z \end{aligned} \quad (6.53)$$

Formel (6.53) gælder for tværsnit, hvor bredden er lille i forhold til højden, idet forskydningsspændingerne i y -retningen her kun i ringe grad bidrager til torsionsmomentet. For mindre ℓ/t forhold er det nødvendigt at anvende en korrektionsfaktor η i formel (6.53). Her vil der blive benyttet et udtryk angivet i [Jeltsch.71-2]

$$\eta = 1 - \frac{192}{\pi^5} \frac{t}{\ell} \tanh\left(\frac{\pi \ell}{2t}\right) \quad (6.54)$$

Sættes $\tanh\left(\frac{\pi \ell}{2t}\right)$ lig med 1, fås et mere simpelt udtryk, som ofte anvendes

$$\eta = 1 - 0.63 \cdot \frac{t}{\ell} \quad (6.55)$$

Det endelige udtryk for torsionsstivheden kan herefter skrives

$$(G_{\text{sec}} I_V) = \eta \frac{2}{1+\nu} (E I)_Z, \quad (6.56)$$

hvor η er givet ved (6.54). $(E I)_Z$ beregnes for det effektive tværsnit inklusive bidrag fra den slappe og forspændte armering.

C. Hvælvningsstivhed

For rektangulære tværsnit ses bort fra hvælvningsstivheden. Undtaget herfra er dog tilfælde, hvor armeringsplaceringen kan skønnes at give anledning til bidrag til hvælvningsstivheden, se figur 6.5.b. Ønskes dette bidrag medtaget i beregningerne, sker dette ved at opfatte det rektangulære tværsnit som et I-tværsnit, se figur 6.5.c.

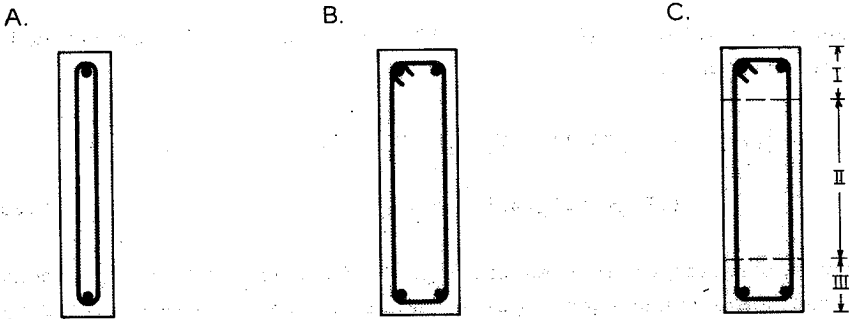


Fig. 6.5: Armeringens bidrag til hvælvningsstivheden.

a: Kan negligeres.

b: Kan ikke negligeres.

c: Det rektangulære tværsnit betragtet som et I-tværsnit.

Udtryk for hvælvningsstivheden er angivet under afsnittet om I-tværsnit.

D. Polært inertimoment

Det polære inertimoment med hensyn til forskydningscentret vægtet med normalspændingen (σ_{PF}) er givet ved (se formel (4.64)):

$$\begin{aligned}
 (\sigma_{PF}) &= \int_A \sigma ((y-y_F)^2 + (z-z_F)^2) dA \\
 &= \int_A \sigma (y^2+z^2) dA + (y_F^2+z_F^2) \int_A \sigma dA \\
 &\quad - 2 y_F \int_A \sigma y dA - 2 z_F \int_A \sigma z dA
 \end{aligned} \tag{6.57}$$

Idet koordinatsystemets begyndelsespunkt er sammenfaldende med det elastiske tyngdepunkt, og belastningen angriber i xz-planen, får man

$$\int_A \sigma_y dA = 0 \quad (6.58)$$

$$\int_A \sigma_z dA = M_y \quad (6.59)$$

Indsættes (6.58) og (6.59) i (6.57) fås, idet $\int_A \sigma dA$ er lig med normalkraften P :

$$\begin{aligned} (\sigma I_{PF}) &= (\sigma I)_z + (\sigma I)_y + (y_F^2 + z_F^2)P - 2z_F M_y \\ &= (\sigma I)_z + (\sigma I)_y + z_F^2 P - 2z_F M_y \end{aligned} \quad (6.60)$$

hvor symmetrien om z-aksen giver $y_F = 0$. $(\sigma I)_z$ og $(\sigma I)_y$ angiver de med normalspændingen vægtede inertimomenter om tværsnittets tyngdepunktsakser.

Ved rektangulære tværsnit er $(y_F, z_F) = (0, 0)$ ifølge formel (6.52), og for disse tværsnit gælder der derfor

$$(\sigma I_{PF}) = (\sigma I)_z + (\sigma I)_y \quad (6.61)$$

For øvrige tværsnit symmetriske om z-aksen gælder formel (6.60).

II. I-tværsnit

A. Forskydningscenter

Af symmetri Grunde er $y_F = 0$, se figur 6.6.

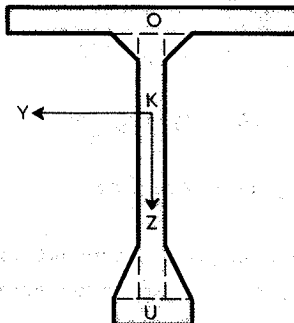


Fig. 6.6: I-tværsnit. Flangerne består af områderne O og U, kroppen af område K.

Indsætter man (6.50) i (6.49), får man

$$\begin{aligned}
 z_F &= \frac{1}{(EI)_z} \int_A z E(z) y^2 dA \\
 &= \frac{1}{(EI)_z} (z_{TO} \int_{A_O} E(z) y^2 dA_O \\
 &\quad + z_{TK} \int_{A_K} E(z) y^2 dA_K + z_{TU} \int_{A_U} E(z) y^2 dA_U) \\
 &= \frac{1}{(EI)_z} (z_{TO} \cdot (EI)_{zO} + z_{TK} \cdot (EI)_{zK} + z_{TU} \cdot (EI)_{zU}) \quad , \quad (6.62)
 \end{aligned}$$

hvor z_{TO} , z_{TK} , z_{TU} og $(EI)_{zO}$, $(EI)_{zK}$, $(EI)_{zU}$ er henholdsvis z-kordinater for de elastiske tyngdepunkter og bøjningsstivheder om z-aksen for delarealerne O, K og U under hensyntagen til revnedannelse i betonen og bidrag fra armeringen. Bidraget fra $z_{TK} \cdot (EI)_{zK}$ er relativt beskedent og kan ofte udelades.

B. Torsionsstivhed

Ifølge det benyttede flytningsfelt, se formlerne (4.40) og (4.41), beholder tværnittene deres form. Dette betyder, at de enkelte tværsnitsdele ved en given rotation undergår den samme rotation. Man har derfor

$$\theta' = \frac{V}{(G_{\text{sec}} I_V)} = \frac{V_i}{(G_{\text{sec}} I_V)_i} \quad , \quad (6.63)$$

hvor V og $(G_{\text{sec}} I_V)$ er torsionsmomentet og torsionsstivheden for hele tværnittet, medens V_i og $(G_{\text{sec}} I_V)_i$ svarer til deltværnittet i . Af formel (6.63) fås

$$V_i = \frac{V}{(G_{\text{sec}} I_V)} (G_{\text{sec}} I_V)_i \quad (6.64)$$

Ved summation over alle deltværnsnit fås

$$\begin{aligned}
 V &= \sum_{i=1}^n V_i = \frac{V}{(G_{\text{sec}} I_V)} \sum_{i=1}^n (G_{\text{sec}} I_V)_i \\
 \Rightarrow (G_{\text{sec}} I_V) &= \sum_{i=1}^n (G_{\text{sec}} I_V)_i \quad (6.65)
 \end{aligned}$$

Indsættes (6.56) i (6.65), fås udtrykket for torsionsstivheden af et sammensat tværnsnit.

$$(G_{\text{sec}I_V}) = \frac{2}{1+\nu} \sum_{i=1}^n \eta_i (EI)_i \quad , \quad (6.66)$$

hvor $(EI)_i$ er den mindste af deltværnsnit i 's bøjningsstivheder.
For I -tværsnittet fås

$$(G_{\text{sec}I_V}) = \frac{2}{1+\nu} (\eta_O \cdot (EI)_{YO} + \eta_K \cdot (EI)_{ZK} + \eta_U \cdot (EI)_{YU}) \quad (6.67)$$

C. Hvælvningsstivhed

Hvælvningsstivheden er ifølge (4.58) givet ved

$$(EI)_\varphi = \int_A E \varphi^2 dA \quad , \quad (6.68)$$

hvor den normaliserede hvælvningsfunktion kan skrives

$$\varphi(y, z-z_F) = -y(z-z_F) \quad (6.69)$$

Indsættes (6.69) i (6.68), får man

$$\begin{aligned} (EI)_\varphi &= \int_A E y^2 (z-z_F)^2 dA \\ &= (z_{TO}-z_F)^2 \int_{A_O} E y^2 dA_O + (z_{TU}-z_F)^2 \int_{A_U} E y^2 dA_U \\ &\quad + \int_{A_K} E y^2 (z-z_F)^2 dA_K \\ &= (z_{TO}-z_F)^2 (EI)_{ZO} + (z_{TU}-z_F)^2 (EI)_{ZU} \quad , \quad (6.70) \end{aligned}$$

idet det sidste integral er lille sammenlignet med de to første.

Benytter man herefter udtrykket (6.62) for z_F med udeladelse af det uvæsentlige bidrag fra bjælkekroppen, giver (6.70) følgende udtryk for I -tværsnittets hvælvningsstivhed:

$$\begin{aligned} (EI)_\varphi &= \frac{1}{(EI)_Z^2} (z_{TO}-z_{TU})^2 ((EI)_{ZU}^2 \cdot (EI)_{ZO} + (EI)_{ZO}^2 \cdot (EI)_{ZU}) \\ &= \frac{(EI)_{ZU} \cdot (EI)_{ZO}}{(EI)_{ZU} + (EI)_{ZO}} (z_{TO}-z_{TU})^2 \end{aligned}$$

$$= \frac{(EI)_{zU} \cdot (EI)_{zO}}{(EI)_{zU} + (EI)_{zO}} d^2, \quad (6.71)$$

hvor

$$d = z_{TU} - z_{TO} \quad (6.72)$$

angiver afstanden mellem flangernes tyngdepunkter.

D. Polært inertimoment

Det polære inertimoment vægtet med normalspændingen er givet ved formel (6.60)

III. T-tværsnit

A. Forskydningscenter

Af symmetri Grunde er $y_F = 0$, se figur 6.7.

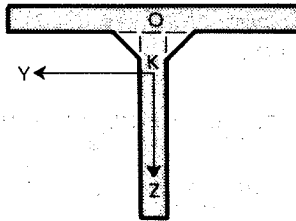


Fig. 6.7: T-tværsnit. Overflangen består af området O og kroppen af området K.

Forskydningscentrets z-koordinat fås direkte af formel (6.62) ved at sætte $(EI)_{zU}$ lig med nul.

$$z_F = \frac{1}{(EI)_z} (z_{TO} \cdot (EI)_{zO} + z_{TK} \cdot (EI)_{zK}) \quad (6.72)$$

B. Torsionsstivhed

Med $(EI)_{yU} = 0$ giver formel (6.67) direkte

$$(G_{\text{sec } I_V}) = \frac{2}{1+\nu} (\eta_O (EI)_{YO} + \eta_K (EI)_{ZK}) \quad (6.73)$$

C. Hvælvningsstivhed

Ønskes T-tværsnittets hvælvningsstivhed taget i regning, sker dette på samme måde som ved det rektangulære tværsnit ved at opfatte tværsnittet som et I-tværsnit, se figur 6.5.c. Udtryk for hvælvningsstivheden er angivet under afsnittet om I-tværsnit.

D. Polært inertimoment

Det polære inertimoment vægtet med normalspændingen er givet ved formel (6.60).

6.3 Egenværdiproblemet

I dette afsnit vil kipstabilitetsproblemet styrende differential-ligninger med tilhørende randbetingelser blive omformuleret, således at de mere direkte afspejler det søgte egenværdiproblem. Differentialligningerne er givet ved (5.18) og (5.19), medens randbetingelserne er givet dels ved (6.7) og (6.8), dels ved (6.9), (6.10), (6.13) og (6.17).

$$(5.18): ((E_t I)_Z u'')'' - (P_{\text{tot}} u')' + (M_{Q_Z} \theta)'' + (P_{\text{tot}} (z_P - z_F) \theta')' = 0$$

$$(5.19): ((E_t I)_\varphi \theta'')'' - (((G_{\text{sec } I_V}) + \sigma I_{PF}) \theta')'$$

$$+ M_{Q_Z} u'' + (P_{\text{tot}} (z_P - z_F) u')' + (a_Z - z_F) q_Z \theta = 0$$

De optrædende momenter og kræfter spaltes op i to bidrag, hvoraf det ene er uafhængigt af belastningsfaktoren (egenværdien) λ , medens det andet består af belastningsfaktoren λ multipliceret med en størrelse, som repræsenterer det betragtede belastningsbidrags relative størrelse.

Følgende betegnelser og notationsforenklinger indføres:

$$(E_t I)_Z \sim EI, (E_t I)_\varphi \sim EI_\varphi, (G_{\text{sec } I_V}) \sim GI_V \quad (6.74)$$

$$M_{Q_Z} = (M_O + M_Q(x)) + \lambda (M_{O\lambda} + M_{Q\lambda}(x)) \quad , \quad (6.75)$$

hvor M_0 er et konstant moment, medens M_q angiver momentet fra tværbelastningen.

$$P_{\text{tot}}(x) = P(x) + \lambda P_\lambda(x) \quad (6.76)$$

$$P_{\text{tot}}(x)(z_P(x) - z_F(x)) = P(x)a_P(x) + \lambda P_\lambda(x)a_{P\lambda}(x), \quad (6.77)$$

hvor P_{tot} angiver summen af de virkende normalkræfter og $a_{P\lambda} = z_{P\lambda} - z_F$.

Med ovenstående opspaltning er det muligt at lade en del af belastningen være uafhængig af λ . Dette giver f.eks. mulighed for at bestemme en bjælkes kiplast for en given belastningskonfiguration, samtidig med at bjælken er påvirket af en konstant egenvægtsbelastning. Da det er muligt at lade flere påvirkninger, som afhænger af λ , virke samtidig, skal der gælde, at disse påvirkningers indbyrdes forhold er konstante.

Indsættes udtrykkene (6.74) - (6.77) i (5.18) og (5.19) fås de endelige udtryk for stabilitetsligningerne.

$$\begin{aligned} & (EI u'''' - ((P + \lambda P_\lambda) u')' + ((M_0 + M_q) \theta)'' + (P a_P \theta')') \\ & = -\lambda(((M_{0\lambda} + M_{q\lambda}) \theta)'' + (P_\lambda a_{P\lambda} \theta')') \end{aligned} \quad (6.78)$$

$$\begin{aligned} & (EI \varphi'''' - ((GI_V + \sigma I_{PF}) \theta')' + (M_0 + M_q) u'' \\ & + (P a_P u')' + (a_q q + \lambda a_{q\lambda} q_\lambda) \theta \\ & = -\lambda((M_{0\lambda} + M_{q\lambda}) u'' + (P_\lambda a_{P\lambda} u')') \end{aligned} \quad (6.79)$$

Randbetingelserne ved gaffeloplægning kan ifølge (6.7) uændret skrives.

$$u = u'' = \theta = \theta'' = 0 \quad \text{for } x = 0 \text{ og } x = L \quad (6.80)$$

Ved wireophængning får man af (6.9), (6.10) og (6.13)

$$u = u'' = \vartheta'' = 0 \quad \text{for } x = 0 \text{ og } x = L \quad (6.81)$$

og af (6.17)

$$\begin{aligned}
 & - (EI_{\phi} \theta'')' + (GI_V + \sigma I_{PF}) \theta' \\
 & - ((M_O + M_Q) + Pa_P) + \lambda((M_{O\lambda} + M_{Q\lambda}) + P_{\lambda} a_{P\lambda}) u' \\
 & + ((H - a_R)R + \lambda(H - a_{R\lambda})R_{\lambda}) \theta = 0 \quad , \quad (6.82)
 \end{aligned}$$

hvor der gælder

$$R_{\text{tot}} = R + \lambda R_{\lambda} \quad (6.83)$$

og

$$R_{\text{tot}} a_{R_{\text{tot}}} = R a_R + \lambda R_{\lambda} a_{R_{\lambda}} \quad (6.84)$$

$a_{R_{\text{tot}}}$ angiver angrebepunktet for forskydningskraften Q_z i tværsnittet umiddelbart indenfor wireangrebepunktet. Q_z må nødvendigvis være lig med den negative wirereaktion $-R_{\text{tot}}$.

6.4 Numerisk løsning af stabilitetsegenværdiproblemet

Egenværdiproblemet bestående af stabilitetsligningerne (6.78) og (6.79) med tilhørende randbetingelser kan kun i ganske få specialtilfælde løses analytisk, og en generel løsningsprocedure må derfor basere sig på numeriske metoder. Disse metoder omtales kort i det følgende.

Ligningerne (6.78) og (6.79) angiver stabilitetsproblemet Eulerske ligninger svarende til udtrykkene (4.96) og (4.98). Disse egner sig ligesom Galerkin-formen (4.79) bedst til at blive anvendt i forbindelse med finite differenser eller ortogonal kollokation. Ortogonal kollokation anvendt på egenværdiproblemer, se [Collatz.63-1], svarer til den Galerkin-metode, som er omtalt i slutningen af afsnit 4.3. Forskellen er blot den, at man i stedet for at integrere kræver differentiaalligningerne opfyldte i en række punkter, de såkaldte kollokationspunkter, hen langs bjælkeaksen. Vanskeligheden ved denne metode er, som nævnt i afsnit 4.3, at hver af de indgående basisfunktioner skal opfylde randbetingelserne. Specielt den komplicerede vridningsrandbetingelse (6.82) ved wireophængte bjælker kan her give problemer.

Af ovennævnte grunde er det derfor valgt at basere beregningerne på finite differenser, som ikke giver anledning til tilsvarende vanskeligheder. Anvendes centrale differenser er det, hvis randbetingelserne er simple, muligt at formulere problemet som et matrixegenværdiproblem:

$$\underline{\underline{A}} \underline{\underline{v}} = \lambda \underline{\underline{B}} \underline{\underline{v}} \quad , \quad (6.85)$$

hvor $\underline{\underline{A}}$ er symmetrisk og positiv definit, og $\underline{\underline{B}}$ er symmetrisk.

Choleski-faktoriseres $\underline{\underline{A}}$

$$\underline{\underline{A}} = \underline{\underline{L}} \underline{\underline{L}}^T \quad , \quad (6.86)$$

hvor T angiver transponering, og skrives enhedsmatricen $\underline{\underline{I}}$ som

$$\underline{\underline{I}} = (\underline{\underline{L}}^{-1})^T \underline{\underline{L}}^T \quad (6.87)$$

får man

$$\begin{aligned} \underline{\underline{L}} \underline{\underline{L}}^T \underline{\underline{v}} &= \lambda \underline{\underline{B}} (\underline{\underline{L}}^{-1})^T \underline{\underline{L}}^T \underline{\underline{v}} \\ \Rightarrow (\underline{\underline{L}}^T \underline{\underline{v}}) &= \lambda \underline{\underline{L}}^{-1} \underline{\underline{B}} (\underline{\underline{L}}^{-1})^T (\underline{\underline{L}}^T \underline{\underline{v}}) \\ \Rightarrow (\underline{\underline{L}}^{-1} \underline{\underline{B}} (\underline{\underline{L}}^{-1})^T) (\underline{\underline{L}}^T \underline{\underline{v}}) &= \frac{1}{\lambda} (\underline{\underline{L}}^T \underline{\underline{v}}) \end{aligned} \quad (6.88)$$

Af (6.88) ses, at den største egenværdi for matricen $(\underline{\underline{L}}^{-1} \underline{\underline{B}} (\underline{\underline{L}}^{-1})^T)$ er den reciprokke af den mindste egenværdi for det oprindelige problem (6.85). Den søgte egenværdi kan derfor findes ved anvendelse af potensmetoden, som netop finder den største egenværdi, på (6.88).

Hvis randbetingelserne er komplicerede som ved wireophængte bjælker, er det ikke muligt at bevare matricernes symmetri. Dette skyldes, at man her er tvunget til at angive randbetingelserne i separate ligninger i stedet for at indbygge dem i feltligningerne. Choleski-faktoriseringen (6.86) er derfor ikke mulig, og egenværdiproblemet (6.85) må derfor omformes på følgende måde.

$$\underline{\underline{A}} \underline{\underline{v}} = \lambda \underline{\underline{B}} \underline{\underline{v}}$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{v}} = \lambda \underline{\underline{A}}^{-1} \underline{\underline{B}} \underline{\underline{v}}$$

$$\Rightarrow (\underline{\underline{A}}^{-1} \underline{\underline{B}}) \underline{\underline{v}} = \frac{1}{\lambda} \underline{\underline{v}} \quad (6.89)$$

Potensmetoden stiller ikke krav til symmetri, og den kan derfor også anvendes på (6.89).

Fra et numerisk synspunkt er fordelene ved formuleringen (6.88) frem for (6.89) den, at man her kan finde samtlige egenverdier og egenfunktioner ved hjælp af sturmsekvenser og invers iteration.

Da der i beregningerne tages hensyn til ikke-lineære spændings-tøjningsrelationer og revnedannelse, er dette uden betydning, idet koefficienterne i ligningerne afhænger af egenværdien, hvorved de højere egenverdier og egenfunktioner ikke er korrekt bestemte.

7. BEREGNINGSEKSEMPLER

I dette kapitel vises eksempler på beregninger udført under anvendelse af den opstillede teori. Eksemplerne skal dels vise beregningsmetodens overensstemmelse med forsøgsresultater, dels vise metodens mange variationsmuligheder med hensyn til valg af spændingstøjningsrelationer, geometrisk udformning, randbetingelser og belastningskonfiguration.

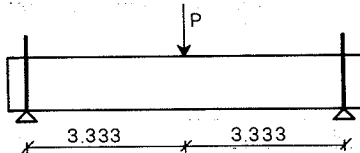
I det første eksempel sammenlignes beregningsmetodens resultater med forsøg udført på Danmarks Ingeniørakademi [Jensen.78-1]. Dernæst undersøges med udgangspunkt i en af de forsøgsbjælker, som omtales i det første eksempel, kiplastens variation som funktion af spændingstøjningsrelationer, randbetingelser, belastning, geometrisk udformning og tværsnitshvælving.

Eksempel 7.1

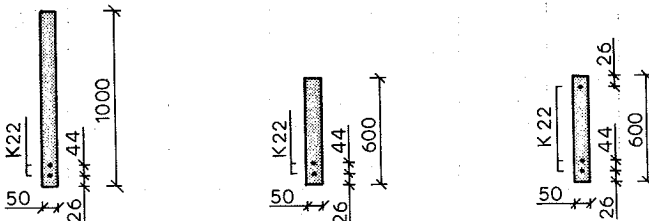
Beregningsmetodens resultater sammenlignet med forsøgsresultater

I [Jensen.78-1] beskrives en forsøgsserie til bestemmelse af kiplasten for jernbetonbjælker. Resultaterne fra denne forsøgsserie vil i det følgende blive sammenlignet med den opstillede beregningsmetodes resultater.

A.



B.



F8411, F8412

F8431, F8432

F8441, F8442

Fig. 7.1: A. Belastningen påføres som en koncentreret kraft i overside bjælkemidte. B. Forsøgsserien består af 3 dublerede bjælker, som alle er gaffeloplagte.

På figur 7.1 ses belastningsopstillingen og de anvendte bjælketværnsnit.

Ved forsøgene blev der foretaget fotogrammetriske målinger af de horisontale udbøjninger u , tøjningsmålinger med strain-gauges, og en registrering af lasthistorien. Udbøjningsmålingerne kombineret med lasthistorien giver mulighed for optegning af et Southwell-diagram (P/u versus u). Dette diagram har u -aksen som asymptote, og kiplasten svarer til den P -værdi, hvor kurven skønnes at være tilstrækkelig asymptotisk, hvilket selvsagt giver en ret unøjagtig bestemmelse af kiplasten. Med strain gauges ved overside bjælkemidte er det ligeledes muligt at registrere den horisontale udbøjning u af bjælken og dermed bestemme kiplasten, idet u ved denne værdi af lasten begynder at stige kraftigt. Endvidere kan et interval for kiplasten angives ud fra lasthistorien ved angivelse af det lasttrin, for hvilket kipningen indtræder. I skema 7.1 er forsøgsresultaterne for de 6 forsøgsbjælker angivet sammen med beregningsmodellens resultater og bjælkernes beregnede brudlaste.

Skema 7.1: Forsøgsseriens kiplaste og kiplomenter på basis af Southwell-diagram, strain gaugemålinger og lasthistorie, samt beregningsmodellens resultater og bjælkernes brudlaste. Bjælkenumrene 12-1, 12-2, 31-1 og 31-2 angiver, at bjælkerne 12 og 31 har været belastet to gange.

BJÆLKE	FORSØG								BEREGNET			
	SOUTHWELL DIAGRAM		STRAIN GAUGES		LASTHISTORIE				BEREGNINGS-MODELLEN		BRUDVÆRDIER	
	NO.	kN	kNm	kN	kNm	ØVRE GRÆNSE		NEDRE GRÆNSE		kN	kNm	kN
11	67	115	—	—	71	118	68	113	67	112	224	375
12-1	75	125	58	97	58	97	54	90	70	117	226	377
12-2	46	77	69	115	69	115	51	85	70	117	226	377
31-1	38	63	>40	>67	40	67	35	58	47	78	119	198
31-2	58	97	>21	>35	21	35	18	30	47	78	119	198
32	66	110	—	—	55	92	48	80	45	75	118	197
41	92	153	22	37	30	50	30	50	46	76	106	177
42	44	73	—	—	21	35	21	35	44	72	132	220

I skema 7.2 er kiplastene gjort dimensionsløse ved at dividere beregningsmodellens resultater op i forsøgsresultaterne, samt i værdier beregnet efter fire andre beregningsmodeller. Disse beregningsmodeller er behandlet i [Hansell.59-2], [Sant.61-4], [Massey.69-1] og [Laursen.77-1].

Skema 7.2: Dimensionsløse kiplaste fremkommet ved division med den aktuelle beregningsmodels resultater.

BJÆLKE NO	FORSØG					BEREGNET				
	SOUTH- WELL	STRAIN- GAUGES	LASTHISTORIE			BEREGNINGS- MODEL	HANSELL	SANT	MASSEY	LAURSEN
			ØVRE	MIDDEL	NEDRE					
11	1.03	—	1.05	1.03	1.01	1.00	0.63	1.19	1.63	1.04
12-1	1.07	0.83	0.83	0.80	0.77	1.00	—	—	—	1.08
12-2	0.66	0.98	0.98	0.86	0.73	1.00	—	—	—	1.08
31-1	0.81	0.86	0.86	0.80	0.74	1.00	0.62	1.09	1.35	1.12
31-2	1.24	0.45	0.45	0.42	0.38	1.00	—	—	—	1.12
32	1.45	—	1.21	1.13	1.05	1.00	—	—	—	1.12
41	2.01	0.49	0.66	0.66	0.66	1.00	0.57	—	—	1.11
42	1.01	—	0.49	0.49	0.49	1.00	—	—	—	1.08

Ved kiplastforsøg forekommer en række imperfektioner, hvoraf bjælkens forhåndskrumning er den væsentligste. Af andre imperfektioner kan nævnes svindrevner, inhomogeniteter i betonen, excentrisk armeringsplacering og excentrisk lastangreb. Tilstedeværelsen af disse uundgåelige imperfektioner betyder, at man generelt må forvente, at forsøgene giver lavere kiplaste end beregningsresultaterne.

Af [Jensen.78-1] fremgår det, at forhåndskrumningerne var små for bjælkerne F8411 og F8432, ikke målt for F8412 og stor for de øvrige. Dette passer udmærket sammen med resultaterne i skema 7.2, hvor den målte kiplasts procentvise andel af den beregnede kiplast er størst for F8411 og F8432.

Sammenlignes bjælker uden trykarmering, F8431 og F8432, med identiske bjælker med trykarmering, F8441 og F8442, må man, som det

fremgår af beregningsmodellen skema 7.1, forvente, at bjælkerne med trykarmering har en lidt lavere kiplast. Dette skyldes, at trykarmeringen reducerer trykzonens udstrækning. Dette nedsætter tværsnittets torsionsstivhed, samt bøjningsstivheden for udbøjning i horisontal retning med heraf følgende lavere kiplast. Af skema 7.1 fremgår det dog af de målte værdier, at trykarmeringen bevirker en meget større reduktion af kiplasten end forventet. I [Jensen.78-1] antager man, at dette skyldes en under forsøgene iagttaget revnedannelse i betonen langs trykarmeringsstængerne. Dette peger i forbindelse med det meget smalle betontværsnit på, at de lave kiplaste er initierede af en begyndende Euler-udknækning af trykarmeringsstængerne og den omgivende beton. Dette forhold behøver derfor ikke at være typisk for bjælker med flanger eller hvor den relative tværsnitbredde er mindre ekstremt lav.

Eksempel 7.2

Spændingstøjningsrelationernes, randbetingelsernes, belastningens, geometriens og tværsnitshvælvningens indflydelse på kiplasten

A. Spændingstøjningsrelationer.

I eksempel 7.1 blev udelukkende anvendt krumme elastisk-plastiske arbejdskurver til beskrivelse af betonens og armeringens fysiske egenskaber. En mere simpel beskrivelse kan opnås ved anvendelse af lineærelastiske arbejdskurver, og det er derfor af interesse at undersøge, hvilken indflydelse anvendelsen af sådanne arbejdskurver har på kiplasten.

I skema 7.3 er angivet beregningsresultater for bjælke F8411, figur 7.1, under anvendelse af tre forskellige sæt arbejdskurver. Det første sæt svarer til de elastisk-plastiske arbejdskurver anvendt i eksempel 7.1, medens II er lineærelastisk-idealplastiske med tryk- og trækbrudstyrker for betonen på henholdsvis - 37.0 MPa og 2.5 MPa. III er ubegrænset lineærelastisk. Initialelasticitetsmodulerne for de tre arbejdskurver fremgår af skema 7.3.

Af skema 7.3 ses, at en simpel lineærelastisk beregning giver en kiplast, som er 67% for høj. En sådan beregning er på den usikre side og så afvigende, at den ikke er acceptabel. Tages derimod revnedannelsen i regning ved angivelse af trækbrudstyrken for betonen, fås et resultat, som kun afviger 4% fra den mere nøjagtige

Skema 7.3: Kiplaste for bjælke F8411 under anvendelse af elastisk-plastiske I, lineærelastisk-idealplastiske II og lineærelastiske arbejdskurver III.

ARBEJDSKURVER	E_c	σ_{ct}	σ_c	M_{kip}	M_{kip}/M_{kipI}
	10^4 MPa	MPa	MPa	kNm	—
I. ELAST - PLAST.	2.437	2.5	-37.5	111.7	1.000
II. LIN.EL. - IDEALPL.	2.437	2.5	-37.5	115.9	1.038
III LIN.ELAST.	2.437	∞	$-\infty$	187.2	1.676

elastisk-plastiske beregning. Det gode resultat skyldes dog, at forholdet mellem kiplast og brudlast er så lavt som 0.3. Med stigende værdier af dette forhold får man en voksende afvigelse mellem beregningsresultaterne på grund af den stigende indflydelse fra de krumme dele af arbejdskurverne i den elastisk-plastiske beregning.

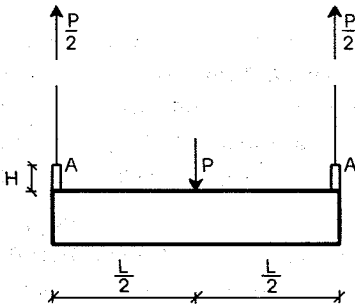
Foruden typen af arbejdskurve, som benyttes ved beregningen, er størrelsen af de indgåede parametre naturligvis af stor betydning. I skema 7.3 er der benyttet en korttidsarbejdskurve med E-modul lig med $2.437 \cdot 10^4$ MPa. Benytter man i stedet for en langtidsarbejdskurve med E_c lig med 10^4 MPa, σ_{ct} lig med 2.5 MPa og σ_c lig med -31.9 MPa, får man ved anvendelse af elastisk-plastiske arbejdskurver et kipmoment på 68.5 kNm, som er 39 procent mindre end korttidsværdien. Forskellen kan synes lille i betragtning af, at forholdet mellem elasticitetsmodulerne er 2.437. Årsagen hertil er, at en lille elasticitetsmodul giver en stor trykzone. Påsættes halvdelen af belastningen som langtidsbelastning og halvdelen som korttidsbelastning, får man ved brug af de kombinerede langtids-korttids spændingstøjningsrelationer en kiplast, som kun er 15 procent mindre end korttidsværdien. Man ser heraf, at det har betydning at benytte de korrekte arbejdskurver for de forskellige last-andele.

B. Randbetingelse.

En bjælkes randbetingelser har stor indflydelse på kiplastens størrelse, idet denne aftager ved øgning af bjælkens frihed. Wireophængte bjælker er derfor i særlig grad udsat for faren for kipning.

I eksemplerne 7.1 og 7.2.A betragtedes gaffeloplagte bjælker, hvor bjælkeenderne er fastholdte mod rotationer om bjælkeaksen, medens bjælkeenderne kan undergå vinkeldrejninger om den lodrette akse og aksens vinkelret på bjælkekroppens plan. I dette eksempel betragtes wireophængte bjælker, hvor ophængningskablerne, som det ses på figur 7.2, enten kan være lodrette eller hældende. I sidstnævnte tilfælde påføres bjælken normal kræfter fra wirereaktionernes vandrette komponenter, som, afhængig af ophængningspunkternes højde over bjælken, giver anledning til ekstra momenter i bjælken.

A.



B.

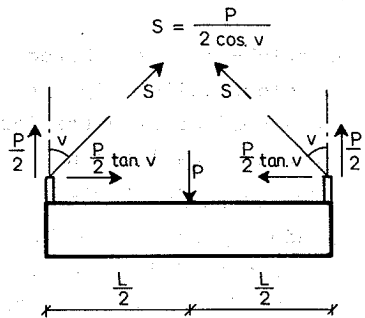


Fig. 7.2: A. Bjælke ophængt i lodrette kabler.

B. Bjælke ophængt i kabler, som danner vinklen v med lodret.

Kablernes ophængningspunkter A befinder sig i højden H over bjælkeoversiden. Belastningen er en koncentreret kraft ved bjælkemidte.

Bjælkeendernes indspændingsgrad med hensyn til rotationerne om bjælkeaksen afhænger som vist i kapitel 6. afsnit 1. af ophængningspunkternes højde over bjælketværsnittenes forskydningscentre, samt størrelserne af de lodrette komponenter af wirereaktionerne. På figur 7.3 er angivet sammenhængen mellem den kritiske last P_{kr} og ophængningshøjden H for forskellige værdier af kabelhældningsvinklen v . Bjælkegeometri og materialedata svarer til bjælke F8411 omtalt i eksempel 7.1 og 7.2.A (type I).

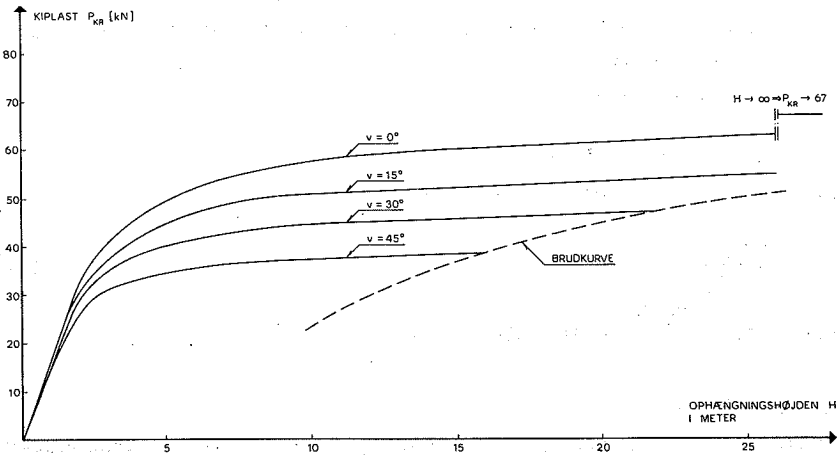


Fig. 7.3: Sammenhængen mellem den kritiske last P_{kr} og ophængningshøjden H for forskellige værdier af kabelhældningsvinklen v .

For $H = 0$ er kiplasten P_{kr} lig med nul uanset størrelsen af v , idet lasten P angriber i bjælkens overside. Kurven for $v = 0^\circ$ går for $H \rightarrow \infty$ imod kiplasten for den gaffeloplagte bjælke, idet større og større H -værdier svarer til en bedre og bedre rotationsfastholdelse af bjælkeenderne. I det aktuelle tilfælde ligger denne grænseværdi for P_{kr} under bjælkens brudlast. Dette er derimod ikke tilfældet for de øvrige kurver på figur 7.3, idet de hældende kabler for stigende værdier af H vil give større moment i bjælken, selvom belastningen P holdes konstant. Herved kan brudlasten blive overskredet, hvilket dog ofte, som det også fremgår af figuren, sker for så store værdier af H , at det kun har teoretisk interesse.

Kendes én eller to af størrelserne P , H og v , giver kurverne på figur 7.3 mulighed for at vælge den eller de øvrige størrelser, således at kipning undgås.

Anvendelse af dimensionsløse parametre til beskrivelse af kurverne på figur 7.3 skønnes ikke at øge kurvernes generalitet, idet nogle af de indgående størrelser varierer på grund af revnedannelsen og de

elastisk-plastiske spændingstøjningsrelationer. Ved elastiske beregninger anvendes ofte faktoren m i nedenstående udtryk for P_{kr} i stedet for P_{kr} selv

$$P_{kr} = m \frac{\sqrt{EI \cdot GI_V}}{L^2} \quad (7.1)$$

og som dimensionsløs fjederkonstant

$$k = \frac{L P_{kr} H}{2GI_V} \quad (7.2)$$

i stedet for $\frac{P_{kr} H}{2}$ eller blot H .

C. Belastninger.

Belastningerne kan bestå af en vilkårlig kombination af koncentrerede og fordelte belastninger angribende i den lodrette plan, som

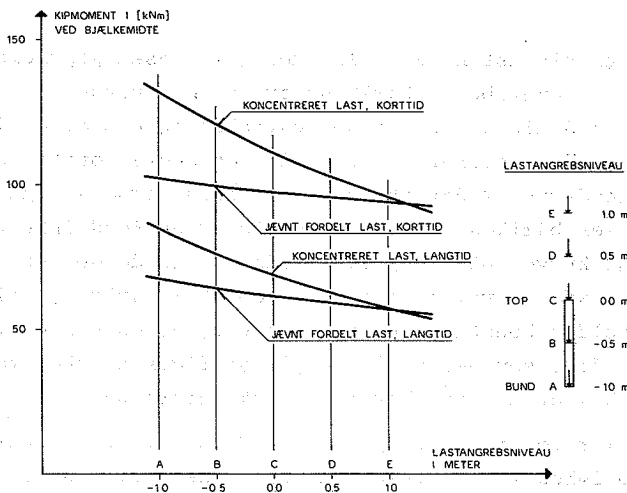


Fig. 7.4: Kipmomentets variation med lastangrebsniveauet ved koncentrerede og jævnt fordelte laste.

indeholder bjælkeaksen. Dette eksempel er begrænset til at undersøge lastangrebsniveauets indflydelse på kiplasten dels for en lodret, koncentreret kraft ved bjælkemidte, dels for en lodret, jævnt fordelt belastning (se figur 7.4). Bjælkens geometriske og fysiske karakteristika er de samme som i de foregående eksempler, medens der som randbetingelser udelukkende benyttes gaffeloplægning.

På figur 7.4 ses fire kurver svarende til langtidslast- og korttidslast med henholdsvis en lodret, koncentreret kraft angribende ved bjælkemidte og en jævnt fordelt belastning. Betonens initial-elasticitetsmodul og brudstyrke ved langtidslastningen er regnet at være 10^4 MPa og -31.9 MPa, medens disse størrelser ved korttidslastningen er regnet at have værdierne $2.44 \cdot 10^4$ MPa og -37.5 MPa. Af figuren ses, at kurverne klart afspejler de forløb, som man på forhånd forventer. Her tænkes dels på de lavere kipmomenter ved langtidslast, dels på den større variation af kipmomentet som funktion af lastangrebsniveauet ved den koncentrerede kraft. Førstnævnte forhold er indlysende, medens sidstnævnte forhold skyldes, at de største flytninger og rotationer sker ved bjælkemidte. Herved får den koncentrerede kraft ved bjælkemidte større effekt end en belastning, som er jævnt fordelt langs bjælkeaksen. Denne større effekt gælder afhængig af lastangrebsniveauet både den væltende og stabiliserende virkning, og man får derfor ved et tilstrækkelig lavt lastangrebsniveau en skæring mellem kurverne for den koncentrerede og den jævnt fordelte last.

Ved lastangreb nær ved forskydningscentret vil den væltende og stabiliserende virkning som følge af lastangrebsniveauet være minimal, og man kan derfor her studere hvilken belastningstype, der uden disse virkninger giver det største kipmoment. Ved den aktuelle bjælke ligger forskydningscentret mellem niveau B og C på figur 7.4, og den koncentrerede kraft ses derfor, som ventet, at give det største kipmoment.

D. Geometri og tværsnitshvælving.

Forsyner man den bjælke, som er blevet benyttet i de øvrige eksempler, med flanger af varierende størrelse, kan man som vist på figur 7.5, optegne kiplasten som funktion af den relative flangebredde b/h .

På figuren forudsættes, at bjælken er gaffeloplagt, og at belastningen består af en lodret, koncentreret kraft ved overside bjælkemidte. Korttids- og langtidsarbejdskurverne svarer til de i eksempel 7.2.6 angivne.

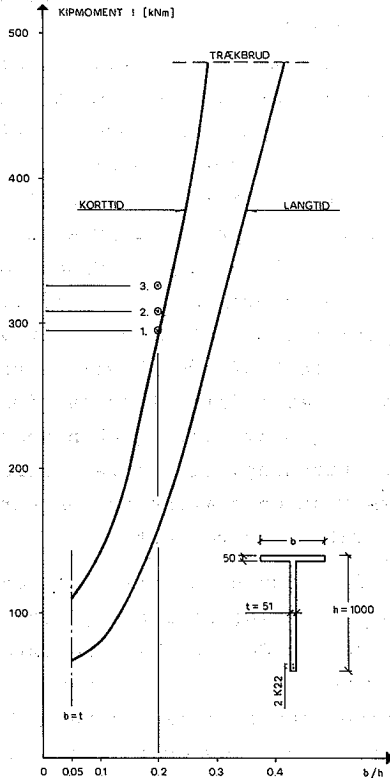


Fig. 7.5: Kiplasten som funktion af den relative flangebredde b/h for henholdsvis korttids- og langtidsbelastning.

Af figuren ses, at kiplasten vokser meget hurtigt med flangebredden. En øgning af denne er derfor et meget effektivt middel til opnåelse af større kiplast.

På sætter man desuden en underflange, som vist på figur 7.6, og holder man armeringsarealet uændret, påvirkes kiplasten ikke, idet revnedannelsen bevirker, at underflangen ikke indgår i det effektive betonareal. Med en relativ flangebredde b/h på 0.2 og korttidsbelastning fås en kiplast svarende til punkt 1. på figur 7.5. På trods af revnedannelsen vil de to excentrisk placerede K 14 armeringsjern vist på figur 7.6 medvirke til at give I-bjælken en vis hvælvningsstivhed og dermed en forøgelse af kiplasten. Beregnes hvælvningsstivheden efter principperne i afsnit 6.2.3, fås en kiplast angivet ved punkt 2. på figur 7.5, hvilket svarer til en forøgelse på 5.5 procent. Hvēlvningsstivheden vokser ved forøgelse af I-bjælkens flangebredder, men da kiplasten, som det fremgår af figur 7.5, ligeledes vokser med flangebredden, vil den procentuelle forøgelse ved medtagning af hvælvningsstivheden generelt være beskednen. Større effekt på kiplasten kan man derimod opnå ved forspænding af bjælken.

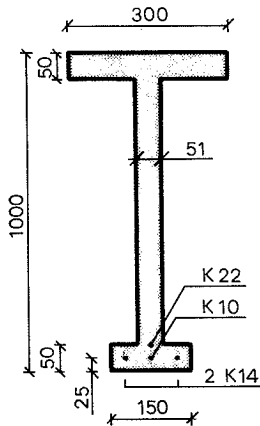
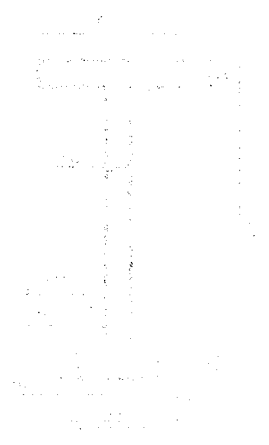


Fig. 7.6:

Alle mål i mm

Gives K 22 armeringsjernet i I-bjælkens underflange vist på figur 7.6 en forspænding på 400 MPa ved bjælkemidte og lineært aftagende til nul ved bjælkeenderne, således at momentkurven fra forspændingen

har samme form som momentkurven fra den påsatte koncentrerede kraft, får man en forøgelse af kiplasten med 11 procent, (punkt 3. på figur 7.5). Forspænding kan derfor bruges til at forøge kiplasten, idet momentet fra forspændingen øger trykzonens areal.



8. KONKLUSION

I denne rapport, samt forarbejdet hertil [Pedersen.79-1], er opstillet en metode til beregning af betonbjælkers kipstabilitet med hensyntagen til betonens og armeringens specielle materialeegenskaber, herunder krumme arbejdslinier, revnedannelse, svind, krybning og relaksation. Endvidere er der i tilknytning hertil på basis af den angivne beregningsmetode udviklet et EDB-program til kipstabilitetsberegninger.

I rapporten er hele udviklingen af problemets styrende differentialligninger med tilhørende randbetingelser foretaget, idet det dels skønnes at give en bedre basis for den øvrige del af arbejdet, dels er vanskeligt i litteraturen at finde disse differentiaalligninger og randbetingelser beskrevet i en tilstrækkelig generel form. De omtalte differentiaalligninger er opstillet for den udeformerede tilstand svarende til det klassiske initialkipstabilitetsproblem. Løsningen til dette problem giver en øvreværdi til den virkelige løsning på grund af uundgåelige imperfektioner, såsom forhånds-krumninger, unøjagtig armeringsplacering og inhomogeniteter i betonen. En medtagning af disse imperfektioner vil gøre beregningerne langt mere omfattende, og fordelene ved en forbedret metode kan vanskeligt udnyttes, idet størrelsen af sådanne imperfektioner ofte er dårligt bestemte eller ikke kendte, især på projekteringsstadiet.

Ved beregningerne kan der benyttes meget generelle fysiske betingelser for de indgående materialer. Man kan tage hensyn til betonens revnedannelse og trækstyrke, samt vælge mellem lineærelastiske, lineærelastisk-idealplastiske og krumliniet elastisk-plastiske arbejdskurver for beton og slap og forspændt armering. Man har mulighed for at behandle langtidsbelastning og korttidsbelastning, samt kombineret langtids-korttidsbelastning, hvilket så vidt vides ikke tidligere er foretaget i forbindelse med kipstabilitetsberegninger. Belastningen kan bestå af en vilkårlig belastning angribende i bjælkens lodrette symmetriplan, medens randbetingelserne enten svarer til gaffeloplægning eller wireophængning. Langs bjælkeaksen er det muligt at variere betontværsnittets dimensioner, den slappe og forspændte armerings tværsnitsareal og placering, samt størrelsen af den neutraliserede forspænding.

Med den opstillede beregningsmetode og det udviklede program er der skabt mulighed for at foretage mere nøjagtige kipstabilitetsberegninger end hidtil også i tilfælde, hvor de geometriske, fysiske og statiske forhold er komplicerede. Endvidere er systemet velegnet til kontrol eller modifikation af simple tilnærmelsesmetoder, som ofte med fordel anvendes ved enkle belastninger, simple randbetingelser og enkel geometri.

Den numeriske løsningsmetode angivet i afsnit 6.4 til løsning af det opstillede egenværdiproblem er baseret på potensmetoden, samt varianten heraf, invers iteration. Matricen, som i disse metoder benyttes til søgning af egenværdierne, er her opstillet ved brug af finite differenser. Denne fremgangsmåde er i det aktuelle tilfælde langt det simpleste, idet differensmetoden direkte kan anvende de letfortolkelige og traditionelle tværsnitskonstanter, der her ganske vist er belastningsafhængige. En anden fordel er den relativt simple måde sammenlignet med elementmetoden, hvorpå komplicerede fysiske betingelser kan behandles. Ved elementmetoden kan revnedannelsen og den elastisk-plastiske opførsel af beton og armering klares ved en plasticitetsteoretisk løsning [Chen.75-2] eller ved en ikke-lineærelastisk løsning, se [Pedersen.76-2] og [Ottosen.79-2], men kun ved meget omfattende og komplicerede beregninger. Derimod er der så vidt vides endnu ikke udviklet finite elementer, som kan behandle kombineret langtids-korttidsbelastning.

Beregningsresultater sammenlignet med forsøgsresultater viser en tilfredsstillende overensstemmelse i betragtning af de store usikkerheder, der altid knytter sig til stabilitetsforsøg. Beregningerne afspejler endvidere en række kvalitativt indlysende forhold ved kipstabilitetssvigt. Det fremgår blandt andet, at hensyntagen til revnedannelse er af stor betydning ved alle værdier af forholdet mellem bjælkens kiplast og brudlast, medens ikke-lineære arbejdskurver kun har betydning ved høje værdier af dette forhold. Kiplasten ved korttidsbelastning, kombineret langtids-korttidsbelastning og langtidsbelastning aftager i den nævnte rækkefølge. Ved wireophængte bjælker vokser kiplasten med øget torsionsfstholdelse og aftager med wireernes afvigelse fra lodret på grund af den herfra stammende vandrette wirereaktion. Endvidere er lastangrebsniveauet af betydning, idet et højere niveau medfører en mindre kiplast. Ved

T- og I-bjælker har trykflangebredden stor indflydelse på kiplasten, som vokser stærkt med voksende flangebredde, medens medtagning af hvelvningsstivheden kun giver en lille øgning af kiplasten. Forspænding giver en ikke uvæsentlig øgning af kiplasten, idet momentet fra forspændingen øger trykzonens areal.

I det foreliggende arbejde er der tilstræbt en stor generalitet og fleksibilitet i de indgående betingelser og størrelser, således at både meget simple og meget komplekse problemer kan behandles med den grad af nøjagtighed, som problemet kræver. De meget generelle betingelser for arbejdskurver, hvelvning, randbetingelser, belastninger og geometri gør endvidere det udviklede EDB-program velegnet i forbindelse med fremtidige undersøgelser.

Sådanne fremtidige undersøgelser bør bestå af en systematisk analyse af en række af de tidligere nævnte parametres indflydelse på kiplasten, idet eksemplerne i kapitel 7 kun er tænkt som en præsentation af nogle af de muligheder, der ligger i det udviklede EDB-program. Et andet væsentligt område, der bør undersøges nærmere, er imperfectioners indflydelse på kiplaste.

LITTERATURFORTEGNELSE

- [Engesser.89-1] Engesser, F.: Über die Knickfestigkeit gerader Stäbe. Zeitschrift des Architekten - und Ingenieur-Vereins, Bd. XXXV S.455, 1899.
- [Yasinski.95-1] Yasinski, F.: Noch ein Wort zu den Knickfragen. Schweizerische Bauzeitung, Bd. XXV S.172, 1895.
- [Engesser.95-2] Engesser, F.: Über Knickfragen. Schweizerische Bauzeitung, Bd. XXVI S.24, 1895.
- [Prandtl.99-1] Prandtl, L.: Kipp-Erscheinungen, Dissertation, München, 1899.
- [Timoshenko.10-1] Timoshenko, S.P.: Kipperscheinungen des I-Trägers. Zeitschrift für Mathematik und Physik. s. 360, 1910.
- [Karmán.10-2] Karmán, T. von: Untersuchungen über Knickfestigkeit. Mitteilungen über Forschungsarbeiten auf dem Gebiet des Ingenieurwesens, Hefte 81, Berlin, 1910.
- [Trefftz.35-1] Trefftz, E.: Über den Schubmittelpunkt in einem durch eine Einzellast gebogenen Balken. Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik, Bd. 15, 1935.
- [Vlasov.40-1] Vlasov, V.Z.: Thin-walled Elastic Bars. Moscow, 1940 or Jerusalem, 1961.
- [Shanley.46-1] Shanley, F.R.: The Column Paradox. Journal Aeronautical Sciences. Vol. 13, p. 678, 1946.
- [Shanley.47-1] Shanley, F. R.: Inelastic Column Theory. Journal Aeronautical Sciences. Vol. 14, p. 261, 1947.

- [Vasarhelyi.54-1] Vasarhelyi, D. and Turkalp, L.: Lateral buckling of slender reinforced concrete beams. Trend in Engineering at the University of Washington. Vol. 6, No. 3, July 1954.
- [Green.54-2] Green, A.E. and Zerna, W.: Theoretical Elasticity. Oxford, 1954.
- [Smith.58-1] Smith, R.B.L.: M.Sc. Thesis. University of Manchester, 1958.
- [Lebelle.59-1] Lebelle, P.: Stabilité élastique des poutres en béton précontraint a l'égard du déversement latéral. Annales de l'institut technique du batiment et des travaux publics. No. 141, 1959.
- [Hansell.59-2] Hansell, W., Winter, G.: Lateral stability of reinforced concrete beams. Journal of the American Concrete Institute. Vol. 56, 1959.
- [BRS.59-3] Department of Scientific and Industrial Research, Building Research Station. Confidential Note No. 6702. Torsional instability of slender RC beams, 1959.
- [Pettersson.60-1] Pettersson, O.: Vippningsproblem vid hissning och montering av slanka balkar. Bulletin no. 7, KTH. Stockholm, 1960 eller Nordisk Betong, no. 3, 1960.
- [Siev.60-2] Siev, A.: The lateral buckling of slender reinforced concrete beams. Magazine of concrete research. Vol. 12, 1960.
- [Timoshenko.61-1] Timoshenko, S.P., Gere, J.M.: Theory of Elastic Stability, II. Edition, New York, 1961.
- [Kollbrunner.61-2] Kollbrunner, L.F., Meister, M.: Knicken, Biegedrillknicken, Kippen. II Aufl., Berlin, 1961.

- [Podolny.61-3] Podolny, W., Scalzi, J.B.: Lateral Stability of a Prestressed Concrete Girder. Journal of the American Concrete Institute. Vol. 58, Sept. 1961.
- [Sant.61-4] Sant, J., Bletzacker, R.: Experimental study of lateral stability of reinforced concrete beams. Journal of ACI, Dec. 1961.
- [Muller.62-1] Muller, J.: Lateral Stability of Precast Members during Handling and Placing. Journal of the prestressed concrete institute. Vol. 7, No. 1, 1962.
- [Eringen.62-2] Eringen, A.C.: Non-linear Theory of Continuous Media. McGraw-Hill Book Company. London, 1962.
- [Collatz.63-1] Collatz, L.: Eigenwertaufgaben mit technischen Anwendungen, Leipzig, 1963.
- [Bürgermeister.66-1] Bürgermeister, G., Steup, H., Kretschmar, H.: Stabilitätstheorie, II. Aufl., Berlin, 1966.
- [Massey.67-1] Massey, C.: Lateral instability of reinforced concrete beams under uniform bending moment. ACI-Journal, March, 1967.
- [Rafla.68-1] Rafla, K.F.: Beitrag zur Frage der Kippstabilität aufgehängter Balkenträger und gerader, flächenartiger Träger. Dissertation, Braunschweig, 1968.
- [Nielsen.68-2] Nielsen, M.P.: Om stabilitetsteorien for kontinuerlige systemer. Bygningsstatistiske Meddelelser, nr. 1, 1968.
- [Massey.69-1] Massey, C. and Walter, K.R.: The Lateral Stability of a Reinforced Concrete Beam Supporting a Concentrated Load. Building Science. Vol. 3, Great Britain, 1969.

- [Rafla.69-2] Rafla, K.F.: Näherungsweise Berechnung der kritischen Kipplasten von Stahlbetonbalken. Beton- und Stahlbetonbau H.8, 1969.
- [Kollbrunner.69-3] Kollbrunner, C.F. and Basler, K.: Torsion in Structures. Zürich, 1969.
- [Mehlhorn.70-1] Mehlhorn, G.: Ein Beitrag zum Kipp-Problem bei Stahlbeton- und Spannbetonträgern. Dissertation. Darmstadt, 1970.
- [Mehlhorn.70-2] Mehlhorn, G.: Kippen von durch reine Biegung beanspruchten Spannbetonträgern mit einfach-symmetrischen I-Querschnitten. FIP VI Kongress, Praha, 1970.
- [Nowak.71-1] Nowak, B.: Beitrag zur Stabilität eindimensionale Tragwerke aus Stahlbeton unter allgemeiner Beanspruchung. Dissertation. Bochum, 1971.
- [Jeltsch.71-2] Jeltsch, W.: Ein einfaches Näherungsverfahren zum Nachweis der Kippsicherheit von Stahl-, Stahlbeton- und Spannbetonträgern. Dissertation. Graz, 1971.
- [Stiglat.71-3] Stiglat, K.: Näherungsberechnung von Stahlbetonbalken. Die Bautechnik H.3, 1971.
- [Hansen.71-4] Hansen, E.: Kipplast von Stahlbetonbalken - Vereinfachter Nachweis. Die Bautechnik H.10, 1971.
- [Mehlhorn.71-5] Mehlhorn, G., Schwarz, P.: Ein Beitrag zur Bestimmung der Lage des Schubmittelpunktes. Der Bauingenieur H 1, 1971.
- [Mehlhorn.72-1] Mehlhorn, G., Rützel, H.: Wölbkrafttorsion bei dünnwandigen Stahlbetonträgern. Der Bauingenieur H. 12, 1972.
- [Rafla.73-1] Rafla, K.F.: Vereinfachter Kippsicherheitsnachweis profilierter Stahlbetonbinder. Die Bautechnik H. 5, 1973.

- [Rafla.73-2] Rafla, K.F.: Hilfsdiagramme zur Vereinfachung der Kippuntersuchung von Stahlbetonbalken. Beton- und Stahlbetonbau H. 2, 1973.
- [Mehlhorn.73-3] Mehlhorn, G.: Einfluss wirklichkeitsnahen Werkstoffverhaltens auf die kritischen Kipp-lasten schlanker Stahlbeton- und Spannbeton-träger. Abschlussbericht zum Innenminister des Landes Nordrhein-Westfalen. Darmstadt, 1973.
- [Kreuzinger.74-1] Kreuzinger, H.: Methode der schrittweisen Näherung zur Berechnung von Kipp-problemen. Die Bautechnik H.9, 1974.
- [Mehlhorn.74-2] Mehlhorn, G.: Einfluss wirklichkeitsnahen Werkstoffverhaltens auf die kritischen Kipp-lasten schlanker Stahlbeton- und Spannbeton-träger. Deutscher Ausschuss für Stahlbeton Heft 238, 1974.
- [Mehlhorn.74-3] Mehlhorn, G., Rützel, H.: Wölbkrafttorsion bei dünnwandigen Stahlbeton- und Spannbeton-trägern. Der Bauingenieur H.2, 1974.
- [Link.74-4] Link, M., Neurath, E., Sauer, E.: Eine Anwend-ung der Finit-Element-Methode auf die Berech-nung des Einflusses nichtlinearen Werkstoff-verhaltens auf Torsionswiderstand und Schub-mittelpunktslage dickwandiger Querschnitte. Der Bauingenieur H.11, 1974.
- [Alsen.74-5] Alsen, K.: Die Kallebrücke in Wiesbaden. Beton- und Stahlbetonbau H.1, 1974.
- [Mehlhorn.74-6] Mehlhorn, G.: Näherungsverfahren zur Abschät-zung der Kippstabilität vorgespannter Träger. Beton- und Stahlbetonbau H.1, 1974.
- [Rafla.75-1] Rafla, K.F.: Näherungsverfahren zur Berechnung der Kipp-lasten von Trägern mit in Längsrichtung beliebig veränderlich Querschnitt. Die Bautechnik H.8, 1975.

- [Chen.75-2] Chen, A.C. and Chen, W.F.: Constitutive Relations for Concrete. Journal of the Engineering Mechanics Division, Proceedings of ASCE, Vol. 101, No. EM 4, Aug. 1975.
- [Frenzel.76-1] Frenzel, D., Rafla, K.: Kippversuche an zwei schlanken Spannbetonträgern. Beton- und Stahlbetonbau H.2, 1976.
- [Pedersen.76-2] Pedersen, M.E.: En 2. ordens tilnærmelse til de konstitutive ligninger for beton. Rapport nr. R 69, Afd.f.Bærende Konstruktioner, 1976.
- [Laursen.77-1] Laursen, M.E.: Elastic stability of thin walled open section beams. Seminar on Stability of Concrete Structures. CEB, Commission VIII. Sept, 1977.
- [Jensen.78-1] Jensen, L.M. og Petersen, U.: Kipning af jernbetonbjælker. Rapp. 78:99. DIAB, København. Januar 1978.
- [Pedersen.79-1] Pedersen, M.E.: En generel beregningsmetode for betontværsnit. Rapport nr. R 115, Afd.f.Bærende Konstruktioner. 1979.
- [Ottosen.79-2] Ottosen, N.S.: A constitutive model for short-time loading of concrete. To be published in 1979 in Journal of the Engineering Mechanics Division, Proceedings of ASCE, 1979.

...the ... of ...
...the ... of ...
...the ... of ...

...

...the ... of ...
...the ... of ...
...the ... of ...

...

...the ... of ...
...the ... of ...
...the ... of ...

...

...the ... of ...
...the ... of ...
...the ... of ...

...

...the ... of ...
...the ... of ...
...the ... of ...

...

...the ... of ...
...the ... of ...
...the ... of ...

...

...the ... of ...
...the ... of ...
...the ... of ...

...

APPENDIX A

Første og anden variation af Lagrange's tøjningstensor udtrykt ved de virtuelle flytninger.

Vedrørende de kontinuummekaniske grundbegreber henvises til [Eringen. 62-2], idet disse begreber i det følgende vil blive brugt uden nærmere forklaringer.

Lagrange's tøjningstensor ϵ_{ij} udtrykt ved Green's deformationstensor c_{ij} :

$$\begin{aligned}\epsilon_{ij} &= \frac{1}{2}(c_{ij} - g_{ij}) \\ &= \frac{1}{2}(\underline{c}_i \underline{c}_j - \underline{g}_i \underline{g}_j) ,\end{aligned}\tag{A.1}$$

hvor

$$\underline{c}_i = \frac{\partial \underline{r}}{\partial x^i}\tag{A.2}$$

og

$$\underline{g}_i = \frac{\partial \underline{R}}{\partial x^i}\tag{A.3}$$

x^i angiver materielle koordinater.

Flytningsvektoren \underline{u} er givet ved

$$\underline{u} = \underline{r} - \underline{R} ,\tag{A.4}$$

hvor \underline{r} og \underline{R} er henholdsvis den rumlige og materielle stedvektor. Det vil sige stedvektorer til samme materielle punkt i henholdsvis den deformerede og den udeformerede tilstand.

Idet de anvendte tensorer svarer til en Lagrange'sk beskrivelse, vil referencekoordinatsystemet og dermed g_{ij} være rumlig fast, medens c_{ij} vil ændre sig med deformationen.

Der anvendes svage variationer, hvilket vil sige flytninger af typpen:

$$\underline{u} = \underline{u}_0 + \epsilon \underline{w} = \underline{u}_0 + \underline{v}\tag{A.5}$$

hvor \underline{u}_0 og \underline{w} er funktioner af de materielle koordinater x^i , og \underline{u}_0 endvidere svarer til den betragtede deformationstilstand. Ved hjælp af (A.4) og (A.5) udledes følgende resultater til senere brug.

$$\delta \underline{r} = \varepsilon \left[\frac{d}{d\varepsilon} (R + (\underline{u}_0 + \varepsilon \underline{w})) \right]_{\underline{u}=\underline{u}_0} = \varepsilon \underline{w} = \underline{v} = v_k \underline{c}^k, \quad (\text{A.6})$$

hvor v^k er virtuelle flytningskomponenter ud fra den deformerede tilstand.

$$\delta^2 \underline{r} = \frac{1}{2} \varepsilon^2 \left[\frac{d^2}{d\varepsilon^2} (R + (\underline{u}_0 + \varepsilon \underline{w})) \right]_{\underline{u}=\underline{u}_0} = 0 \quad (\text{A.7})$$

Idet g_{ij} ifølge tidligere bemærkninger er konstant og dermed

$$\delta g_{ij} = 0 \quad (\text{A.8})$$

får man for den første variation af Lagrange's tøjningstensor:

$$\begin{aligned} \delta \varepsilon_{ij} &= \frac{1}{2} \delta (c_{ij} - g_{ij}) \\ &= \frac{1}{2} \delta c_{ij} = \frac{1}{2} \delta (\underline{c}_i \cdot \underline{c}_j) \\ &= \frac{1}{2} (\delta \underline{c}_i \cdot \underline{c}_j + \underline{c}_i \cdot \delta \underline{c}_j) \end{aligned} \quad (\text{A.9})$$

Benyttes (A.2) og (A.6) fås

$$\delta \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial (v_k \underline{c}^k)}{\partial x^i} \underline{c}_j + \underline{c}_i \frac{\partial (v_k \underline{c}^k)}{\partial x^j} \right) \quad (\text{A.10})$$

$$\frac{\partial (v_k \underline{c}^k)}{\partial x^i} = \frac{\partial v_k}{\partial x^i} \underline{c}^k + v_k \frac{\partial \underline{c}^k}{\partial x^i} \quad (\text{A.11})$$

Ifølge [Green.54-2] fås

$$\frac{\partial \underline{c}^k}{\partial x^i} = -\{i \ r\}^k \underline{c}^r, \quad (\text{A.12})$$

hvor $\{i \ r\}^k$ er Cristoffelsymbolet af 2. art.

Af (A.10) - (A.12) fås

$$\begin{aligned}
 \delta \varepsilon_{ij} &= \frac{1}{2} \left(\left(\frac{\partial v_k}{\partial x^i} c^k c_j - v_k \{i^k r\} c^r c_j \right) \right. \\
 &\quad \left. + \left(\frac{\partial v_k}{\partial x^j} c^k c_i - v_k \{j^k r\} c^r c_i \right) \right) \\
 &= \frac{1}{2} \left(\left(\frac{\partial v_k}{\partial x^i} \delta_j^k - v_k \{i^k r\} \delta_j^r \right) \right. \\
 &\quad \left. + \left(\frac{\partial v_k}{\partial x^j} \delta_i^k - v_k \{j^k r\} \delta_i^r \right) \right) \\
 &= \frac{1}{2} \left(\left(\frac{\partial v_j}{\partial x^i} - \{i^k j\} v_k \right) \right. \\
 &\quad \left. + \left(\frac{\partial v_i}{\partial x^j} - \{j^k i\} v_k \right) \right) \\
 &= \frac{1}{2} (v_{i,j} + v_{j,i}) , \tag{A.13}
 \end{aligned}$$

hvor $v_{i,j}$ og $v_{j,i}$ er de kovariante afledede af v_i .

Ved anvendelse af (A.9) fås følgende udtryk for den anden variation af $\delta \varepsilon_{ij}$:

$$\begin{aligned}
 \delta^2 \varepsilon_{ij} &= \frac{1}{2} \delta (\delta c_i \cdot c_j + c_i \cdot \delta c_j) \\
 &= \frac{1}{2} (\delta^2 c_i \cdot c_j + 2 \delta c_i \delta c_j + c_i \delta^2 c_j) \tag{A.14}
 \end{aligned}$$

Anvendelse af (A.2) og (A.7) giver

$$\delta^2 c_i = \frac{\partial \delta^2 r}{\partial x^i} = \underline{0} \tag{A.15}$$

Indsættes (A.15) i (A.14) fås

$$\delta^2 \epsilon_{ij} = \delta \underline{c}_i \delta \underline{c}_j \quad (\text{A.16})$$

Af (A.2), (A.6) og (A.11) får man

$$\delta^2 \epsilon_{ij} = \left(\frac{\partial v^k}{\partial x^i} \underline{c}_k + v^k \frac{\partial \underline{c}_k}{\partial x^i} \right) \left(\frac{\partial v^p}{\partial x^j} \underline{c}^p + v_p \frac{\partial \underline{c}^p}{\partial x^j} \right) \quad (\text{A.17})$$

Analog til (A.12) kan man vise, at

$$\frac{\partial \underline{c}_k}{\partial x^i} = \{ {}^r_{k i} \} \underline{c}_r \quad (\text{A.18})$$

Indsættes (A.12) og (A.18) i (A.17) fås

$$\begin{aligned} \delta^2 \epsilon_{ij} &= \left(\frac{\partial v^k}{\partial x^i} \underline{c}_k + v^k \{ {}^r_{k i} \} \underline{c}_r \right) \left(\frac{\partial v^p}{\partial x^j} \underline{c}^p - v_p \{ {}^p_{j m} \} \underline{c}^m \right) \\ &= \left(\frac{\partial v^k}{\partial x^i} + v^r \{ {}^k_{r i} \} \underline{c}_k \underline{c}^m \left(\frac{\partial v^m}{\partial x^j} - v_p \{ {}^p_{j m} \} \right) \right) \\ &= v^k_{,i} \delta^m_{k m,j} = v^k_{,i} v_{k,j} \end{aligned} \quad (\text{A.19})$$

Formlerne (A.13) og (A.19) giver henholdsvis den første og den anden variation af Lagrange's tøjningstensor udtrykt ved de virtuelle flytningskomponenter v_i .

Hvis det anvendte koordinatsystem er kartesisk, er Cristoffelsymbolerne lig med nul og kovariante og kontravariante størrelser identiske, hvilket betyder, at de afledede kan betragtes som sædvanlige afledede. Det anvendte koordinatsystem \underline{c}_i kan med god tilnærmelse siges at være kartesisk, hvis følgende betingelser er opfyldte. Referencesystemet \underline{g}_i skal være kartesisk. Flytninger og tøjninger svarende til den betragtede ligevægtstilstand skal være små, idet stabilitetsligningerne da kan opstilles i den udeformerede tilstand.

AFDELINGEN FOR BÆRENDE KONSTRUKTIONER

DANMARKS TEKNISKE HØJSKOLE

Structural Research Laboratory

Technical University of Denmark, DK-2800 Lyngby

RAPPORTER (Reports)

(1977 -)

- R 81. Resumeoversigt 1976. Summaries of papers 1976. 1977.
- R 82. MØLLMANN, H.: Static and dynamic analysis of plane cable structures. 1977.
- R 83. RIBERHOLT, H.: Bolte indlimet i limtræ. 1977.
- R 84. AGERSKOV, H. and J. BJØRNBAK-HANSEN: Fatigue strength of welded connections in round bar steel structures. 1977.
- R 85. LAURSEN, M.E., M.P. NIELSEN and M. ROIKJÆR: Stability analysis of beams and arches by energy methods. 1977.
- R 86. LAURSEN, M.E.: Derivation of symmetric integration formulas for triangles. 1977.
- R 87. LAURSEN, M.E.: Stability and vibration analysis of plane curved beams by an equilibrium finite element method. 1977.
- R 88. PEDERSEN, FLEMMING BLIGAARD: Vibration analysis of viscoelastically damped sandwich structures. 1978.
- R 89. BRØNDUM-NIELSEN, TROELS: Epoxy resin repair of cracked concrete beams. 1978. *)
- R 90. HESS, UWE, B.CHR. JENSEN, M.W. BRÆSTRUP, M.P. NIELSEN og FINN BACH: Gennemlokning af jernbetonplader. 1978.
- R 91. HANSEN, KARL ERIK, KAJ L. BRYDER og M.P. NIELSEN: Armeringsbestemmelse i jernbetonskaller. 1978.
- R 92. ASKEGAARD, V.: Stress and strain measurements in solid materials. 1978.
- R 93. SCHMIDT, HENRIK: Udbredelse af akustisk emission i beton. 1978.
- R 94. BYSKOV, ESBEN og STEEN KRENK: Konstruktionstræs mekaniske styrke. 1978.
- R 95. Resumeoversigt 1977. Summaries of papers 1977. 1978.
- R 96. DYRBYE, CLÆS: Admittance-curves. ZILSTORFF, ANNE and CLÆS DYRBYE: Admittance of bars. 1978.
- R 97. DYRBYE, CLÆS: Dynamic systems with sinusoidal mode shapes. 1978.
- R 98. ANDRESEN, CLÆS: Bjælker og søjler med åbne, tyndvæggede tværsnit. 1978.
- R 99. RIBERHOLT, H.: Eingleimte Gewindestangen. 1978.
- R 100. PEDERSEN, C.: Opbøjet længdearmering som forskydningsarmering. 1978.
- R 101. JENSEN, J.F., M.W. BRÆSTRUP, F. BACH og M.P. NIELSEN: Nogle plasticitetsteoretiske bjælkeløsninger. 1978.
- R 102. JENSEN, J.F., C. PEDERSEN, M.W. BRÆSTRUP, F. BACH og M.P. NIELSEN: Rapport over forskydningsforsøg med 6 spændbetonbjælker. 1978.
- R 103. JENSEN, J.F., V. JENSEN, H.H. CHRISTENSEN, F. BACH, M.W. BRÆSTRUP and M.P. NIELSEN: On the behaviour of cracked reinforced concrete beams in the elastic range. 1978.

*) Udsolgt. Out of print.

- R 104. ANDERSEN, ERIK YDING: Konstruktionsovervågning med akustisk emission. Prøvebelastning af landevejsbro. 1979.
- R 105. FREDSGAARD, SØREN SKYTTE: Ligevægts-elementer i de finite elementers metode. Formulering og beregningsgang. 1979.
- R 106. AGERSKOV, HENNING: Tests on high-strength bolted T-stub connections. 1979.
- R 107. KIRK, JENS: Direkte beregning af imperfekte skalkonstruktioner. 1979.
- R 108. Resumeoversigt 1978. Summaries of papers 1978. 1979.
- R 109. BRØNDUM-NIELSEN, TROELS: Stress analysis of concrete sections under service load. 1979.
- R 110. BRÆSTRUP, M.W.: Effect of main steel strength on the shear capacity of reinforced concrete beams with stirrups. 1979.
- R 111. BRINCKER, RUNE: Murede vægges tværbæreevne. En undersøgelse af murværks fysiske egenskaber. 1979.
- R 112. GIMSING, NIELS J.: Analytisk undersøgelse af materialforbruget for plane kabelsystemer med ensformig fordelt belastning. 1979.
- R 113. MADSEN, HENRIK OVERGAARD: Load models and load combinations. 1979.
- R 114. RIBERHOLT, H. and P. HAUGE MADSEN: Strength distribution of timber structures. Measured variation of the cross sectional strength of structural lumber. 1979.
- R 115. PEDERSEN, MAX ELGAARD: En generel beregningsmetode for betontværsnit. 1980.
- R 116. PEDERSEN, MAX ELGAARD: Kipstabilitet af armerede betonbjælker. 1980.
- R 117. BRYDER, KAJ L.: Optimeringsmetoder for 2-dimensionale legemer af ideal-plastisk materiale. 1980.
- R 118. DUKOW, EWTIM N.: Optimale Projektierung von vorgespannten Brückenträgern. 1980.
- R 119. PEDERSEN, HENNING: Optimering af jernbetonplader. 1980.
- R 120. BACH, FINN, M.P. NIELSEN and M.W. BRÆSTRUP: Shear tests on reinforced concrete T-beams. Series V, U, X, B and S. 1980.