

ADELINGEN FOR  
BÆRENDE KONSTRUKTIONER  
DANMARKS TEKNISKE HØJSKOLE



STRUCTURAL RESEARCH LABORATORY  
TECHNICAL UNIVERSITY OF DENMARK

Henning Pedersen  
OPTIMERING AF JERNBETONPLADER

RAPPORT NR. R 119 1980

OPTIMERING AF JERNBETONPLADER

Lynghøj, maj 1979  
Henning Pedersen

## FORORD

Denne afhandling er udarbejdet som led i betingelserne for erhvervelse af den tekniske licentiatgrad.

Licentiatarbejdet er udført ved Afdelingen for Bærende Konstruktioner, Danmarks tekniske Højskole, med professor, dr.techn. Mogens Peter Nielsen som faglærer.

Maskinskrivning af afhandlingen er udført af Annette Barentzen og Inge Sørensen, Afdelingen for Bærende Konstruktioner.

Tegningerne er ved firmaet Cowiconsult's assistance udført af Kristina Stanislawski.

Til alle involverede rettes hermed en tak.

## INDHOLDSFORTEGNELSE:

RESUMÉ	side	1
SUMMARY	-	2
SYMBOLLISTE	-	3
INDLEDNING	-	7
1. OPTIMERING AF BÆRENDE KONSTRUKTIONER	-	10
1.1 Historisk oversigt	-	10
1.2 Oversigt over matematiske optimeringsteknikker	-	14
1.3 Optimeringsteknikkens stade og fremtid	-	16
2. PLASTICITETSTEORETISKE ANVENDELSER AF OPTIMERINGSTEKNIK	-	19
2.1 Plasticitetsteoriens ekstremalprincipper	-	20
2.2 Plane rammekonstruktioner	-	21
2.3 Specielle forhold ved jernbetonkonstruktioner	-	26
3. ANVENDELSE AF EKSTREMALPRINCIPPER PÅ VILK. KONSTR.	-	28
3.1 Kontinuumsmodel	-	29
3.1.1 Øvreverdi-metoden	-	32
3.1.2 Nedreverdi-metoden	-	33
3.2 Diskretisering og optimering ved finite element	-	34
3.2.1 Kompatible elementer	-	36
3.2.2 Ligevægts-elementer	-	46
3.2.3 Blandede elementer	-	53
3.3 Diskussion af løsningsmetode	-	55
4. DIMENSIONERING AF JERNBETONPLADER VED HJÆLP AF NEDREVERDIMETODEN	-	57
4.1 Dimensioneringsmetoder for jernbetonplader	-	58
4.2 Begrænsninger og forudsætninger	-	60
4.3 Pladeteoriens statiske og geometriske forhold	-	63
4.3.1 Indre ligevægtsligninger	-	63
4.3.2 Geometriske størrelser	-	66
4.3.3 Virtuelt arbejdes princip, statiske bet.	-	67
4.4 Flydebetingelser for jernbetonplader	-	73
4.5 Elementtyper	-	88
4.5.1 Rektangulære elementer	-	90
4.5.1.1 Rektangulære element, REKT 1	-	91
4.5.1.2 Rektangulære element, REKT 2	-	97

4.5.2	Trekantelementer	side 102
4.5.2.1	Trekantelement med konstant momentfelt, TREK 1	- 102
4.5.2.2	Trekantelement med lineært momentfelt, TREK 2	- 107
5.	OPTIMERINGSPROBLEMER FOR JERNBETONPLADER	- 115
5.1	Design-variable, objektfunktion	- 116
5.2	Eksplicitte dimensionskrav	- 121
5.3	Løsning af LP-problemet	- 122
5.4	Behandling af flere belastningstilfælde	- 128
5.4.1	Successiv beregning	- 128
5.4.2	Samtidig beregning, tilnærmet optimum	- 128
5.4.3	Samtidig beregning, global optimum	- 130
5.5	Eventuel proportionering af løsning	- 131
5.5.1	Ensatet proportionering	- 131
5.5.2	Elementvis proportionering	- 132
5.5.3	Proportionering af jernarealer	- 134
6.	RESULTATER VED NEDREVERDIMETODEN	- 135
6.1	Kvadratisk indspændt plade	- 136
6.2	Indre felt af paddehat-konstruktion	- 138
6.3	Rektangulær plade med enkeltkraft	- 141
6.4	Andre pladeformer	- 141
6.5	Bemærkninger til resultaterne	- 144
7.	ANDRE OPTIMERINGSMETODER FOR JERNBETONPLADER	- 145
7.1	Analytiske optimeringsmetoder	- 145
7.2	Numeriske optimeringsmetoder	- 146
7.2.1	Ikke-lineære nedreverdimetoder	- 146
7.2.2	Øvreverdimetoder ~ Mekanismemetoden	- 148
7.2.3	Tilnærmede ekstremalmetoder	- 154
7.2.4	Elasto-plastisk beregningsmetode	- 157
8.	KONKLUSION OG FORSLAG TIL EDB-PROGRAM	- 158
8.1	Programopbygning	- 159
8.1.1	Formulering af omfang	- 159
8.1.2	Rutediagram	- 161
8.1.2.1	Indlæsning	- 162
8.1.2.2	Generering af elementinddeling	- 162
8.1.2.3	Opstilling af ligningsmatrix	- 163

8.1.2.4	Elimination af afh. variable og bestemmelse af partikulære løsninger	side 163
8.1.2.5	Opstilling af kostkoefficienter	- 163
8.1.2.6	Restriktionsmatrix og højre-sider	- 163
8.1.2.7	Generering af duale IP-problem	- 163
8.1.2.8	Løsning af duale IP-problem	- 164
8.1.2.9	Bestemmelse af momentparametre og jernarealer	- 164
8.1.2.10	Efterbehandling af løsning	- 164
8.1.2.11	Udskrift	- 164
8.1.2.12	Bestemmelse af højreside for nyt lasttilfælde	- 164
8.1.3	Elastisk beregning	- 165
8.2	Udvidelser af anvendelsesområdet	- 166
APPENDIX: LINEAR PROGRAMMERING		- 167
LITTERATURFORTEGNELSE		- 170

## RESUMÉ

Nærværende afhandling omhandler anvendelse af matematisk plasticitetsteori kombineret med optimeringsteknik for beregning af jernbetonplader.

Specielt behandles udvikling af automatiske numeriske metoder dels til maksimering af lastfaktoren for en given pladekonstruktion belastet med proportionallast med en given lastfordeling dels til minimering af det samlede armeringsforbrug for en plade med givne betonmål, givne belastninger og given armeringsarrangement.

Afhandlingen konkluderer at en rationel og sikker beregningsmetode, der er anvendelig i praksis, kan opnås ved benyttelse af plasticitetsteoriens nedre værdimetode og lineær programmering.

Kontinuumproblemet diskretiseres ved elementinddeling. Sådannede ligevægtslemener benyttes, således at total ligevægt sikres ved opstilling af et lineært ligningssystem. Flydebetingelserne lineariseres og giver således et sæt lineære uligheder ved opstilling i en række på forhånd valgte kritiske punkter. Idet kostfunktionen - som enten er lastfaktoren ved bærevnebestemmelsen eller det samlede armeringsforbrug ved dimensioneringsopgaven - også er lineær, fås herved et lineært programmeringsproblem, der kan løses ved hjælp af almindeligt tilgængelige standardprogrammer.

SUMMARY

This report treats the possibility of using limit analysis combined with optimization techniques for reinforced concrete slabs.

The report is especially concerned with the development of automatically numerical methods for maximization of the limit load for a given slab subjected to proportional loading with a given load-distribution and for minimization of the total amount of tensile reinforcement necessary in a slab with given concrete dimensions, subjected to given loads and with a given arrangement of reinforcing bars.

The report concludes that a rational and safe method for practical use can be achieved using the lower bound method of limit analysis combined with linear programming.

The continuum problem is discretized by means of finite element. Equilibrium element types are used so that overall equilibrium is ensured by setting up a set of linear equations. Linearising the yield conditions results in a set of linear inequalities when established in a number of a priori selected critical points. Since the objective function - which is either the load factor in the limit analysis problem or the total amount of tensile reinforcement in the limit design problem - is also linear, the resulting problem is a case of linear programming, which can be solved by general available standard routines.

SYMBOLLISTE

De hyppigst anvendte symboler er:

A I	: Totale specifikke dissipation
A Y	: Totale ydre arbejde
$b_o, b_o^j, b_o^{jr}$	Vektorer og matrixer, der udtrykker j'ite lineære
$b_{de}, b_{1j}^{de}, b_{1j}^{der}$	: flydefunktion i element e. Eks.: $\varphi_j^e = -b_o^j e - b_{1j}^{de} d_1^e + b_{1j}^{der} d_1^e + b_k^j Q_k$
$b_e, b_{1j}^e, b_{1j}^{er}$	: Objektfunktionens kostkoefficienter
$c, c_1$	: Objektfunktionens kostkoefficienter
$C, C_{1j}$	: Konstruktions kompatibilitetsmatrix
$\tilde{d}_e, d_1^e$	: Elements designparametre
$D, D_1$	: Konstruktions designparametre
e	: Element nr. e, benyttes som øvre index
$D_e^e, E_{1j}^e$	: Relationsmatrix for designparametre ( $d_1^e = E_{1j}^e D_j^e$ )
$f_e^e, f_{1j}^e$	: Elements spændingsparametre
$F, F_1$	: Konstruktions spændingsparametre
$g_1$	: l'ite komponent af volumenkraft
$G_e^e, G_{1j}^e$	: Relationsmatrix for spændingsparametre ( $f_1^e = G_{1j}^e F_j^e$ )
$H_e^e, H_{1j}^e$	: Relationsmatrix for flytningsparametre ( $w_1^e = H_{1j}^e W_j^e$ )
$K, K_{1j}$	: Ligevægtsmatrix
$m = (m_x, m_{xy}, m_y)$	: Momenter i retvinklet coord.syst. (generalis. sp.)
$\bar{m} = (m_x^-, m_{xy}^-, m_y^-)$	: Momenter i $\bar{x}-\bar{y}$ -koordinatsystem
$m_n, m_{nt}$	: Bøjnings- og vridningsmoment i snit med normal n.
$m_b, m_v$	: Bøjnings- og vridningsmoment
$m_{np}^o, m_{np}^u$	: Plastiske bøjningsmomenter i snit med normal n.
$m_1^o, m_2^o$	: Plastiske bøjningsmomenter for ækvivalent ortho-
$m_1^u, m_2^u$	: gonal armering i over- hhv. underside.

$m_{FX}^O, m_{FY}^O$	} Plastiske bøjnings- og vridningsmomenter
$m_{FX}^u, m_{FY}^u$	
$m_{FX}^u, m_{FY}^u$	: i plade beregnet i x-y-koordinatsystem
$m_x^e, m_y^e$	: Momentparametre for pladeelement
nd	: Antal designparametre for element
ne	: Antal elementer
nf	: Antal spændingsparametre for element
nk	: Antal knuder
nq	: Antal generaliserede tøjninger
nqc	: Antal koncentrerede generaliserede tøjninger
nr	: Antal elementrande
ns	: Antal spændingsfunktioner
nu	: Antal flytningsfunktioner
nw	: Antal flytningsparametre for element
ND	: Antal designparametre for konstruktion
NF	: Antal spændingsparametre for konstruktion
NS	: Antal statiske ligevægtsligninger
NW	: Antal flytningsparametre for konstruktion
nφ	: Antal flydefunktioner
nφe	: Antal opstillingspunkter for flydebet. i element
Nφ	: Antal flydebetingelsesrestriktioner (= $n_e \times n_{\phi} \times n_{\phi}$ )
P	: Fladelast
$P_x$	: Linielast
$P_i$	: i'te komponent af koncentreret kraft
$P_X^j, P_Y^j$	: Højreside i ligevægtsligninger (j'te belastningstilf.)
$Q_i$	: Generaliserede tøjninger
$Q_i$	: Generaliserede spændinger

$q_n$	: Forskydningskraft i snit med normal n
$q_n^*$	: Kirchhoff'sk forskydningskraft
$r_e, r_i$	: Randkræfter for element
$R, R_{ij}$	: Matrix for lineære flydebetingelsesrestriktioner
$R^O, R_i^O$	: Højre side i lineære flydebetingelsesrestriktioner
s	: Kurveparameter
$s_e, s_i^e$	: Spændingsfunktion for element
$t_i$	: i'te komponent af overfladelast
$T, T_{ij}$	: Transformationsmatrix
$u, u_i$	: Flytningsfunktioner
v	: Retningsvinkel i koordinatsystem
w	: Nedbøjning for plade
$w_e, w_i^e$	: Flytningsparametre for element
$W, W_i$	: Flytningsparametre for konstruktion
z	: Værdi af objektfunktion
$\alpha_j$	: Amplitdefaktor i normalitetstilf.
$\beta_j$	: Faktor i "inverse" flydefunktioner
$\chi_e, \chi_{ij}^e$	: Interpolationsmatrix for gen. spændinger
$\theta_n$	: Vinkel drejning i plades diskontinuitetslinje
$K_e, K_{ij}^e$	: Interpolationsmatrix for gen. tøjninger
$k_x, k_{xy}, k_y$	: Generaliserede tøjninger for plade (krumninger)
$\lambda$	: Lastfaktor
$\varphi_j$	: j'te flydefunktion
$\phi_j$	: Formel "invers" j'te flydefunktion
$\psi_e, \psi_{ij}^e$	: Interpolationsmatrix for spændinger
$\sigma_F$	: Flydespænding for armering

$\sigma_c$   
 $w_j^e$ ,  $w_{1j}^e$

: Betons trykstyrke  
: Interpolationsmatrix for flytninger

## INDLEDNING

I denne afhandling behandles primært automatiske numeriske metoder for beregning af jernbetonplader.

For en given plade påvirket af proportionalbelastning med given lastfordeling bestemmes lastfaktoren. Ved samme fremgangsmåde bestemmes det minimale armeringsforbrug for en plade med givne betondimensioner, givne belastninger og i forvejen valgt armeringsarrangement.

Metoderne angår alene brudsikkerheden, idet forhold som stivhed, stabilitet og skadelige revnevidder i det væsentlige ikke berøres.

De numeriske metoder baseres på plasticitetsteoriens nedreværdimetrode kombineret med matematisk optimeringsteknik og placerer sig således inden for det efterhånden vidtspændende område: optimering af bærende konstruktioner.

Gennem de sidste 20-30 år er udviklet adskillige matematiske optimeringsteknikker, der har fundet anvendelse ved analyse og design af bærende konstruktioner. Især må lineær programmering fremhæves for sin anvendelighed ved løsning af forskelligartede problemer.

Af speciel interesse i dette arbejde er optimeringsteknikkens anvendelse i forbindelse med plasticitetsteoretiske beregninger. Fremgangsmåden ved benyttelse af lineær programmering sammen med ekstremalprincipperne illustreres i kapitel 2 ved dimensionering af en plan rammekonstruktion.

I kapitel 3 opstilles generelle fremgangsmåder for optimering af en vilkårlig konstruktion på basis af enten øvre- eller nedreværdimetoden. Kontinumsproblemet diskretiseres ved elementinddeling, finite element. Specielt formuleres lineære programmeringsproblemer for konstruktioner med lineære eller lineariserede flydebetingelser.

Med udviklingen af flydebetingelserne for jernbetonplader, som blev foretaget i 60'erne, er det nu muligt at anvende matematisk plasticitetsteori ved beregning af disse konstruktioner.

I kapitel 4 angives grundlaget for at formulere beregningen af en jernbetonplade efter nedreværdimetoden i form af et lineært programmeringsproblem, d.v.s. optimering af en funktion, der udtrykkes lineært i et antal optimeringsvariable under hensyntagen til et sæt



Lineære restriktioner i disse variable.

Restriktionerne udgøres af et sæt statiske ligevægtsligninger og et sæt lineære flydebetingelser, uligheder. De statiske ligevægtsligninger opstilles automatisk ved anvendelse af ligevægtslemener og sikrer således et statisk tilladeligt momentfelt. Der vises to rektangulære og to trekantformede ligevægtslemener. Flydebetingelserne lineariseres og opstilles automatisk i en række på forhånd valgte kritiske punkter. Herved udtrykkes betingelserne i momentfeltets parametre samt de valgte design-parametre (jerneraleer) for dimensioneringsopgavens vedkommende.

Ønskes pladens bæreevne bestemt for en given lastfordeling indgår alene moment-parametrene i de lineære flydebetingelser. Opgaven bliver her at maksimere lastfaktoren, d.v.s. objektfunktionen er umiddelbart lineær. Ved dimensioneringsopgaven udtrykkes objektfunktionen, det totale armeringsforbrug, som en lineær funktion i de valgte design-parametre. Altså formuleres for begge opgavetyper et lineært programmeringsproblem.

I kapitel 5 omtales den numeriske behandling af det opstillede LP-problem. Det viser sig tidsbesparende at løse det tilhørende duale LP-problem. Herved opnås også fordele ved dimensionering for flere belastningstilfælde. Endelig omtales visse nødvendige proportioneringsmetoder for opnåelse af sikre statisk tilladelige løsninger.

De numeriske metoder er afprøvede i dette arbejde ved beregning af forskellige pladeproblemer. Resultaterne vises i kapitel 6 sammen med relevante resultater fra andre arbejder.

Andre optimeringsmetoder med anvendelser for beregning af jernbetonplader betragtes i kapitel 7, idet især numeriske metoder behandles. Specielt omtales automatiske øvregrænsemetoder (mekanismemetoder) samt tilnærmede ekstremalmetoder.

Det konkluderes, at med det nuværende kendskab til forskellige optimeringsteknikkers effektivitet og pålidelighed bør en rationel dimensioneringsmetode med anvendelse for praksis være baseret på lineær programmering. LP-problemet bør formuleres ved nedregrænsemetodens fremgangsmåde.

I kapitel 8 gives forslag til opbygningen af et praktisk anvendeligt EDB-program. Der påpeges endvidere andre relevante pladeproblemer til hvis behandling det i denne afhandling præsenterede grundlag ikke kan siges at være tilstrækkeligt.

Vektorer og matricer angives ved bølgestreg under symbolet. Summationskonventionen anvendes ved gentagelser af indices:  $i, j, k, l, m, n$  og  $r$ . I øvrige tilfælde benyttes summationstegn, når der skal summeres. Konventionen gælder for index såvel stående for oven som for neden, d.v.s. i udtryk som:  $a_i^j b_l^k$ ,  $a_i^j b_l^k$  og  $a_i^j b_l^k$ . I enkelte afsnit anvendes betegnelser med anden betydning end den i symbollisten givne. Betydningen vil da fremgå af teksten.

### 1. OPTIMERING AF BÆRENDE KONSTRUKTIONER

Det er ikke hensigten her at give en fuldstændig behandling af de forskellige matematiske optimeringsteknikkers anvendelse inden for projektering af bærende konstruktioner. Det tilstræbes blot at give en status for teknikkens udvikling og nuværende stade samt at give en kort omtale af de væsentligste matematiske optimeringsmetoder, der eksisterer og benyttes i dag. I det følgende vil udtrykkene "matematisk programmering" og "matematisk optimering" blive brugt synonymt.

#### 1.1 Historisk oversigt

I takt med de sidste 20-30 års store fremskridt inden for elektronisk databehandlings område er der udviklet adskillige potentielle matematiske optimeringsmetoder beregnet for anvendelse af EDB.

Mange forskere inden for området bærende konstruktioner har tidligt i disse optimeringsalgoritmer set muligheden for anvendelse ved beregning og dimensionering, eller med en mere international betegnelse: inden for analyse og design af bærende konstruktioner.

Til trods for den enorme forskning på dette område, hvis omfang bl.a. illustreres af den mængde litteratur, der er publiceret om emnet i de kendte tidskrifter, har selve optimeringsteknikken dog endnu ikke fundet den anvendelse i projekteringen, som dens indbyggede muligheder synes at berettige til. Grundene hertil kan være mange. For at belyse disse vil vi først se lidt på den historiske udvikling angående den almindelige projekterings anvendelse af EDB.

I tiden før fremkomsten af elektroniske regnemaskiner var man tvunget til at antage simple matematiske modeller for den konstruktion, man skulle dimensionere, hvilket i sig selv helt op til vore dage har været medvirkende til også at foretrække simple udformninger af konstruktionen. Yderligere simplificering har så været indført ved at foretage en forenklet analyse af den matematiske model under hensyntagen til hele tiden at være "på den sikre side".

Dette har naturligvis medført store sikkerhedsmarginer som før i tiden har været mere berettigede end nu, hvor bl.a. materialegenskaberne i sig selv samt kendskabet til disses betydning for konstruktionens egenskaber er udvidet, så en mere forfinet teori med rette kan anvendes.

Den første udnyttelse af EDB var at programmere de simple analysemetoder til automatisk beregning ved hjælp af computer. Derefter fulgte udviklingen af troværdige og hurtigt regnende ligningsløser med anvendelse ved beregning af mere komplekse konstruktioner. Her kan bl.a. nævnes programmering af kraft- og deformationsmetoden for beregning af rammekonstruktioner, idet opstilling af konstruktionens fleksibilitets- og stivhedsmatricer programmeredes.

Først i starten af 60'erne viste sig den første nyudvikling, som var direkte påvirket af EDB-teknikkens udvikling, nemlig formuleringen af finite element metoden samt systematisering af de kendte differensmetoder. Ved disses brug har det været muligt at omsætte mere forfinede teorier til praktisk brug ved projektering af konstruktioner af mere kompleks struktur.

Det teoretiske grundlag for de forskellige elementmetoder må siges i dag at have nået et tilfredsstillende stade af fuldkommenhed. Set i relation til kendskabet til materialegenskaber og de foreskrevne belastningers sandsynligheder må den nuværende viden om de forskellige elementmetoders egnethed siges at være tilfredsstillende, når der betragtes elasticitetsteoretiske beregninger af de konstruktionstyper, der benyttes i praksis. Det resterende arbejde på dette felt må forventes at ligge i at lette det manuelle arbejde, der er forbundet med metodernes anvendelse. Heri bl.a. udvikling af generelle rutiner, der ud fra valgte elementtyper automatisk foretager ønskede elementinddelinger og således begrænser den nødvendige inputmængde. Konkurrenceevnen for de eksisterende kommercielle elementprogrammer viser sig ofte at være betinget af en rimelig løsning af dette forhold.

De hermed nævnte hovedgrupper af EDB-metoder anvendes i dag i udstrakt grad ved analyser i forbindelse med projektering af bærende konstruktioner. Forholdene stiller sig anderledes angående benyttelse af matematisk programmering ved dimensionering.

Denne teknik er især udviklet gennem de sidste 15-20 år. Dens første anvendelsesområde var inden for økonomisk planlægning.

Metodens anvendelse ved projektering af en konstruktion kan være af følgende art: Konstruktionens udformning er fastlagt med undtagelse af et sæt dimensioneringsvariable opstillet i vektoren

$$D = (D_1, D_2, \dots, D_{ND}), \text{ hvor } D_1 \text{ kan være en dimension, materiale-}$$

konstant, forspændingsgrad etc.

Der stilles nu på forhånd visse krav til konstruktionens opførelse. Disse kan være udtrykt i restriktioner for spændinger, nedbøjninger, egenfrekvenser, minimumskrav for dimensioner bestemt ved normkrav o.s.v. Ovenstående krav udtrykkes på matematisk form dels ved de valgte dimensioneringsvariable, et antal statiske parametre

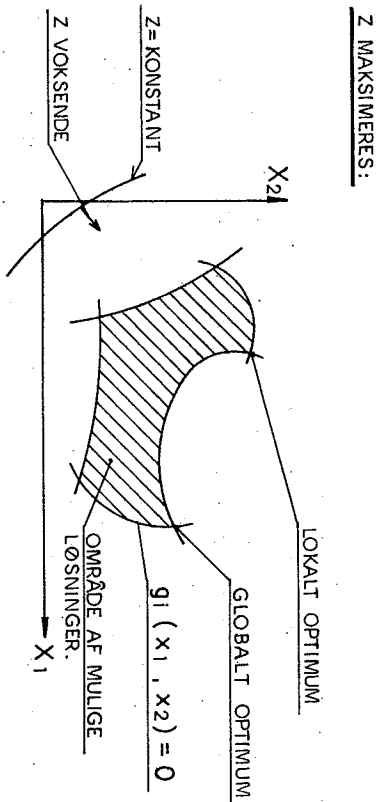
$F = (F_1, F_2, \dots, F_{NF})$  samt et sæt geometriske parametre  $\tilde{W} = (W_1, W_2, \dots, W_{NW})$ . Konstruktionens "godhed" udtrykkes nu ved et funktionsudtryk, hvis variable er indeholdt i  $\tilde{D}$ ,  $\tilde{F}$  og  $\tilde{W}$ . Det er nu denne funktion, objektfunktionen, der skal optimeres (maksimeres eller minimeres) under hensyntagen til de gældende begrænsninger, restriktioner. Samles samtlige variable, optimeringsvariable, nu i vektoren  $\tilde{X} = (x_1, x_2, \dots, x_N)$ , hvor  $N = ND + NF + NW$  kan optimeringsproblemet opstilles som:

$$\begin{aligned} \text{optimer } z = z(\tilde{x}) \\ \text{med hensyn til } g_i(\tilde{x}) \leq 0 \quad i = 1, 2, \dots, M \end{aligned} \quad (1.1.1)$$

I restriktionerne er naturligvis også indeholdt nødvendige ligninger, så som statiske ligevægtsligninger, kompatibilitetsligninger o.s.v. Der må selvfølgelig ikke indgå variable i objektfunktionen som ikke er repræsenteret i restriktionerne, hvis problemet skal have et endeligt optimum.

For at (1.1.1) skal have en optimal løsning kræves, at der eksisterer mindst ét sæt mulige løsninger, d.v.s. der eksisterer mindst ét sæt variable, der opfylder restriktionerne. Dette kan gøres en geometrisk fortolkning, idet restriktionsudtrykkene,  $g_i(\tilde{x}) = 0$ ,  $i = 1, \dots, M$  bestemmer  $M$  hyperflader i det  $N$ -dimensionale rum. Der kræves således, at de  $M$  hyperflader begrænser et område, der indeholder mindst et punkt og evt. er et uendeligt område. Er  $\tilde{X}$  en to-dimensional vektor kan forholdene illustreres som vist på figur 1.1.1.

Optimeringsopgaven givet ved (1.1.1) er indlysende egnet til løsning ved EDB. Objektfunktionen skal undersøges i forskellige punkter. Afhængigt af resultatet skal nyt punkt opsøges ud fra programmeret strategi. De forskellige algoritmers anvendelighed vurderes ud fra hvor hurtigt og hvor sikkert den globale optimale løsning nås.



To dimensionalt optimeringsproblem.

Figur 1.1.1

### 1.2 Oversigt over matematiske optimeringsteknikker

Neden for er angivet de væsentligste metoder for matematisk programmering med anvendelse inden for bærende konstruktioner.

#### 1. Lineær programmering:

Denne er den hidtil bedst kendte og mest effektive metode. I princippet fås her altid den globale løsning for problemer, der kan formuleres ved en lineær objektfunktion med tilhørende lineære restriktioner.

Dens første anvendelsesområde inden for bærende konstruktioner var beregning og dimensionering af plane rammer bestående af ideal-plastiske materialer.

Metoden er kort beskrevet i denne afhandlings appendix. For nærmere beskrivelse af metoden henvises til Gass [69.1] og Künni [67.1].

#### 2. Kvadratisk programmering:

Er objektfunktionen givet ved et kvadratisk udtryk i de valgte optimeringsvariable og er restriktionerne givne ved lineære udtryk findes kvadratisk programmeringsproblem. Denne metode kan anvendes inden for plasticitetsteoretisk analyse af konstruktioner. Ved bæreevnebestemmelse efter nedrevaridimetoden bliver opgaven at minimere den komplementære energi. Et analogt problem fås ved beregning af stive, idealt-plastiske bjælker med dynamisk påvirkning. Angående en beskrivelse af metoden henvises til Collatz og Wetterling [66.1].

#### 3. Ikke-lineære metoder:

De mest korrekte matematiske modeller for langt de fleste dimensioneringsopgavers vedkommende giver anledning til ikke-lineære optimeringsproblemer. Ved benyttelse af ikke-lineære optimeringsalgoritmer kan en del af disse problemer løses uden yderligere simplificering af den matematiske model. Af de hertil mest kendte metoder kan nævnes:

3.1 Gradientmetoden: Se Rosen [60.1].

3.2 Mulige retnings metode: Se Zoutendijk [60.2].

3.3. Sekventiel lineær programmering: Se Griffith og Steward [61.1].

#### 4. Straf-funktions metoden:

Denne er en mere speciel ikke lineær metode. Restriktionerne indføres i objektfunktionen. Denne optimeres uden tilhørende restriktioner, idet den værdi hver enkelt restriktion overskrides med behæftes med en "negativ" værdi for objektfunktionen (straf), således at optimum kun opnås når alle restriktionerne er overholdte. Denne metode er nærmere beskrevet af Fiacco og McCormick [64.1].

#### 5. Geometrisk programmering:

Denne er en ret ny optimeringsmetode. Der kræves at såvel objektfunktionen som restriktionerne kan beskrives ved potensnomer, d.v.s. udtryk af formen:  $a x_1^{b_1} x_2^{b_2} \dots x_N^{b_N}$ , hvor  $a, b_1, \dots, b_N$  er givne konstanter. Denne metodes anvendelse er undersøgt af Morris [72.1]. Duffin, Peterson og Zener [67.2] har givet en generel beskrivelse af metoden og dens anvendelser.

For flere af ovenstående ikke-lineære optimeringsmetoder har Pope og Schmit [71.1] samt Spunt [71.2] givet nogle anvendelsesområder ved beregning af bærende konstruktioner.

### 1.3 Optimeringsteknikkens stade og fremtid

Det er klart, at en lang række projekteringsopgaver inden for bærende konstruktioner kan formuleres på en form som (1.1.1).

Objektfunktionen vil oftest udtrykke den totale omkostning for konstruktionen. Også andre forhold så som konstruktionens æstetik og funktionsdygtighed (f.eks. stivhed ved brugslast) kan medtages, men problemet er her ofte at omsætte disse mere vage egenskaber i matematiske udtryk.

Som et kuriosum kan nævnes, at Maxwell [90.1] allerede i 1890 opstillede et teorem, der beskrev den totale materiallemængde, der var nødvendig for at optage givne kræfter i en gitterkonstruktion. Senere i 1904 generaliserede Michell [04.1] teorien ved behandling af gitterkonstruktioner, hvori selve stangkonfigurationen end ikke var foreskrevet.

I de seneste år har en lang række forfattere dyrket emnet: anvendelse af matematiske optimeringsmetoder ved beregning af bærende konstruktioner. Kun en lille del af den tilhørende litteratur vil blive refereret i det følgende. Fortegnelser over generelle arbejder er givet af Shen og Prager [68.1] og af Niordson og Pedersen [72.2].

Der er således på den ene side ydet et enormt arbejde for udviklingen af numeriske metoder til forskellige optimeringsproblemers løsning og på den anden side er der udført store forskningsarbejder angående bærende konstruktioners beregning ved hjælp af optimeringsteknik.

Som en af de væsentligste grunde til den før nævnte mangel på praktisk anvendelse af automatisk dimensionering bør nævnes, at løsning af optimeringsproblemet sædvanligvis stiller større krav til EDB-anlæggets kapacitet end de anvendte EDB-orienterede analysemetoder. Den hastige udvikling angående computerkapacitet og priseduktion for EDB - forbrug synes dog allerede nu at få kendelig virkning her.

En anden årsag er uden tvivl de uheldige resultater ved for ambitiøs anvendelse af metoden, som bl.a. har givet sig udtryk ved trangen til at opstille et komplet system med anvendelse for så forskellige artede konstruktionstyper som muligt. Meget arbejde er endvidere ofret på at formulere opgaver, der af natur ikke er egnede til automatisk design så som at bestemme en konstruktions layout ud fra generelle kriterier angående konstruktionens funktion. Ved en

sådan start på anvendelse af optimeringsteknik støder man nemlig straks på to store problemer. Den ene er angående selve den matematiske formulering af objektfunktionen og restriktionerne. Lad os eksempelvis tænke os, at den konstruktion, der ønskes optimeret, tillades udført i enten stål eller jernbeton og at kostprisen ønskes minimeret. For stålkonstruktionens vedkommende vil det i mange tilfælde være rimeligt at lade objektfunktionen udtrykke den totale vægt, medens man for betonkonstruktioner må tage flere forhold i betragtning så som betonpris, stålprijs, forskalling og jernarbejde. Det andet problem er angående det opstillede matematiske optimeringsproblems mulige løsning. Denne mulighed er nemlig i høj grad baseret på eksisterende algoritmer og disses effektivitet og pålidelighed.

Også den entusiastiske skares modsætninger har været medvirkende til den hidtidige begrænsede udnyttelse. En vis konservatisme inden for bygningsprojektering har naturligvis ikke virket fremmende. Her til kommer en hyppigt forekommende angst for den projekterende ingeniørs overflidiggørelse. Denne angst er sikkert for en del affødt af skræmmende eksempler fra f.eks. central-administrering, men må i dette tilfælde siges at være ubegrundet. Den automatiske dimendionering kan kun overtage rutineprægede operationer og således være et behageligt hjælpemiddel, der endog kan give bedre og mere korrekte løsninger samt yderligere information om løsningens egnethed.

Endelig må man sige, at den hidtidige forskning inden for optimeringsteknikkens anvendelse ved projektering af bærende konstruktioner for en stor dels vedkommende har savnet en færdiggørelse til overtagelse af praktiserende virksomheder. Dels har en del forskning på området kun givet resultater af akademisk interesse. Set ud fra et forskningsmæssigt synspunkt er dette naturligvis ikke kritisabelt, idet der ad denne vej er fremkommet ny viden af teoretisk art. Dels ser man ofte eksempler på, at udviklede metoder med praktisk islæt kun har været testet ved simple eksempler og ikke har været afprøvet ved løsning af praktisk forekommende problemer. Her gælder det nemlig især for matematisk programmering, at numeriske problemer først opstår ved behandling af store datamængder, således at de udviklede metoder kan være uanvendelige ved løsning af praktiske designproblemer.

Der synes dog i de seneste år at være udført mange forskningsarbejder med henblik på anvendelse af optimeringsteknik i praksis. Med billiggørelsen af elektronisk databehandling og videreudvikling af de forskellige numeriske løsningsmetoder samtidig med en fornuftig udvælgelse af praktiske dimensionseringsproblemer, til hvis løsning optimeringsteknikken er egnet, må det forventes at anvendelsen vil få et betydeligt opsving i den nærmeste fremtid.

Skal optimeringsteknikken benyttes som et hjælpemiddel ved beregning af bærende konstruktioner må man for det aktuelle problems løsning både skele til nuligheden af at opstille en matematisk model hvorved der kan formuleres et matematisk optimeringsproblem samt til eksistensen af algoritmer, hvorved det opstillede problem kan løses sikkert og med rimelig regnetid.

Den fremtidige udnyttelse af optimeringsteknikkens muligheder peger således i retning af at begrænse sig til mindre grupper af problemer ad gangen. Disse skal have det til fælles, at de med rimelig nøjagtighed kan beskrives ved sådanne matematiske modeller, der giver anledning til formulering af optimeringsproblemer, der med sikkerhed kan løses numerisk.

En anden mulig anvendelse i fremtiden er optimeringsteknik kombineret med interaktive EDB-systemer. Denne teknik, der endnu må siges at være i sin vorden, tilgodeser både ingeniørens egenskaber: erfaring og intuition, og computerens egenskaber: hurtige resultater ved løsning af komplekse matematiske problemer.

Vi vil nu forlade optimeringsteknikkens generelle anvendelse og se lidt nærmere på et specielt anvendelsesområde, som har særlig relevans for denne afhandling, nemlig anvendelse i forbindelse med plasticitetsteoretiske beregninger af bærende konstruktioner.

## 2. PLASTICITETSTEORETISKE ANVENDELSER AF OPTIMERINGSTEKNIK

Anvendelse af matematisk programmering synes især at have haft og må forventes i endnu højere grad for fremtiden at vil få særlig succes ved dimensionering af bærende konstruktioner efter plasticitetsteorien. Ved anvendelse af plasticitetsteoriens ekstremalprincipper i beregningerne er formuleringen af et tilhørende matematisk programmeringsproblem for de fleste projekteringsopgaver indlysende.

Ekstremalprincipperne vil blive summarisk omtalt i afsnit 2.1. Formulering af de til metoderne hørende optimeringsproblemer er umiddelbar ved dimensionering af plane rammekonstruktioner med givne koncentrerede belastninger og bestående af ideal-plastiske materialer. Ved passende formulering af objektfunktion fås her et lineært programmeringsproblem. Dette vil blive omtalt i afsnit 2.2 til illustration af løsningsmeknikken.

For anvendelse på en bredere klasse konstruktioner er det nødvendigt at anvende diskretiseringsmetoder til opstilling af et problem, der kan løses numerisk. Dette vil blive beskrevet generelt i kapitel 3. I relation til denne afhandlings emne vil i afsnit 2.3. blive omtalt de specielle forhold, der gør sig gældende ved beregning af jernbetonkonstruktioner.

## 2.1 Plasticitetsteoriens ekstremalprincipper

Ved en dimensionering efter plasticitetsteorien af en konstruktion bestående af ideal-plastiske materialer vil man søge at finde den konstruktion der med den mindste pris (ofte forenklet til mindst materialeforbrug) kan bære de givne belastninger uden at plastiske deformationer indtræffer.

Teorien for ideal-plastiske materialer skal ikke beskrives her, idet der henvises til fremstillinger givet af Prager [59.1] og Hodge [59.2]. En kort oversigt er givet af Nielsen [69.2]. Her skal blot nævnes de vigtige ekstremalprincipper: Øvreverdisætningen og nedreverdisætningen.

Øvreverdisætningen: Hvis det indre plastiske arbejde svarende til en vilkårlig geometrisk mulig brudmåde er mindre end det ydre arbejde, da kan den pågældende belastning ikke bæres af konstruktionen.

Nedreverdisætningen: En belastning, for hvilken en sikker statisk tilladelig spændingsstilstand kan findes, kan ikke eller vil netop fremkalde brud.

Hidtil har langt den væsentligste anvendelse af ekstremalprincipperne været ved bæreevnebestemmelser for givne konstruktioner under antagelse af proportionalbelastning. Det er især øvreverdimetoder, der har været benyttet ved "håndregning". Af disse kan eksempelvis nævnes brudlinieteorierne.

Til en bæreevnebestemmelse efter øvreverdimetoden må man gennemregne en række mulige brudnåder og finde de dertil hørende lastfaktorer. Den mindste af disse giver da den ud fra de beregnede værdier mest korrekte bæreevne. Kun under specielle omstændigheder kan man være sikker på at finde den eksakte bæreevne, medens man normalt vil finde en bæreevne på den usikre side og uden oplysning om dens afvigelse fra den korrekte værdi. For plane rammekonstruktioner af ideal-plastiske materialer kan man ved benyttelse af mekanismemetoden finde den korrekte bæreevne.

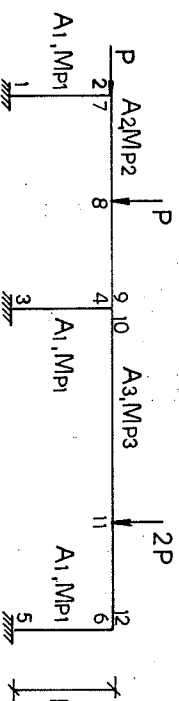
Nedreverdimetoden har hidtil været mindre benyttet, da opstilling af egnede ligevægtsligninger ofte volder besvær ved almindelig "håndregning". Ved anvendelse af EDB er det dog nu muligt at opstille disse ligevægtsligninger automatisk. Også her opnås kun sjældent den korrekte

værdi af bæreevnen; men metoden udmærker sig ved at give resultater på den sikre side.

## 2.2 Plane rammekonstruktioner

En dimensioneringsopgaves formulering som et matematisk programmeringsproblem illustreres lettest ved en rammekonstruktion, idet den nødvendige diskretisering her automatisk er indført. Der forudsættes ideal-plastiske materialer, normalkraftens indflydelse på momentfordelingen negligeres og de opståede deformationer regnes ikke at få indflydelse for konstruktionens virkemåde.

Vi stiller os nu den opgave at dimensionere den på figur 2.2.1 viste 2-fags ramme for den givne belastning. De søgte værdier er de 3 dimensioneringsvariable,  $A_1$ ,  $A_2$  og  $A_3$ , der giver mindst mulig materialeforbrug. Det antages nu tilnærmevisvist, at de plastiske momenter (såvel positive som negative) er proportionale med tværsnitsarealerne. Objektfunktionen kan da opstilles som

$$z = (3 \times A_1 + 2 \times A_2 + 3 \times A_3) \times L = K \times (3 \times M_{P1} + 2 \times M_{P2} + 3 \times M_{P3})$$


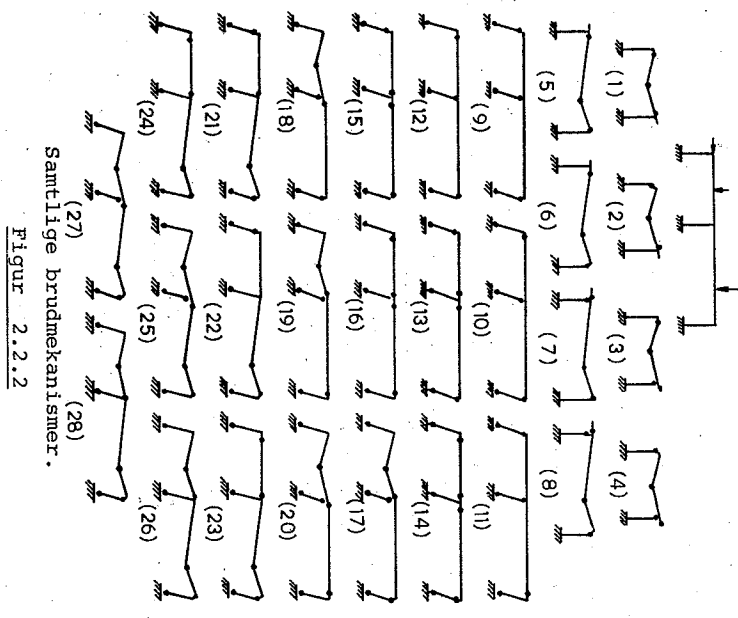
Plan rammekonstruktion af idealt-plastisk materiale.

Figur 2.2.1

De ubekendte momenter i de kritiske snit,  $M_1$ ,  $M_2$ ,  $\dots$ ,  $M_{12}$ , samt de valgte designvariable,  $M_{P1}$ ,  $M_{P2}$  og  $M_{P3}$  repræsenteres ved vektoren  $\tilde{x} = (\tilde{x}_M, \tilde{x}_{MP})^T$ , hvor  $\tilde{x}_M = (M_1, M_2, \dots, M_{12})$  og  $\tilde{x}_{MP} = (M_{P1}, M_{P2}, M_{P3})$ .

Øvreverdimetoden

For alle mulige brudnåder, mekanismer, opstilles at det indre plastiske arbejde er større end eller lig med det ydre arbejde. Der findes i alt 28 mulige mekanismer som vist på figur 2.2.2.



Samtlige brudmekanismer.  
Figur 2.2.2

Vi kan nu opstille problemet på en form svarende til (1.1.1), nemlig:

$$\begin{aligned} \text{minimer: } z &= Q \times X = Q_1 \times X_M + Q_2 \times X_{MP} = Q_2 \times X_{MP} \\ \text{m.h.t. } B \times X &= B_1 \times X_M + B_2 \times X_{MP} = B_2 \times X_{MP} \geq A^Y \end{aligned} \quad (2.2.1)$$

Her er:  
 $Q_2 = (3, 2, 3)$

$$B_2 = \begin{bmatrix} 0 & 4 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \\ 2 & 0 & 4 & 4 \\ 1 & 1 & 5 & 5 \\ 3 & 1 & 3 & 3 \\ 6 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 1 & 1 \\ 5 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 2 & 2 \\ 3 & 2 & 2 & 2 \\ 5 & 3 & 0 & 0 \\ 6 & 2 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & 1 & 1 \\ 5 & 2 & 2 & 2 \\ 7 & 1 & 3 & 3 \\ 4 & 1 & 6 & 6 \\ 6 & 2 & 3 & 3 \\ 3 & 2 & 6 & 6 \\ 5 & 2 & 7 & 7 \\ 3 & 4 & 6 & 6 \\ 8 & 2 & 5 & 5 \\ 6 & 4 & 3 & 3 \end{bmatrix}$$

$$A^Y = [1, 1, 1, 1, 4, 4, 4, 4, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 2, 5, 5, 5, 5, 6, 6, 6, 6, 6]^T \times P \times L$$

Hermed er opstillet et lineært programmeringsproblem, der kan løses ved simplex-algoritmen. Løsningen er  $X_{13} = M_{P1} = 0,5 \times PL$ ;  $X_{14} = M_{P2} = 0,25 \times PL$  og  $X_{15} = M_{P3} = 0,75 \times PL$ . Objektfunktionen får den optimale værdi:  $z = K \times 4,75 \times PL$ . Ud fra løsningen kan eftervises, at ligevægtsligningerne tillige med flydebetingelserne er opfyldte. For det resulterende design er belastningen altså en eksakt brudlast.



Nedreverdimetoden:

I konstruktionen findes 12 farlige snit for den givne belastning. Konstruktionen er 6 gange statisk ubestemt. Der kan da opstilles 6 uafhængige ligevægtsligninger. Disse ligninger udgør sammen med flydebetingelserne i de 12 snit de tilhørende restriktioner. Hermed kan opstilles følgende lineære programmeringsproblem:

$$\text{Minimer} \quad : z = S_2 \times \tilde{x}_{MP}^T$$

$$\text{med hensyn til} \quad B_3 \times \tilde{x}_M^T - B_0 = 0$$

$$B_4 \times \tilde{x}_M^T + B_5 \times \tilde{x}_{MP}^T \geq 0$$

(2.2.2)

Her er

$$S_2 = (3, 2, 3)$$

$$B_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$B_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & & & & & & & & & & & \\ 0 & 1 & & & & & & & & & & \\ 0 & -1 & & & & & & & & & & \\ 0 & & 1 & & & & & & & & & \\ & & & -1 & & & & & & & & \\ & & & & 1 & & & & & & & \\ & & & & & 1 & & & & & & \\ & & & & & & -1 & & & & & \\ & & & & & & & 1 & & & & \\ & & & & & & & & -1 & & & \\ & & & & & & & & & 1 & & \\ & & & & & & & & & & -1 & \\ & & & & & & & & & & & 1 \\ & & & & & & & & & & & & -1 \\ & & & & & & & & & & & & & 1 \\ & & & & & & & & & & & & & & -1 \\ & & & & & & & & & & & & & & & 1 \\ & & & & & & & & & & & & & & & & -1 \\ & & & & & & & & & & & & & & & & & 1 \\ & & & & & & & & & & & & & & & & & & -1 \\ & & & & & & & & & & & & & & & & & & & 1 \\ & -1 \\ & 1 \end{bmatrix}$$

$$B_0 = [1, 4, 1, 0, 0, 0]^T \times P \times L$$

Ved løsning af (2.2.2) med simplex-algoritmen giver dette naturligvis samme resultat som før.

Det bemærkes, at de lineære programmeringsproblemer givne ved (2.2.1) og (2.2.2) ikke er hinandens duale problemer i sædvanlig forstand. Det må dog bemærkes, at for begge problemer kan de tilsvarende duale lineære programmeringsproblemer gives en mekanisk fortolkning. Dette er behandlet af Chan [69.3].

Cohn, Parimi og Ghosh [71.3], hvorfra dette eksempel er hentet, giver et optimeringsteknisk bevis på løsningens entydighed.

Ved problemer, hvor blot lastparameteren, ved forudsætning af propor-

tionelbelastning, ønskes optimeret ved øvre- henholdsvis nedreværdi- metoden kan vises, at de to metoder giver duale lineære programmeringsproblemer, hvilket bekræfter plasticitetsteoriens entydighedsætning. Af arbejder på dette felt kan nævnes Charnes, Lemke og Zienkiewicz [59.3], Foulkes [54.1], Livesley [56.1], Hemp [64.2] og Präger [65.1].

Marcal og Prager [64.3] har angivet en metode til løsning af problemet, hvor objektfunktionen ikke er lineær. Ved antagelse af en konveks objektfunktion kan problemet løses ved beregning af en associeret ikke lineær elastisk konstruktion med samme belastning som den aktuelle konstruktion.

Cohn, Ghosh og Parimi [71.4] har endvidere behandlet problemer angående flere belastningstilfælde samt stabiliseringslast-problemer (shake down) ved opstilling af tilhørende lineære programmeringsproblemer.

I denne forbindelse kan også nævnes, at Holst [74.1] har behandlet optimering af geometrisk ikke-lineære rammekonstruktioner af lineære elastiske materialer ved benyttelse af sekventiel lineær programmering.

### 2.3 Specielle forhold ved jernbetonkonstruktioner

Optimeringsteknikken synes særlig velegnet ved plasticitetsteoretisk dimensionering af jernbetonkonstruktioner. Nogle af de væsentligste grunde hertil skal nævnes i det følgende.

For disse konstruktioner er en dimensionering efter plasticitetsteorien særlig relevant på grund af materialernes egenskaber.

I modsætning til øvrerærdimetoderne så som brudlineteorier, der kan anvendes ved simpel håndregning, giver nedreværdimetoden løsninger, der er på den sikre side, samt giver oplysninger om forholdene i hele konstruktionen og ikke blot i enkelte punkter eller langs enkelte linier. Nedreværdimetoden kræver ofte for opnåelse af rimelige løsninger at de tilhørende ligevægtsløsninger genereres automatisk på parameterform. Herved er behandlingen i forbindelse med optimeringsteknik umiddelbar.

Dimensionering af jernbetonkonstruktioner fører almindeligvis til beregninger i såvel brugs- som brudstadiet. En dimensionering ud fra kravene til konstruktionens brugstilstand kan med god rimelighed ud-

føres efter elasticitetsteorien. Disse beregninger vil ofte resultere i fastlæggelse af betondimensionerne ud fra stivhedskrav, krav til laveste egenfrekvens. Endvidere kan revnevidde-beregninger føre til visse minimumskrav for den lagte armering.

Herved kan man for en del konstruktioners vedkommende begrænse sig til at betragte armeringsstyrrelserne som designvariable ved selve brudberegningen. Objektfunktionen bliver da veldefineret, idet man ofte ud fra et i forvejen valgt armeringsarrangement ønsker at minimere den totale armeringsmængde.

Alternativet til den automatiske dimensionering efter plasticitetsteorien vil ofte være at anvende den elastiske snitkraftfordeling i brudberegningen. Dette er inkonsekvent da en plastisk dimensionering bør drage fordel af konstruktionens plastiske egenskaber. Optimeringsteknikkens fordele er her indlysende, idet mulighederne for snitkraftomlejninger herved udnyttes i størst mulig omfang. Dette forhold forstærkes ved behandling af flere belastningstilfælde. Hvis de tilhørende elastiske snitkraftfordelinger anvendes, må man således i hvert snit dimensionere for den maksimale ydre påvirkning uden at tage bærevnereserven i den øvrige del af konstruktionen i regning. Ved anvendelse af optimeringsteknikken vil der være mulighed for i hvert lasttilfælde at udnytte de øvrige belastningers armeringsbestemmelser bedst muligt. Ved en sådan successiv behandling af forskellige belastningstilfælde fås således blot en "semioptimal" løsning. Det "globale" optimum i henhold til metodens matematiske model opnås ved formulering af et matematisk optimeringsproblem, hvori alle belastningstilfælde repræsenteres samtidigt. Dette generelle problem for optimeringsteknikkens anvendelse vil blive nærmere behandlet i forbindelse med optimering af jernbetonplader, se kapitel 5.

Mulighederne for maksimal udnyttelse af armering bestemt ud fra andre krav end de rent brudmæssige så som revnearmering, armering bestemt ud fra normkrav etc., fremgår af betragtninger analoge til ovenstående.

### 3. ANVENDELSE AF EKSTREMALPRINCIPPER PÅ VILK. KONSTRUKTION.

I dette kapitel gives en beskrivelse af mulige generelle numeriske metoder, der ved anvendelse af plasticitetsteoriens ekstremalprincipper formulerer et matematisk optimeringsproblem. Herved søges bl.a. forklaret de betingelser, der skal være overholdte for opnåelse af sande ekstremalløsninger.

Behandlingen vil blive indskrænket til materialer, der kan beskrives ved den stift ideal-plastiske model, idet hensigten er at give en generel beskrivelse møntet på beregningen af jernbetonkonstruktioner, som vist i denne afhandlings kapitel 4. For jernbeton synes denne model nemlig at være anvendelig ved brudberegninger. Derimod har det endnu ikke været muligt at give en matematisk plasticitets-teori for jernbetonkonstruktioner, hvorved kan beregnes de endelige deformationer, der er indtruffet lige før brudtilstanden nås.

Da således kun selve brudtilstanden interesserer os, og da denne vil være uafhængig af belastningshistorien, vil anvendelse af den stift-ideal-plastiske model kunne give alle de ønskede oplysninger om brudtilstanden. Til formålet er det således ikke nødvendigt at anvende tilvækstteorien. Derfor vil i det følgende blive anvendt endelige størrelser for tøjninger (rent plastiske) og spændinger. Der stilles dog det krav til de virkelige deformationer, der indtræffer undervejs til brudtilstanden, at de kan regnes ikke at ændre konstruktionens statiske virkemåde.

I næste afsnit vil de analytiske udtryk for beregning af konstruktionen som et kontinuum blive opskrevet. Herefter vil i afsnit 3.2 blive beskrevet diskretiseringsmetoder ved anvendelse af finite element. Der gives elementtyper til benyttelse af henholdsvis øvrerårdsætningen henholdsvis nedrevårdsætningen. Endelig omtales i afsnit 3.2.3 såkaldte "blandede" elementtyper, der afhængig af flytnings- og spændingsfelternes art kan benyttes ved enten øvre- eller nedrevårdsætninger. Ved benyttelse af sådanne elementer og total linearisering af optimeringsproblemet kan øvre- og nedrevårdsætningen ved bæreverbestemmelse resultere i duale lineære programmeringsproblemer, der vidnes at give samme løsning.

I det følgende vil blive behandlet de to nært beslægtede problemer:

- a. Bestemmelse af bærevne under antagelse af proportionalbelastning.
- b. Dimensionering ud fra given belastning.

#### 3.1 Kontinuumsmodel.

For beskrivelsen af et tredimensionalt kontinuum benyttes et kartesiske  $(x, y, z)$ -koordinatsystem. Tøjningsvilkår kan tænkes beskrevet ved  $nq$  generaliserede (fordelte) tøjninger,  $q_i(x, y, z)$ ,  $i = 1 \dots nq$ . Tilsvarende beskrives spændingstilstanden ved  $nq$  generaliserede spændinger  $Q_i(x, y, z)$ . For den stift ideal-plastiske materiallemodel fås

$$q_1 = q_1^e + q_1^p = q_1^p \quad (3.1.1)$$

$Q_1$  og  $q_1$  er således definerede, at det indre plastiske arbejde (den specifikke dissipation) kan beskrives ved:

$$A_F^I = \int_V Q_1(x, y, z) \times q_1(x, y, z) dV \quad (3.1.2)$$

Her udføres integrationen over hele konstruktionen. I tilfælde, hvor den matematiske plasticitetsteori tillader diskontinuiteter i de generaliserede tøjninger må hertil defineres et sæt generaliserede koncentrerede tøjninger  $q_1^c(x, y, z)$   $i = 1 \dots nqc$ . Disse giver anledning til ekstra led i det indre plastiske arbejde:

$$A_C^I = \int_L Q_1(x, y, z) \times q_1^c(x, y, z) dL \quad (3.1.3)$$

Ved tredimensionale legemer fås her et planintegral (brudflader) ved todimensionale legemer fås et linieintegral (brudlinier) etc.

Det totale indre plastiske arbejde beskrives da ved:

$$A^I = A_F^I + A_C^I = \int_V Q_1 q_1^c dV + \int_L Q_1 q_1^c dL \quad (3.1.4)$$

De generaliserede tøjninger og spændinger er sammenknyttede ved et sæt konstitutive ligninger, nemlig flydebetingelserne og flydeloven. Vi vil her antage, at disse er i overensstemmelse med Druckers [52, 1] stabilitetskriterium, d.v.s. at de overholder konveksitets- og normallitetsbetingelserne.

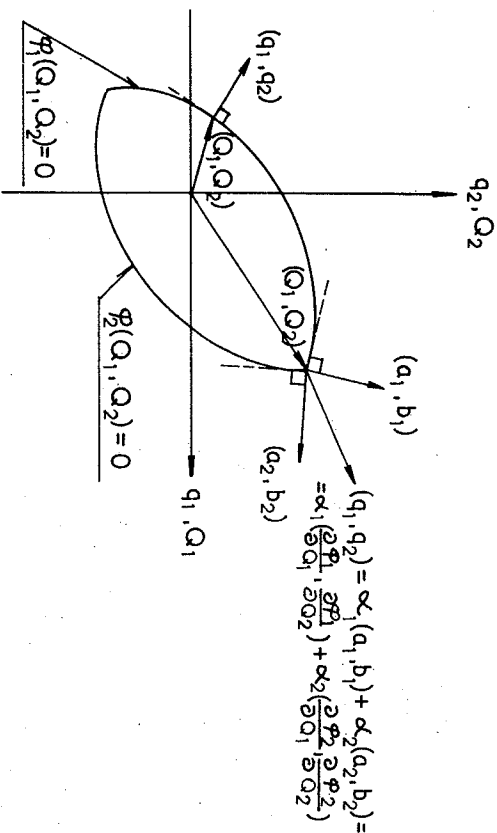
Flydebetingelserne i et pkt. er givet ved  $n\varphi$  uligheder:

$$\varphi_j(x, y, z, Q_1) \leq 0 \quad j = 1, \dots, n\varphi \quad (3.1.5a)$$

Flydeoven for de generaliserede tøjninger i et pkt. lyder:

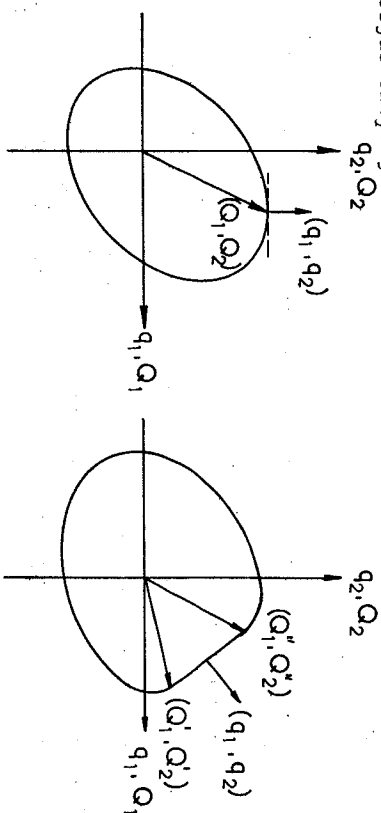
$$\begin{aligned} \varphi_1(x, y, z) &= \alpha_j \frac{\partial \varphi_j(x, y, z, Q_1)}{\partial Q_1} & i = 1, \dots, n\varphi \\ \alpha_j &= 0 \quad \text{for } \varphi_j < 0 \\ \alpha_j &\geq 0 \quad \text{for } \varphi_j = 0 & j = 1, \dots, n\varphi \end{aligned} \quad (3.1.5b)$$

Idet der kun betragtes konvekse flydebetingelser, fås af plasticitetsteoriens entydighedsætning for de generaliserede tøjninger, at deformationstilstanden er entydigt bestemt på nær en "amplitudefaktor", såfremt spændingstilstanden er kendt overalt. I tilfælde, hvor spændingstilstanden i et pkt. er repræsenteret af et singulært pkt. på flydefladen kan dog kun angives et område, hvori den tilhørende tøjningsvektor ligger. Dette kan anskueliggøres geometrisk som på figur 3.1.1, hvor  $n\varphi = 2$ .



Normalitetsbetingelsen  
Figur 3.1.1

Betragtes kun strengt konvekse flydebetingelser, giver plasticitetsteoriens entydighedsætning for de generaliserede spændinger i et pkt. med kendte generaliserede tøjninger, at spændingstilstanden er entydigt fastlagt i en konstruktion, hvori tøjningstilstanden er kendt. Dette følger geometrisk af figur 3.1.2.a. Er flydebetingelsen ikke strengt konvekse fås ikke entydighed, hvis tøjningsvektoren er normal til en af flydefladens plane dele som vist på figur 3.1.2b. Her gælder dog, at bidraget til det indre plastiske arbejde,  $q_1 \cdot Q_1'$  er entydigt bestemt ud fra kendt tøjningstilstand. Dette ses geometrisk af figur 3.1.2b, idet:  $Q_1' \cdot q_1 + Q_2' \cdot q_2 = Q_1' \cdot q_1 + Q_2' \cdot q_2$ . Der gælder altså, at for kendt tøjningstilstand er det indre plastiske arbejde entydigt bestemt.



(a) Entydighedsætningen for generaliserede spændinger.  
(b)

Figur 3.1.2.

For eventuelle koncentrerede generaliserede tøjninger (diskontinuiteter) gælder konstitutive ligninger analoge til (3.1.5). Disse kan formuleres:

$$\varphi_j^C(x, y, z, Q_1) \leq 0; \quad j = 1, \dots, n\varphi^C \quad (3.1.6a)$$

$$q_1^C = \alpha_j \times \frac{\partial \varphi_j^C(x, y, z, Q_1)}{\partial Q_1} \quad i = 1, \dots, n\varphi^C \quad (3.1.6b)$$

$$\alpha_j = 0 \quad \text{for } \varphi_j^C < 0 \quad j = 1, \dots, n\varphi^C$$

$$\alpha_j \geq 0 \quad \text{for } \varphi_j^C = 0$$

De punkter i spændingsrummet, der bestemmes af udtrykkene,  
 $\varphi_j^C(x, Y, z, Q_1) = 0$ , vil alle ligge på flydefladerne bestemte ved  
 $\varphi_j(x, Y, z, Q_1) = 0, j = 1, \dots, n\varphi$ .

For disse gælder ligeledes, at det indre plastiske arbejde i diskontinuitetsområder er entydigt defineret ud fra kendte koncentrerede tøjninger.

I den følgende matematiske formulering af ekstremalprincipperne vil kun blive behandlet bæreevnebestemmelser med antagelse af proportional voksende belastning. Formuleringen af det analoge dimensionsringsproblem vil først blive behandlet i forbindelse med diskretiseringen.

3.1.1 Øvre værdimetoden.

Vi betragter en given konstruktion med en given proportionalbelastning:

$\lambda \times (g_1, t_1, P_1)$ , hvor

$g_1(x, Y, z)$  er volumenkræfter,

$t_1(x, Y, z)$  er overfladekræfter og

$P_1(x, Y, z)$  er koncentrerede kræfter.

Deformationsstilstanden er givet ved nu flytningsfunktioner:

$u_1(x, Y, z), i = 1, \dots, nu$ , med tilhørende generaliserede tøjninger:

$$q_1(x, Y, z) \quad i = 1, \dots, nq$$

$$q_1^C(x, Y, z) \quad i = 1, \dots, nq^C$$

Forudsættes  $u_1$  at beskrive et kinematisk tilladeligt flytningsfelt, d.v.s. kompatibilitetsbetingelserne og de kinematiske randbetingelser er overholdte og kun tilladte diskontinuiteter i de generaliserede tøjninger optræder, siger øvre værdisætningen:

$$\lambda^K \times A^Y \leq A^I \quad (3.1.1.1)$$

hvor  $A^Y$  er det ydre arbejde givet ved

$$A^Y = \int_V g_1^T u_1 dV + \int_S t_1^T u_1 ds + \sum P_1^T u_1 \quad (3.1.1.2)$$

$A^I$  er det totale indre plastiske arbejde givet ved (3.1.4).

Altså gælder for lastfaktoren,  $\lambda^K$ :

$$\lambda^K \leq \frac{A^I}{A^Y} \quad (3.1.1.3)$$

Undersøges således en række kinematisk tilladelige flytningsfelter og bestemmes de tilhørende lastfaktorer ved ækvivalering af det indre og det ydre arbejde, vil den mindste af disse værdier ligge nærmest kontinuumsmodellens korrekte bæreevne:  $\lambda^K$ . De generaliserede spændinger, der benyttes til bestemmelse af det indre plastiske arbejde findes ved hjælp af flydebetingelserne.

Ligningen:

$$\lambda^+ \times A^Y = A^I \quad (3.1.1.4)$$

er således en arbejdslikning, idet  $Q_1$  ikke behøver at opfylde de statiske betingelser. Opfylder  $Q_1$  tillige de statiske betingelser er (3.1.1.4) lig med det virtuelle arbejds princip, og den af ligningen bestemte værdi er eksakt lig bæreevnen,  $\lambda^K$ .

3.1.2 Nedreværdimetoden

For anvendelse af nedreværdisætningen til bestemmelse af en sand nedreværdi for lastfaktoren er det tilstrækkeligt at betragte de generaliserede spændinger.

Til den givne lastfordeling,  $(g_1, t_1, P_1)$ , bestemmes en statisk tilladelig spændingsstilstand  $Q_1(x, Y, z)$ , d.v.s. spændingsstilstanden opfylder de statiske ligevægts- og randbetingelser.

Spændingsstilstanden er proportional med den påførte belastning, d.v.s. der gælder:

$$Q_1(\lambda \times (g_1, t_1, P_1)) = \lambda^K \times Q_1(g_1, t_1, P_1) \quad (3.1.1.1)$$

Ved undersøgelse af flydebetingelserne i samtlige punkter af legemet bestemmes den globale faktor,  $\lambda$ , for hvilken spændingsstilstanden er sikker, d.v.s. der gælder overalt:

$$\varphi_j(x, Y, z, \lambda \times Q_1) \leq 0 \quad (3.1.1.2)$$

Undersøges således en række statisk tilladelige spændingstilstande,  $Q_1$ , for den givne lastfordeling ( $q_1, t_1, P_1$ ), vil den største af de til (3.1.1.2) hørende lastfaktorer være den værdi, der ligger nærmest  $\lambda^k$ .

Hvis der ud fra denne spændingstilstand kan findes et tøjningsfelt v.h.j.a. (3.1.5) og (3.1.6), og der endvidere gælder, at dette kan afledes af et kinematisk tilladeligt flytningsfelt, er den fundne værdi lig med bærevænen.

3.2 Diskretisering og optimering ved finite element.

Kun for specielle konstruktioner er det muligt ud fra en valgt konstruktionsmodel, kontinuumsmodellen, at opstille de til ekstremalprincipperne hørende ligninger, som angivet i foregående afsnit, således at disse kan løses ved analytisk behandling.

Som vi så i kapitel 2, var dette tilfældet ved plasticitetsteoretisk beregning af plane rammekonstruktioner af ideal-plastiske materialer og påvirkede af givne koncentrerede belastninger. For disse er endvidere ekstremalværdierne sammenfaldende sådan, at såvel øvre- som nedreværdimetoden giver eksakte resultater for kontinuumsmodellen.

For disse konstruktioner anvendes EDB-teknikken således kun til løsning (samt evt. til automatisk opstilling) af det til modellen hørende matematiske problem. Den numeriske behandling medfører ikke her nogen generering af en tilnærmet model.

Også for andre simple konstruktionsmodeller, så som cirkulære plader af isotrop ideal-plastisk materiale kan ekstremalprincipperne anvendes direkte til analytisk bestemmelse af eksakte løsninger.

Især for problemet at beregne en konstruktions brudlast ved antagelse af proportional voksende belastning er udviklet adskillige analytiske metoder, der for specielle konstruktioner lader beregne ekstremalværdier for selve kontinuumsmodellen. Også for dimensionseringsproblemer er udviklet mange analytiske beregningsmetoder til direkte anvendelse på kontinuumsmodellen. Det oftest anvendte optimeringskriterium for konstruktionsdesign har været dels minimum af den totale vægt, dels maximum af styrkeudnyttelse i alle konstruktionsdele (fully stressed design). Disse undersøgelser har givet vigtige oplysninger af teore-

tisk karakter angående de optimale konstruktioners egenskaber.

Metoderne har dog ringe interesse i forbindelse med udvikling af numeriske metoder til brug ved praktisk dimensionering. De ofte gjorte forudsætninger om kontinuerte variationer af konstruktionens dimensioner vil i mange tilfælde næppe føre til resultater, der er anvendelige ved praktiske dimensionseringsproblemer.

Ved muligheden for anvendelse af EDB lader det sig gøre at anvende ekstremalprincipperne på langt flere konstruktionstyper. For disse må vælges passende diskretiseringsmetoder, hvorved det for den diskrete model er muligt at opstille problemet i matematisk form. Uden dertil er det dog nødvendigt også at tilnærme ved numerisk løsning af dette matematiske problem. Herved fås ofte tilnærmelser i to trin ved beregning af kontinuumsmodellen for en konstruktion:

- a) tilnærmelse med diskrete model
- b) tilnærmelse for det matematiske problem.

Ved valg af diskretiseringsmetode må man således for begge typer tilnærmelser vurdere indflydelsen i forhold til kontinuumsmodellen.

Her vil kun blive omtalt finite element som diskretiseringsmetode. Af andre værktøjer hertil kan nævnes differensmetoderne. Disse har været benyttet af Koopmann og Lance [65.2] i forbindelse med bærevænebestemmelse af plader ved anvendelse af nedreværdimetoden. Ved dimensionering og bærevænebestemmelser af jernbetonskiver samt ved bærevænebestemmelser af stribefundamenter har Bryder [78.1] ligeledes anvendt differensmetoder i forbindelse med nedreværdiløsninger.

Disse metoder medfører, at statisk ligevægt ikke overholdes strengt. Der er dog opnået gode resultater for beregninger af skiver og stribefundamenter, hvor der i begge tilfælde er tale om plane spændingstilstande. Ved pladeberegninger har metoderne derimod vist sig ofte at føre til løsninger, hvori statisk ligevægt langt fra er opfyldt, se Hodge og Belytschko [68.2]. Desuden synes metoderne at medføre store vanskeligheder ved behandling af generelle pladeproblemer, hvorved der skal kunne behandles varierede former for belastninger, understøtningsforhold samt pladegeometri i øvrigt.

Som vi skal se i de to følgende afsnit, kan man ved passende valg af

elementtype for den valgte plasticitetsteoretiske løsningsmetode sikre sig, at resultaterne bliver sande ekstremumsværdier for kon- tinuumsmodellen.

I afsnit 3.2.1 omtales elementtyper til beregning af øvre-værdier (kompatible elementer). I afsnit 3.2.2 betragtes tilsvarende element- typer (ligevægts-elementer) for nedre-værdier. Endelig vil i afsnit 3.2.3 blive behandlet blandede elementer for samtidig anvendelse af begge ekstremalprincipper, idet der dog blot betragtes rene lineære modeller. Hermed kan nemlig formuleres de for optimeringsteknikken vigtige duale lineære programmeringsproblemer.

Den i de følgende afsnit givne generelle bestemmelse vil for visse dele være af mere formel karakter. Hovedvægten vil blive lagt på beskrivelse af selve beregningsgangen. Behandlingen forudsættes indskrænket til sådanne elementer, for hvilke de opskrevne relationer lader sig udtrykke på den givne form.

For generelle beskrivelser af de her nævnte elementtyper henvises til litteraturen som f.eks. Pian og Tong [69.5] og [72.3], Desai og Abel [72.4] samt Nielsen [76.1].

### 3.2.1 Kompatible elementer.

Vi vil her betragte fremgangsmåden ved opstilling af det til øvre- værdi-metoden hørende matematiske optimeringsproblem for en givne kon- struktion. Opstillingen deles naturligt i to grupper:

- a) diskretisering af konstruktionsmodel ved finite element
- b) opstilling af optimeringsproblem for diskrete model.

Det grundlæggende i anvendelse af øvrerærditeknikken er at betragte kinematisk tilladelige flytningsfelter. Hertil kan benyttes adskil- lige af de ved elasticitetsteoretiske beregninger anvendte kompatible elementer, idet det afgørende for disse elementer er

- 1) overholdelse af kompatibilitetsbetingelser.
- 2) overholdelse af geometriske randbetingelser.

For anvendelser i plasticitetsteoretiske beregninger er det dog ofte nødvendigt at indføre visse ekstra frihedsgrader, idet mulighed for

behandling af de iflg. den aktuelle plasticitetsteori tilladte dis- kontinuiteter i de generaliserede tøjninger ofte får væsentlig ind- flydelse for resultaternes nøjagtighed.

Konstruktionen tænkes opdelt i  $n_e$  elementer. Hvert element har  $n_w$  flytningsparametre,  $w_j^e$ ,  $j = 1, \dots, n_w$ . Flytningsstilstanden i elementet er da givet ved

$$v_i^e = w_{ij}^e w_j^e \quad (3.2.1.1)$$

$$i = 1, \dots, n_u; \quad j = 1, \dots, n_w$$

Samtlige flytningsparametre for konstruktionen samles i vektoren  $w_j$ ,  $j = 1, \dots, n_w$ .

Relationen mellem elementets parametre og de globale flytningsparame- tre gives ved relationen:

$$w_i^e = H_{ij}^e w_j \quad (3.2.1.2)$$

For overholdelse af de nødvendige kontinuitetsbetingelser (som dog ofte vil være automatisk tilfredsstillende) over elementrandene samt de kinematiske randbetingelser opstilles et lineært lignedningssystem:

$$C_{ij} w_j = w_i^0 \quad (3.2.1.3)$$

$$i = 1, \dots, n_C; \quad j = 1, \dots, n_w$$

Der forudsættes for hvert element at være entydig relation mellem de generaliserede tøjninger og de valgte flytningsparametre. For det anvendte element kan denne relation findes af den for konstruktionen gældende flytnings-tøjningsrelation. Ofte bestemmes relationen di- rekte ved geometriske betragtninger. For elementet gælder da rela- tionen

$$g_i^e = k_{ij}^e w_j^e \quad (3.2.1.4)$$

$$= k_{ij}^e H_{jk}^e w_k$$

$$i = 1, \dots, n_g; \quad j = 1, \dots, n_w; \quad k = 1, \dots, n_w$$

Tilfældigheden for forekomst af visse diskontinuiteter i de generaliserede tøjninger i konstruktions plastiske områder giver anledning til definition af et sæt koncentrerede generaliserede tøjninger (i brudflader, -linier, flydecharniers etc.). Der er naturligvis intet i vejen for at anvende elementer, for hvilke disse koncentrerede tøjninger kan optræde i det indre. Dog vil for overenskelighedenens skyld i denne beskrivelse blive forudsat, at de koncentrerede tøjninger kun optræder på randene. Dette vil være tilfældet ved mange praktiske anvendelser, idet man ud fra kendskabet til konstruktionsmodellens brudegenskaber vil anvende en elementinddeling, der giver mulighed for at beskrive de sandsynlige brudnåder på denne facon.

De koncentrerede generaliserede tøjninger bliver da af "global" karakter og opskrives ved

$$q_1^{CR} = \theta_{1j}^T W_j \quad (3.2.1.5)$$

$$i = 1, \dots, nqc; \quad j = 1, \dots, NW$$

Det må her bemærkes, at man for mange konstruktionstyper vil indskærpe sig til alene at behandle koncentrerede plastiske tøjninger. I disse tilfælde benyttes "stive" elementer, således at deformations-tilstanden beskrives ud fra elementernes indbyrdes bevægelser.

Ud fra de generaliserede tøjninger findes de generaliserede spændinger i et element eller på elementrande, hvori der optræder plastiske deformationer v.h.j.a. de konstitutive ligninger, nemlig (3.1.5) og (3.1.6). Idet vi kun er interesserede i spændingstilstanden i punkter, hvori der optræder plastiske deformationer, kan dette formelt udtrykkes ved hjælp af "inverse" flydefunktioner,  $\phi_j^e$  og  $\phi_j^{CR}$ :

$$Q_1^E(x, y, z) = \beta_j^E \phi_j^E(q_1^E(x, y, z))$$

$$Q_1^{CR}(x, y, z) = \beta_j^T \phi_j^{CR}(q_1^C(x, y, z)) \quad (3.2.1.6)$$

$$\beta_j^E, \beta_j^T \geq 1 \quad \text{for } \phi_j^E, \phi_j^{CR} = 0$$

$$\beta_j^E, \beta_j^T = 0 \quad \text{for } \phi_j^E, \phi_j^{CR} < 0$$

Herved kan det totale indre plastiske arbejde udtrykkes som summen af en del tilhørende dele med fordelte plastiske tøjninger og en del tilhørende dele med koncentrerede plastiske deformationer. I de følgende udtryk udledes angivelsen af de indgående størrelses afhængighed af (x, y, z). Udtrykkene for det indre plastiske arbejde bliver da:

$$A_I^I = \int_{V^e} Q_1^E e^E dv = \int_{V^e} \beta_j^E \phi_j^E(q_1^E) q_1^E dv$$

$$= \int_{V^e} \beta_j^E \phi_j^E(\omega_{1l}^E H_{1l}^E W_K^E) \omega_{1l}^E H_{1l}^E W_K^E dv$$

$$= A_I^I(W_1^I), \quad i = 1, \dots, NW$$

Her udføres integrationerne over samtlige ne elementer,  $V^e$ .

$$A_C^I = \sum_{R^I} \int_{R^I} Q_1^{CR} dr$$

$$= \sum_{R^I} \int_{R^I} \beta_j^T \phi_j^{CR}(\theta_{1l}^T W_1^I) \theta_{1l}^T W_1^I dr$$

$$= A_C^I(W_1^I), \quad i = 1, \dots, NW$$

For  $A_C^I$  udføres integrationerne over samtlige nr elementrande,  $R^I$ . Herved fås det totale indre plastiske arbejde

$$A^I = A_I^I + A_C^I = A^I(W_1^I), \quad i = 1, \dots, NW \quad (3.2.1.7)$$

på tilsvarende måde findes det ydre arbejde for den givne belastning eller lastfordeling ved proportionalbelastning, ( $g_1, t_1, P_1$ ). Udtrykket findes ved summation over alle elementer og kan formelt opskrives som:

$$A^Y = \sum_{V^e} \int_{V^e} g_1 u_1^e dv + \int_{S^e} t_1 u_1^e ds + \sum P_1 u_1$$

$$= \sum_{V^e} \int_{V^e} g_1 \omega_{1j}^e H_{jk}^e W_K^e dv + \int_{S^e} t_1 \omega_{1j}^e H_{jk}^e W_K^e ds$$

$$+ \sum P_1^I W_1^I = A^Y(W_1^I), \quad i = 1, \dots, NW \quad (3.2.1.8)$$



Ønskes nu lastfaktoren bestemt under antagelse af proportionalbelastning, er der ved den her indførte diskretiseringsmetode formuleret et tilhørende optimeringsproblem:

$$\text{minimer } \lambda^+ = \frac{A^I(W^I_1)}{A^Y(W^Y_1)} \quad (3.2.1.9)$$

med hensyn til  $C_{1j}W_j = W^O_1$

$$i = 1, \dots, NC; \quad j = 1, \dots, NW$$

Samtlige optimeringsvariable udgøres således af de globale flytningsparametre. Idet de NC ligninger forudsættes lineært uafhængige kan reduceres til NW - NC frie parametre, idet der (evt. efter ombytning af variabelnummering) kan opstilles:

$$C_{1j}W_j = W^O_1 - C_{1k}W_k \quad (3.2.1.10)$$

$$i = 1, \dots, NC; \quad j = 1, \dots, NC; \quad k = NC+1, \dots, NW$$

Ved indsættelse af (3.2.1.10) i (3.2.1.9) fås

$$\lambda = \frac{A^I(W^I_k)}{A^Y(W^Y_k)}; \quad k = NC + 1, \dots, NW \quad (3.2.1.11)$$

Herved er problemet opstillet som et optimeringsproblem uden restriktioner, hvilket er karakteristisk for øvrevarldimetodens anvendelse ved bæreevneberegninger. Da de plastiske deformationer er bestemte på nær en fælles faktor må til endelig løsning af (3.2.1.11) påføres et bånd på de frie parametre. Af (3.2.1.8) ses, at det ydre arbejde kan udtrykkes på lineær form i de valgte flytningsparametre. D.v.s.

$$A^Y = a^Y_{1i}W_i, \quad i = 1, \dots, NW \quad (3.2.1.12)$$

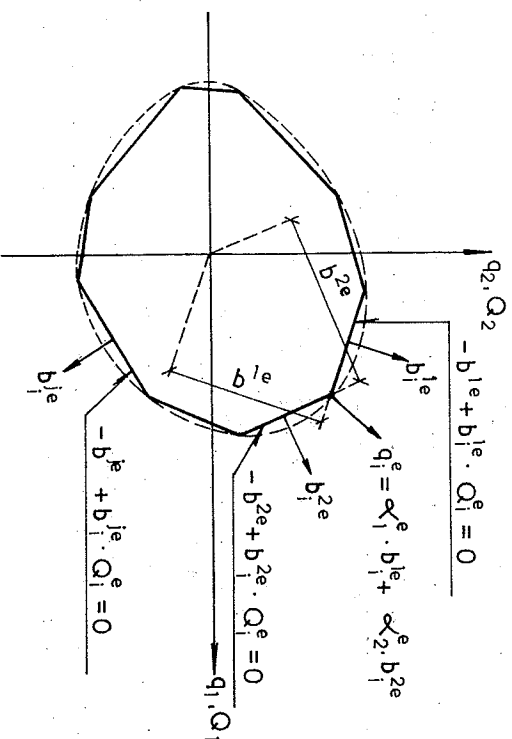
Vi kan da uden at ændre indholdet af (3.2.1.11) opstille betingelsen:  $A^Y = a^Y_{1i}W_i = 1$  således at  $\lambda^+ = \min(A^I(W^I_k))$ ,  $k = NC+1, \dots, NW$ .

Herefter resterer så at bestemme minimum af  $\lambda$ . Den anvendte optimeringsteknik må afhænge af formeludtrykket, (3.2.1.7), for det indre plastiske arbejde.

Skønt øvrevarldimetoden har været den mest anvendte ekstremalmetode for bæreevnebestemmelser ved "håndregning", er dens anvendelse i forbindelse med automatiske numeriske beregninger af generelle konstruktioner sparsomme. Problemet ligger her i, at det selv for materialer med simple (eller simplificerede) flydebetingelser er vanskeligt at opstille relationerne (3.2.1.6) på generel form til automatisk beregning. En diskussion af de hertil forbundne problemer er givet af Chan [68.5] samt Hodge og Belytschko [68.2].

Bæreevnebestemmelsen kan ved anvendelse af lineære flydebetingelser (der evt. fås ved tilnærmelse af de korrekte flydebtingelser) gives følgende generelle form. Hvert element forudsættes homogent. D.v.s. flydebetingelserne kan for hvert element udtrykkes på formen:

$$\phi_j^e = -b_j^e + b_{1j}^e Q_1^e \leq 0 \quad j = 1, \dots, n\phi; \quad i = 1, \dots, nq \quad (3.2.1.13)$$



Lineariserede flydebetingelser for element e.   
 Figur 3.2.1.1.

Disse er illustrerede på figur 3.2.1.1.  $b_1^{je}$  er normal til den  $j$ 'te flydeflade for elementet og rettet bort fra det tilladelige spændingsområde.

En generel beskrivelse af lineariseringsteknik for flydebetingelser er givet af Maier [74.2].

Konstruktionens kinematisk tilladelige flytningsfelt er givet ved vektoren  $W_i$ ,  $i = 1, \dots, NW$ . Heraf fås de generaliserede tøjnings-  
ger i elementet ved (3.2.1.4). I det følgende forudsættes disse tøjninger at være konstante for elementet. Udvidelse til at tillade variationer inden for hvert element er umiddelbar. Tøjningsvektoren,  $q_j^e$  udtrykkes ved linearkombination af de udadrettede normaler,  $b_1^{je}$ , ved

$$q_1^e = k_{ij}^e H_{jk}^e W_k = \alpha_j^e b_1^j e, \text{ hvor}$$

$$\alpha_j^e = 0 \text{ for } -b_1^{je} + b_1^j e Q_1^e < 0 \quad (3.2.1.14)$$

$$\alpha_j^e \geq 0 \text{ for } -b_1^{je} + b_1^j e Q_1^e = 0$$

Herefter kan det indre plastiske arbejde for de fordelte tøjninger bestemmes ud fra de af (3.2.1.14) beregnede størrelser,  $\alpha_j^e$ , idet der benyttes, at  $\alpha_j^e$  kun er større end nul, hvis  $b_1^j e Q_1^e = b_1^{je}$ .

$$A_f^I = \sum_1^{ne} \int_{V^e} q_1^e Q_1^e dv = \sum_1^{ne} \int_{V^e} \alpha_j^e b_1^j e Q_1^e dv \quad (3.2.1.15)$$

$$= \sum_1^{ne} \int_{V^e} \alpha_j^e b_1^j e dv = \sum_1^{ne} \alpha_j^e b_1^j e V^e$$

Helt analogt udtrykkes det indre plastiske arbejde hørende til generaliserede koncentrerede tøjninger. For igen at gøre fremstillingen simpel forudsættes, at de koncentrerede tøjninger kun optræder langs elementrandene og desuden, at de er konstante langs hver enkelt rand.

$$\varphi_j^r = -b_j^{jr} + b_1^j r Q_1^r \leq 0$$

$$j = 1, \dots, n\varphi; \quad i = 1, \dots, n\varphi$$

(3.2.1.16)

$$q_1^{Cr} = \theta_{ij}^r W_j = \alpha_j^r b_1^j r, \text{ hvor}$$

$$\alpha_j^r = 0 \text{ for } -b_j^{jr} + b_1^j r Q_1^r < 0$$

$$\alpha_j^r \geq 0 \text{ for } -b_j^{jr} + b_1^j r Q_1^r = 0$$

$$A_c^I = \sum_1^{nR} \int_R q_1^{Cr} Q_1^r dr = \sum_1^{nR} \int_R \alpha_j^r b_1^j r Q_1^r dr$$

$$= \sum_1^{nR} \int_R \alpha_j^r b_1^j r dr = \sum_1^{nR} \alpha_j^r b_1^j r R^r \quad (3.2.1.18)$$

Herved er formuleret optimeringsproblemet:

Find  $W_k$  således at

$$\lambda = A^I = \sum_1^{ne} \alpha_j^e b_1^j e \times V^e + \sum_1^{nR} \alpha_j^r b_1^j r \times R^r$$

bliver minimum, og der gælder:

$$\alpha_j^e b_1^j e = k_{ij}^e H_{jk}^e W_k$$

$$\alpha_1^r b_1^r = \theta_{ik}^r W_k \quad (3.2.1.19)$$

$$a_k^r W_k = 1$$

$$j = 1, \dots, n\varphi; \quad l = 1, \dots, n\varphi$$

$$e = 1, \dots, ne; \quad r = 1, \dots, nr$$

$$i = 1, \dots, n\varphi; \quad k = 1, \dots, nW$$

Ved elimination af  $\alpha_j^e$  og  $\alpha_1^r$  fås igen et lineært programmeringsproblem uden restriktioner, hvor flytningsparametrene  $W_k$  er eneste optimeringsvariable.

Endnu sjældnere end i forbindelse med barevnebestemmelse ses øvre-værdimetoden anvendt ved automatisk dimensionering v.h.j.a. matematisk optimering. Anvendelsen her indskrænker sig hovedsageligt til plane rammekonstruktioner som nævnt i kapitel 2.

En ligefrem metode skal beskrives i det følgende. Flydebetingelserne forudsættes at være lineære. I øvrigt gøres de samme forudsætninger som ved bæreevnebestemmelsen.

Lad os forudsætte, at samtlige mulige brudmåder for konstruktionen kan beskrives som linearkombinationer af ialt NB lineært uafhængige brudmåder.

De uafhængige brudmåder beskrives ved NB vektorer med kendte komponenter:

$$w^m = (w_1^m, w_2^m, \dots, w_{NW}^m) \quad (3.2.1.20)$$

$m = 1, \dots, NB$

For hver brudmåde beregnes det ydre arbejde ved (3.2.1.12):

$$A_m^Y = a_1^Y w_1^m \quad (3.2.1.21)$$

Endvidere beregnes det til hver uafhængig brudmåde hørende indre plastiske arbejde. Udtrykket herfor bliver som for bæreevnebestemmelsen, idet dog  $\alpha$ -værdierne nu bliver konstanter, der beregnes af (3.2.1.14) og (3.2.1.17):

$$A_m^I = \sum_{j=1}^{NE} \alpha_j^e m_{D_j}^e \times v^e + \sum_{l=1}^{NR} \alpha_l^r r_{D_l}^r \times R^r \quad (3.2.1.22)$$

Her vil det konstante led i flydebetingelserne for det enkelte element evt. afhænge af de søgte design-variable. Lad samtlige design-variable for konstruktionen være indeholdt i  $D_i$ ,  $i = 1, \dots, ND$ . De til elementet hørende design-variable fås af:

$$d_i^e = E_{ij}^e D_j \quad (3.2.1.23)$$

$i = 1, \dots, nd; \quad j = 1, \dots, ND$

Det forudsættes nu, at brudmodstanden i et element,  $b_j^e$  i (3.2.1.13), er lineært afhængig af elementets design-variable. Herved kan flydebetingelserne generelt udtrykkes ved de valgte design-variable på formen

$$\varphi_j^e = -b_0^j e - b_1^j e d_1^e + b_k^j e \varphi_k \quad (3.2.1.24)$$

$i = 1, \dots, nd; \quad k = 1, \dots, nq$

hvorved udtrykket for det indre plastiske arbejde bliver:

$$A_m^I = \sum_{j=1}^{ne} \alpha_j^e m_{D_j}^e (b_0^j e + b_1^j e E_{1k}^e D_k) \times v^e + \sum_{l=1}^{nr} \alpha_l^r r_{D_l}^r (b_0^l e + b_1^l e E_{1k}^e D_k) \times R^r = a_k^I m_{D_k}^I + a_0^I \quad (3.2.1.25)$$

$j = 1, \dots, nq; \quad 1 = 1, \dots, nqc;$   
 $i = 1, \dots, nd; \quad k = 1, \dots, ND$

Samtlige mulige brudmåder, ialt NBT, findes ved linearkombinationer af de uafhængige brudmåder:

$$w^l = \delta_1^m w^m \quad (3.2.1.26)$$

$l = 1, \dots, NBT; \quad m = 1, \dots, NB$

Her er komponenterne i de NBT vektorer  $\delta_1^m = (\delta_1^1, \dots, \delta_1^{NB})$  kendte.

De tilhørende udtryk for det indre og det ydre arbejde bliver:

$$A_l^I = \delta_1^m A_m^I = a_j^I D_j + a_0^I \quad (3.2.1.27)$$

$$A_l^Y = \delta_1^m A_m^Y \quad (3.2.1.28)$$

Idet den funktion, der ønskes optimeret forudsættes at kunne udtrykkes som et lineært udtryk i de valgte design-parametre,  $D_j$ , for konstruktionen fås følgende lineære programmeringsproblem, idet der for enhver mulig brudmåde udtrykkes, at det indre arbejde skal være større end eller lig det ydre arbejde:

Find  $D$  således at

$$z = c_j^D D_j \text{ bliver minimum} \quad (3.2.1.29)$$

og der gælder:  $a_j^I D_j + a_0^I \geq A_l^Y$   
 $j = 1, \dots, ND, \quad l = 1, \dots, NBT$

Ovenstående fremstilling er en generalisering af mekanismemetoden for plane rammekonstruktioner. Metoden er direkte anvendelig for disse konstruktioner, se eksempel i afsnit 2.2. Metoden bygger på en almindeliggørelse af Foulkes [54.1] teorem for rammekonstruktioner, der siger, at et entydigt minimum kan bestemmes i henhold til den matematiske model, såfremt alle mulige brudmåder kan ideentificeres.

For mere komplekse konstruktioner er metoden næppe generel anvendelig. Problemet ligger i den automatiske generering af samtlige mulige brudmåder. Sammenlignet med anvendelse af brudlinjeteoriene ved "håndregning" vil anvendelse af ovenstående metode dog for de fleste konstruktioners vedkommende give bedre løsninger. Løsningerne vil dog også her i visse tilfælde være stærkt afhængige af de valgte (tilnærmede) brudmåder.

En mere generel metode til anvendelse af øvrerærditeknikken kan fås ved at benytte blandede elementer. Metoden er dog kun anvendelig for specielle design-problemer, men herom nærmere i afsnit 3.2.3.

### 3.2.2 Ligevægts-elementer.

Til brug ved diskretiseringen for anvendelse af nedrærdimetoden kan umiddelbart benyttes flere af de ved elastiske beregninger anvendte ligevægts-elementer, idet betingelserne for elementet her er, at der ved parametriske fremstilling af spændingstilstanden skal sikres et sikkert statistisk tilladeligt spændingsfelt. D.v.s. der kræves overholdelse af

- a) statistiske ligevægts- og randbetingelser
- b) flydebetingelserne i ethvert pkt.

For at opnå en løsning, der ligger tilstrækkelig nær den til kontinuummodellen hørende eksakte løsning, er det vigtigt, at parameterfremstillingen kan repræsentere de i henhold til den benyttede plasticitetsteori mulige spændingstilstande så godt som muligt. Hertil kræves bl.a., at de iflg. teorien evt. tilladte spændingsdiskontinuiteter er repræsenterede i den diskrete model. Ofte er det bekvemt at operere med spændingsfelter, der er kontinuerte i elementets indre, således at spændingsdiskontinuiteter kun betragtes i forbindelse med opstilling af de nødvendige ligevægtsligninger

for elementernes samvirkning. For her at give en simpel fremstilling vil dette sidste blive forudsat i det følgende.

Konstruktionen opdeles i  $n_e$  ligevægts-elementer. Spændingstilstanden i elementet er givet ved  $n_f$  spændingsparametre:  $f_{ij}^e$ ,  $i = 1, \dots, n_f$ . I elementets indre er spændingstilstanden givet ved i alt  $n_s$  spændingsfunktioner:

$$s_{ij}^e(x, y, z) = \sum_{j=1}^{n_f} (x, y, z) f_{ij}^e \quad \left. \begin{matrix} i = 1, \dots, n_s; \\ j = 1, \dots, n_f \end{matrix} \right\} (3.2.2.1)$$

For fordelte ydre belastninger vil i (3.2.2.1) endvidere indgå led, der er afhængige af den ydre belastning. Dette medtages dog ikke her for overskuelighedens skyld.

For hele konstruktionen er spændingstilstanden givet ved  $NF$  parametre,  $F_i$ ,  $i = 1, \dots, NF$ .

Her fås relationen mellem element-parametre og globale parametre ved:

$$f_{ij}^e = G_{j1}^e F_1 \quad \left. \begin{matrix} i = 1, \dots, n_f; \\ j = 1, \dots, NF \end{matrix} \right\} (3.2.2.2)$$

For ethvert sæt globale spændingsparametre,  $F_i$ , forudsættes de statistiske ligevægtsligninger automatisk opfyldte i elementets indre gennem (3.2.2.2) og (3.2.2.1). Udvidelse til også at måtte medtage indre ligevægtsligninger er umiddelbar. Global ligevægt samt overholdelse af de statistiske randbetingelser opfyldes ved opstilling af et sæt lineære ligninger:

$$K_{ij} F_j = F_i^Y \quad \left. \begin{matrix} i = 1, \dots, NS; \\ j = 1, \dots, NF \end{matrix} \right\} (3.2.2.3)$$

Her repræsenterer vektoren,  $F_i^Y$ , den ydre belastning (den givne lastfordeling ved bæreevnebestemmelse), d.v.s. såvel volumen-, overflade- som koncentrerede kræfter.

Hvis de statistiske ligevægtsligninger er lineært uafhængige, fås  $NF-NS$  frie parametre, der benyttes som optimeringsvariable. For at den optimale spændingsfordeling skal kunne findes, må naturligvis gælde, at

NF > NS. Spørgsmålet er, hvorledes forholdet mellem NF og NS bør være for et kontinuums tilhørende diskrete model. Et kriterium herfor kan udledes af variationsprincipperne anvendt i forbindelse med diskretisering med blandede elementer, se Anderheggen og Knøpfel [72.5]. Kriteriet bliver i denne forbindelse, at ved grænsovergang til uendelig fin elementinddeling bør:

$$\frac{NF}{NS} \rightarrow \frac{N_k}{m_k} \quad (3.2.2.4)$$

hvor  $N_k$  er antallet af generaliserede spændinger i kontinuumsmodellen, og  $m_k$  er antallet af differenttalligninger, disse spændinger skal opfylde. Specielt fås

$$\left. \begin{aligned} \text{for 3-dimensionalt kontinuum: } \frac{NF}{NS} &+ \frac{6}{3} = 2 \\ \text{for tynde plader} &: \frac{NF}{NS} + \frac{3}{1} = 3 \\ \text{for skiver} &: \frac{NF}{NS} + \frac{3}{2} = 1,5 \end{aligned} \right\} (3.2.2.5)$$

I forbindelse med nedrevaridemetoden, hvor kun spændingsfelterne har betydning i beregningerne, kan (3.2.2.4) benyttes som vurderingsgrundlag for det benyttede elements parameterfremstilling.

De generaliserede spændinger i et element fremgår af spændingsparametrene ved relationen

$$\left. \begin{aligned} Q_1^e &= \gamma_{1j}^e f_j^e \\ &= \gamma_{1j}^e \sigma_{jk}^e F_k \\ i &= 1, \dots, nq; \quad j = 1, \dots, nf; \quad k = 1, \dots, NF. \end{aligned} \right\} (3.2.2.6)$$

Flydebetingelserne sikres overholdt ved opstilling af udtrykkene (3.1.5) i nøje diskrete punkter, hvor spændingstilstanden er givet ved  $Q_n^e$ :

$$\left. \begin{aligned} \psi_j^e(Q_n^e) &\leq 0 \\ j &= 1, \dots, nq; \quad n = 1, \dots, nq \end{aligned} \right\} (3.2.2.7)$$

Flydefunktionerne,  $\psi_j^e$ , forudsættes at være ens for alle punkter tilhørende samme element. D.v.s. materialegenskaberne og dimensionerne antages at være konstante for hvert enkelt element.

Afhængigt af flydebetingelserne og det anvendte element vil flydebetingelserne være opfyldte overalt i konstruktionen, hvis (3.2.2.7) sikres tilfredsstillet i en række diskrete punkter. F.eks. vil det ved konstant spændingsfelt i det indre af elementet være tilstrækkeligt at opstille i et pkt. for hvert element. Er spændingsfeltene lineære, er det tilstrækkeligt at opstille i hjørnerne af elementerne, da flydefladerne forudsættes konvekse.

I andre tilfælde er en i praksis anvendelig metode at opstille flydebetingelserne i de sandsynligvis mest kritiske punkter og derefter checke i et finere net og om nødvendigt nedproportionere den fundne løsning. Det kan dog være vanskeligt for mange konstruktioners vedkommende på forhånd at udpege de kritiske punkter.

Dette er en af de væsentlige egenskaber, der må tages i betragtning ved valg af elementtype i forbindelse med løsning af et aktuelt problem. Hertil kommer selvfølgelig det alt dominerende kriterium, nemlig at det resulterende optimeringsproblem, som opstilles i det følgende, skal kunne løses sikkert og effektivt.

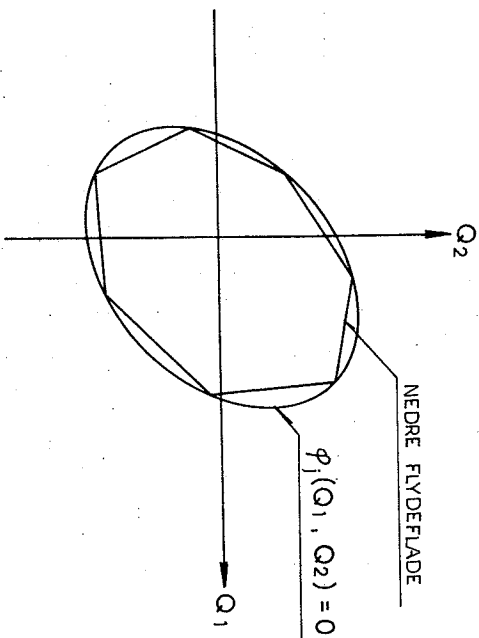
Ved bæreevnebestemmelse fås herved ved benyttelse af (3.2.2.2), (3.2.2.3), (3.2.2.6) og (3.2.2.7) følgende optimeringsproblem:

$$\left. \begin{aligned} \text{Find } F_j &\text{ således at} \\ \lambda &\text{ bliver minimum, og der gælder:} \\ K_{1j} F_j - \lambda \times F_j^Y &= 0 \\ \varphi_m^1(F_j) &\leq 0 \\ i &= 1, \dots, NS; \quad j = 1, \dots, NF \\ l &= 1, \dots, ne \times nq \\ m &= 1, \dots, nq \end{aligned} \right\} (3.2.2.8)$$

Samtlige optimeringsvariable er her de statiske parametre og lastfaktoren.

Problemet (3.2.2.8) er lineært med undtagelse af de evt. ulineære restriktioner stammende fra flydebetingelserne.

Lineariseres flydebetingelserne, som geometrisk anskueliggjort på figur 3.2.2.1, ved tilnærmelse med indskrevne hyperplaner (linier i det todimensionale tilfælde), fås en nedre flydeflade ved hvis benyttelse resultaterne stadig vil være sande nedreverdier. Flydebetingelserne udtrykkes som i (3.2.1.13).



Lineariserede flydebetingelser, nedre flydeflade  
Figur 3.2.2.1

Problemet (3.2.2.8) bliver da et rent lineært programmeringsproblem, der ved anvendelse af (3.2.2.6) kan formuleres på formen:

Find  $F_j$ , således at

$\lambda$  bliver maksimum, og der gælder:

$$\left. \begin{aligned} K_{1j} F_j - \lambda \times \bar{P}_1^Y &= 0 \\ \lambda \times R_{1j} F_j - R_1^O &\leq 0 \\ i = 1, \dots, NS; \quad j = 1, \dots, NF \\ l = 1, \dots, n\phi &= n\phi \times n\phi \times n\phi \end{aligned} \right\} (3.2.2.9)$$

Et dimensioneringsproblem kan ved anvendelse af nedreverdimetoden gives en analog formulering.

Lad os som i forrige afsnit antage, at samtlige dimensioneringsvariabler (design-parametre) kan opstilles i vektoren  $\tilde{D} = (D_1, D_2, \dots, D_{ND})^T$ , og at de til et element hørende design-parametre kan udtrykkes som ved (3.2.1.23), d.v.s.

$$\left. \begin{aligned} d_i^e &= E_{ij}^e D_j \\ i = 1, \dots, nd; \quad j = 1, \dots, ND \end{aligned} \right\} (3.2.2.10)$$

Flydefunktionsudtrykkene i et pkt. af elementet e vil da afhænge af disse parametre, idet (3.2.2.7) bliver

$$\left. \begin{aligned} \phi_j^e(Q_i^e, d_k^e) &\leq 0 \\ j = 1, \dots, n\phi; \quad i = 1, \dots, nq; \quad k = 1, \dots, nd \end{aligned} \right\} (3.2.2.11)$$

Ved valg af elementtype må her endvidere tages hensyn til, at den egenskab, der ønskes optimeret, kan udtrykkes på rimelig form ved de valgte design-parametre. Lad os tænke os, at vi ønsker at minimere et vist materialeforbrug under hensyntagen til et given layout som angivet ved (3.2.2.10), og at dette forbrug kan beskrives ved design-parametrene,  $D_i$ . Hertil opstilles da det matematiske optimeringsproblem:

Find  $\tilde{D}, \tilde{F}$ , således at

$z = z(\tilde{D})$  bliver minimum, og der gælder

$$\left. \begin{aligned} K_{ij} F_j - \bar{P}_i^Y &= 0 \\ \phi_k^l(F_j, D_m) &\leq 0 \\ h_n(D_m) &\leq 0 \\ i = 1, \dots, NS; \quad j = 1, \dots, NF; \quad k = 1, \dots, n\phi \\ l = 1, \dots, ne \times n\phi; \quad m = 1, \dots, ND; \quad n = 1, \dots, NDO \end{aligned} \right\} (3.2.2.12)$$

De sidste NDO restriktioner angiver her visse eventuelle på forhånd valgte krav til dimensionerne så som givne variationsgrænser, indbyrdes størrelsesforhold etc. Samtlige optimeringsvariable er her spændingsparametrene,  $F$ , og de valgte design-parametre,  $D$ .

Vi gør nu følgende antagelser:

- 1) de valgte dimensionskrav er lineære, d.v.s. de kan udtrykkes ved:

$$h_n^O - h_{ni} D_i \leq 0 \quad (3.2.2.13)$$

$$n = 1, \dots, \text{NDO}; \quad i = 1, \dots, \text{ND}$$

- 2) Objektfunktionen kan udtrykkes på lineær form i  $D_i$ :

$$z(D) = c_1 D_1 \quad (3.2.2.14)$$

- 3) Flydebetingelserne er lineære og kan formuleres ved design-parametrene som gjort i (3.2.1.24).

Gøres disse antagelser kan ved (3.2.2.12) formuleres et rent lineært programmeringsproblem:

Find  $D$  og  $F$ , således at

$$z = c_1 D_1 \text{ bliver minimum, og der gælder:}$$

$$K_{jk} F_k - F_j^Y = 0$$

$$R_{1k} F_k + R_{1i} D_i - R_1^O \leq 0$$

$$h_n^O - h_{ni} D_i \leq 0$$

$$i = 1, \dots, \text{ND}; \quad j = 1, \dots, \text{NS}; \quad k = 1, \dots, \text{NF}$$

$$l = 1, \dots, \text{NØ}; \quad n = 1, \dots, \text{NDO}$$

(3.2.2.15)

Hvis restriktionerne i (3.2.2.15) begrænser et område af mulige løsninger i det (NF + ND)-dimensionale rum, vil det globale minimum med sikkerhed findes.

### 3.2.3 Blandede elementer.

Ved anvendelse af blandede elementer (mixed elements) beskrives både flytnings- og spændingsfelterne ved uafhængige parametre på former som givet ved henholdsvis (3.2.1.1) og (3.2.2.1). Man må herved som regel opgive kravene til enten

- a) overholdelse af kompatibilitet eller
- b) overholdelse af statisk ligevægt

eventuelt opgives kravene til begge felttyper.

Blandede elementer kan benyttes i forbindelse med nedreverdimetoden (øvreverdimetoden), idet der blot anvendes de tilhørende spændingsfelter (flytningsfelter). Er de statiske ligevægtsbetingelser overholdte, kan disse elementer naturligvis benyttes på lige fod med de rene ligevægtselementer og analogt for kompatible elementer i tilfælde af, at kompatibiliteten for flytningsfelterne er overholdt.

Elementer for hvilke statisk ligevægt (kompatibilitet) kun tilnærmelsesvist er sikret kan ligeledes benyttes ved nedreverdimetoden (øvreverdimetoden), men herved opnås ikke sande ekstremalløsninger. Ved bæreevnebestemmelse kan derfor med det samme blandede element opstilles matematiske optimeringsproblemer, som givet ved (3.2.1.9) og (3.2.2.8). Forudsættes flydebetingelserne lineære som udtrykt ved (3.2.1.13) fås herved rene lineære programmeringsproblemer som (3.2.1.19) og (3.2.2.9).

Anderheggen og Knöpfel [72.5] har givet en generel fremgangsmåde ved beregning af bæreevnen for 3-dimensionale legemer af stift ideal-plastiske materialer. Ved samtidig benyttelse af både spændings- og flytningsfelterne ved bestemmelse af de statiske ligevægtsligninger (kompatibilitetsbetingelserne), idet disse formuleredes v.h.j.a. det virtuelle arbejdsprincip, blev herved opstillet lineære programmeringsproblemer i forbindelse med nedreverdimetoden (øvreverdimetoden). De to lineære programmeringsproblemer viser sig at være hinandens duale problemer, der vides at give samme optimale værdi for objektfunktionen.

Ved anvendelse af blandede elementer, hvor statisk ligevægt er sikret kan herved såvel ved nedre- som ved øvreverdimetoden bestemmes sande

nedreværdier. Er kompatibiliteten sikret og gøres visse forudsætninger angående spændingsfeltet, se [72.5], kan ved anvendelse af begge ekstremalprincipperne bestemmes sande øvreverdier for den lineariserede model. Også Munro og Fonseca [78.2] har benyttet blandede elementer ved bæreevnebestemmelser af ortotrope jernbetonplader efter øvreverdimetoden.

Det skal her bemærkes, at entydigheden af ekstremalprincippernes løsning intet har at gøre med plasticitetsteoriens entydighedssætning. Entydigheden har her kun relation til den benyttede diskretisering, det anvendte element, og de tilnærmelser, der er gjort angående kompatibilitet og/eller statistisk ligevægt. Kun i tilfælde, hvor der kan genereres såvel statistisk tilladelige spændingsfelter som kinematisk tilladelige flytningsfelter samtidigt, som ved plane rammekonstruktioner, har entydigheden her relevans til plasticitetsteoriens entydighedssætning.

Også ved dimensioneringsproblemer er blandede elementer blevet anvendt. Fremgangsmåden har dog her altid været at formulere et til nedverdimetoden hørende lineært programmeringsproblem. Ved at betragte det tilhørende duale problem og give de hertil hørende variable en mekanisk fortolkning, er man kommet frem til formuleringer af det matematiske optimeringsproblem, der hører til øvreverdimetoden.

Maier, Zavelani-Rossi og Benedetti [72.6] har benyttet metoden ved dimensionering af konstruktioner med plane spændingstilstande. Antages de plastiske egenskaber at være konstante for hvert element og proportionale med samme variabel, d.v.s.  $b^{\text{je}}$  i (3.2.1.13) er for alle flydefunktioner lineært afhængig af denne variabel, og antages desuden, at objektfunktionen hørende til nedverdimetoden kan udtrykkes som linearkombinationer i disse variable alene vistes, at den funktion, der skal optimeres i forbindelse med øvreverdimetoden er forskellen mellem det ydre arbejde og det indre plastiske arbejde.

Davies [72.7] har benyttet metoden ved dimensionering af rammekonstruktioner og har herved givet en mekanisk fortolkning af optimeringsproblemet hørende til øvreverdimetoden. Udgangspunktet her var igen det lineære programmeringsproblem formuleret ud fra nedreværditeknikken.

### 3.3 Diskussion af Løsningsmetode.

Som det fremgår af afsnit 3.2.2, er nedreværdimetoden velegnet til automatisk beregning af sande nedreværdiløsninger.

Dette gælder for såvel bæreevnebestemmelser- som for designproblemet. Disse giver anledning til helt analoge optimeringsproblemer.

Resultater synes at vise, at den valgte diskretiseringsmetode ikke vil være alfaafgørende for konvergens mod den eksakte løsning hørende til kontinuumsmodellen. Ved fornuftig valg af type ligevægts-elementer synes konvergens altid at være sikret i praksis.

For selve opstillingen af et optimeringsproblem er der principielt intet besværligt i at anvende de mest korrekte objektfunktioner og restriktioner (Flydebetingelser), da opstillingen af disse er ligetil. Formuleringen af det matematiske optimeringsproblem vil da blot være afhængigt af, om det med sikkerhed kan løses.

Ved bæreevnebestemmelser er øvreverdimetoden ligeledes generel anvendelig. Resultaterne synes dog at være ret afhængige af tilnærmelserne ved elementinddelingen i de tilfælde (der ofte forekommer i praksis), hvor tilladte diskontinuiteter i de kinematiske størrelser er af væsentlig betydning i den tilgrundsliggende plasticitetsteori.

For designproblemet synes øvreverdimetoden kun at være generel anvendelig ved behandling af rammekonstruktioner bestående af stift idealplastisk materiale, for hvilke såvel øvre- som nedreværdimetoden giver eksakte resultater. Ved bæreevnebestemmelser kan man få et vist udbytte af at anvende blandede elementer. De til de lineære modeller hørende entydighedssætninger i form af nedre- og øvreverdimetodernes dualitet kan være medvirkende til yderligere information af teoretisk art. Ved at anvende såvel kompatible elementer som ligevægts-elementer ved beregning af en aktuel konstruktion kan man med samme EDB-program på elegant vis skaffe sig oplysninger om et interval, hvori den eksakte bæreevne må ligge. Af dualiteten i ekstremalprincippernes lineære optimeringsproblemer fremgår, at fremskaffelsen af disse sande ekstremumsværdier kan klæres ved anvendelse af nedreværdimetoden alene. Ligeledes kan sluttes, at der for designproblemet ikke kan fremskaffes bedre løsninger ved anvendelse af øvreverdimetoden, end når problemets formulering baseres på nedreværditeknikken.



Fordelen ved formuleringen af øvre værdiproblemet kan ligge i, at antallet af restriktioner her er væsentligt mindre end antallet hørende til nedreværdiproblemet. Denne fordel kan dog lige såvel opnås ved rent numerisk at transformere nedreværdiproblemet til dets duale problem og derefter løse dette.

På grund af nedreværdimetodens simple og ligefremme anvendelighed forbundet med dens tilsyneladende fordele angående konvergens og generalitet vil denne metode blive lagt til grund ved behandlingen af denne afhandlings dimensionseringsproblem: automatisk design af jernbetonplader.

#### 4. DIMENSIONERING AF JERNBETONPLADER VED HJÆLP AF NEDREVÆRDI-METODEN

Beregningen af jernbetonplader efter nedreværdimetoden vil her blive formuleret som et matematisk optimeringsproblem. Der behandles begge de analoge problemer: bæreevnebestemmelse med antagelse af proportional belastning samt dimensionering, hvor det totale armeringsforbrug søges minimeret under hensyntagen til i forvejen stillede krav til armeringsarrangementet.

De flydebetingelser, der forudsættes gældende, lineariseres, hvorved såvel bæreevnebestemmelsen som dimensioneringsopgaven formuleres som et lineært programmeringsproblem. Dette blev i det generelle tilfælde givet ved (3.2.2.9) og (3.2.2.15).

Der angives forskellige elementtyper, der synes egnede ved denne lineære formulering. Specielt vil elementernes statiske forhold blive beskrevet.

Den numeriske løsning af det opstillede lineære programmeringsproblem behandles generelt i kapitel 5 for alle benyttede elementtyper. Heri medtages også behandling af rent projekteringsmæssige forhold så som krav til minimumsarmering, armering givne i visse områder etc. Den numeriske behandling omfatter samtidig bæreevneproblemet og designproblemet.

Forskellige løsninger bestemte ved de af forfatteren og andre benyttede metoder præsenteres i kapitel 6. Resultater ved anvendelser af nedreværdimetoden, henholdsvis øvre værdimetoden vil blive sammenlignet. Endelig drages sammenligninger med eksakte løsninger i tilfælde, hvor disse kendes.

Indledningsvis skal gives en kort omtale af de fordele der må forventes af metoden ved sammenligning med såvel tidligere som endnu i praksis anvendte metoder.

#### 4.1 Dimensioneringsmetoder for jernbetonplader

I afsnit 2.3 blev omtalt nogle for jernbetonkonstruktioner generelle forhold, der taler for anvendelse af plasticitetsteoriens nedreværdimode ved beregning af disse konstruktioner.

For beregningen af jernbetonplader påpeges at brudberegninger ud fra den elastiske snitkraftfordeling endog ofte benyttes inkonsekvent ved disse konstruktioner. Dels undlades ofte en konsekvent dimensionering efter den elastiske fordeling, idet man "afskærer" momentspidserne og herved indfører en usikkerhed angående snitkraftoptagelsen. På denne måde forlader man sig ofte på en udkommenteret mulighed for snitkraftomlejring i brudstadiet. For det andet vil den virkelige snitkraftfordeling i jernbetonplader, hvori tværnittene er revnede, ofte ligge fjernet fra den elastiske fordeling selv i brugstilstanden.

Benyttelse af jernbetonkonstruktioners plastiske egenskaber findes dog også i anvendte dimensioneringsmetoder. De første anvendelser går helt tilbage til århundredskiftet, hvor de væsentligste fremskridt blev gjort af Ingerslev [21.1]. Udviklingen af disse metoder fortsattes af Johansen [43.1] i dennes formulering af brudlinieteoriene. Side-løbende med Johannsens arbejde formulerede russeren Gvozdev [36.1] en almindelig plasticitetsteori til anvendelse ved pladeberegninger. Brasstrup [70.1] har vist, at hvis de korrekte konstitutive ligninger anvendes i forbindelse med brudlinieteorien for plader vil metodens grundlag være i overensstemmelse med den matematiske plasticitetsteori og således være en øvrerærdimode.

Brudlinieteorien er simpel i sin form og giver ved almindelig "håndregning" brugbare resultater for homogent armerede plader. Metoden kommer dog til kort i de tilfælde, hvor en mere økonomisk løsning kan opnås ved at variere armeringen over pladen, da de forskellige pladedeles armeringsstyrrelser ikke kan bestemmes af metoden. Denne giver nemlig kun oplysning om den nødvendige armering i selve de antagne brudlinier. Der gives således f.eks. ikke noget svar på den nødvendige udstrækning af oversiderarmering ved søjleunderstøttede pladedæk eller ved indspændte pladerande.

At brudlinieteorien i det hele taget har været brugt og stadig benyttes med sikre konstruktioner som resultat skyldes for en del, at den bærevnereserve, der ligger i membranvirkningen, normalt tryknormal-

kræfter (kuppel-effekt) i første fase gående over i træknormal-kræfter ved større nedbøjninger, ikke er taget til gunst ved bestemmelsen af øvrerærdien.

Forskellige forsøg er blevet gjort på at nå frem til sikre beregningsmetoder. Til grund for disse har ligget den matematiske plasticitetsteoris nedreværdimode.

For at kunne anvende matematisk plasticitetsteori for jernbetonplader med forskellige orthogonale armeringsformer kræves kendskab til et sæt flydebetingelser for orthotrope plader. Forskellige arbejder i 60'erne for formulering af et sådant sæt flydebetingelser, hvilket vil blive nærmere omtalt i afsnit 4.4, har nu muligjort anvendelse af nedreværdimetoden ved beregning af jernbetonplader. Som vi skal se kan flydebetingelserne for orthotrope plader under visse omstændigheder også bringes til anvendelse for plader med skævinklede armeringsretninger (anisotrope plader).

Af tidlige arbejder med anvendelse af nedreværditeknikken kan nævnes Hillerborgs strimmelmetode [56.2] og [74.3]. Wolfensberger [64.4] har anvendt en beslægtet metode til formulering af en optimeringsmetode, der dog ikke var automatiseret.

Praktiske anvendelser af disse metoder har været sparsomme, da de har været formulerede til brug ved almindelig "håndregning". Opstilling af de egnede ligevægtsligninger bliver nemlig ofte kompliceret for i praksis forekommende dimensioneringsopgaver.

Nedreværdimetoden kommer virkeligt til sin ret, når den anvendes i forbindelse med EDB, d.v.s. når opstillingen af mulige ligevægtsligninger automatiseres.

Det er denne kombination, der benyttes her til udvikling af en rationel og sikker metode til automatisk dimensionering af jernbetonplader.

I de senere år er endvidere udviklet en lang række optimeringsmetoder, såvel analytiske som numeriske, der dog må siges endnu ikke at have fundet anvendelse i praksis. Vedrørende disse se kapitel 7.

#### 4.2 Begrænsninger og Forudsætninger

I det teoretiske grundlag for de her givne numeriske metoder forudsættes:

- (I) Pladens deformationer undervejs til brudtilstanden er så små, at den statiske virkemåde kan beskrives i den udeformerede tilstand.
- (II) Pladetykkelsen er lille i forhold til de øvrige pladedimensioner.
- (III) En normal til pladen forbliver ret og er normal til den deformede plade.
- (IV) Effekten af membran- og forskydningsnitkræfter kan negligeres.

Disse forudsætninger er de samme som i den Kirckoff'ske pladeteori, anvendt ved elasticitetsteoretiske beregninger [59.4].

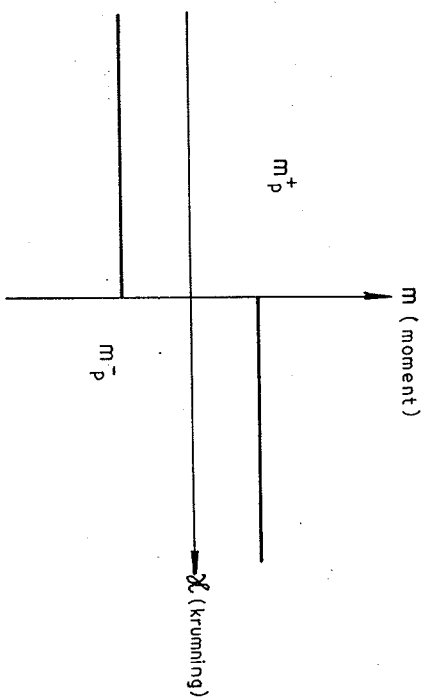
Ovenstående forudsætninger angående pladedeformationerne gør det muligt rent beregningsmæssigt at anvende den stift ideal-plastiske model for konstruktionens materialer.

Altså forudsættes:

- (V) Materialerne, armering og beton, regnes at kunne beskrives ved den stift ideal-plastiske materiale-model. D.v.s. moment-krumningsrelationen er som vist på figur 4.2.1.

Herudover indskrænker de numeriske metoder sig til at kunne behandle plader, for hvilke:

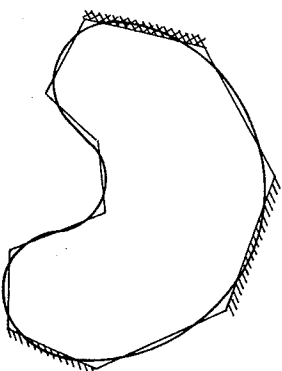
- (VI) Pladetykkelsen er givet overalt.
- (VII) Pladerandene kan tilnærmes med stykvis rette linier (polygonale pladeformer), der enten er frie, simpelt understøttede eller fast indspændte, se figur 4.2.2.



Moment-krumnings relation.

Figur 4.2.1

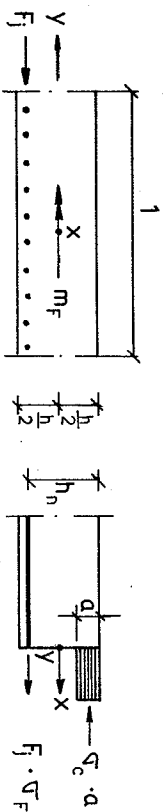
- (VIII) Armeringsretningerne er givne for såvel orthogonal-armering som for skævinklet armering.
- (IX) Armeringsstængernes placering i lodret retning er givne.
- (X) Armeringsarrangementet er givet, d.v.s. pladen kan inddeles i felter, hvori armeringen er homogen.
- (XI) Armeringsstængerne er rette og kan kun optage axiale kræfter.
- (XII) De plastiske momenter ved ren bøjning kan regnes proportionale med de tilhørende jernarealer.
- (XIII) Belastningen er vinkelret på pladens midterplan.



Tilnærmet polygonalt pladefelt.

Figur 4.2.2

Den tilnærmelse, der gøres ved forudsætning (XII), er illustreret på figur 4.2.3. Her betragtes en pladedel med undersidearmring givet ved jernarealet  $F_j$ , jernflydespændingen  $\sigma_F$ , nyttehøjden  $h_n$  og betontrykspændingen  $\sigma_c$ .



Antagelse for plastiske bøjningsmoment.

Figur 4.2.3

Ved ren bøjning om y-aksen fås flydemomentet:

$$m_F = (1 - \frac{1}{2}\varphi) \times \varphi \times h_n^2 \sigma_c \quad (4.2.1)$$

hvor

$$\varphi = \frac{\sigma}{h_n} = \frac{F_j \sigma_F}{h_n \sigma_c} \quad (4.2.2)$$

For de i praksis almindeligt forekommende armeringsgrader er en god tilnærmelse til (4.2.1):

$$m_F = c_1 \times \varphi \quad (4.2.3)$$

eller ved benyttelse af (4.2.2):

$$m_F = c \times F_j \quad (4.2.4)$$

hvor  $c = c(\sigma_F, \sigma_c, h_n)$ .

Eventuel trykarmring tages ikke i regning, hvilket er på den sikre side. For plader med normal armering er bidraget fra trykarmring ubetydeligt.

#### 4.3 Pladeoriens statiske og geometriske forhold

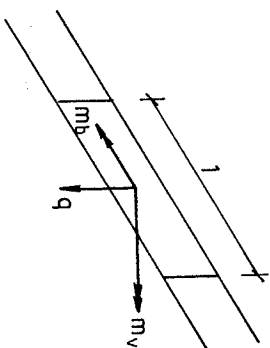
I dette afsnit opstilles de statiske ligevægts- og randbetingelser, der skal opfyldes for opnåelse af sande nedreverdier. Med henblik på anvendelse af finite element diskretisering opdèles betingelserne i

- (I) Indre ligevægtsligninger (differentialligninger)
- (II) Kontinuitetsbetingelser i skillelinier (linjeunderstøtninger, fiktive skillelinier)
- (III) Randbetingelser.

Kontinuitets- og randbetingelserne formuleres ud fra det virtuelle arbejdes princip. Hertil indføres de tilhørende kinematiske størrelser. Disse indgår naturligvis ikke i selve formuleringen af de numeriske metoder, der bygger på nedreverdimetoden, men betragtes nærmere i forbindelse med omtale af øvreverdimetoder i kapitel 7.

##### 4.3.1 Indre ligevægtsligninger

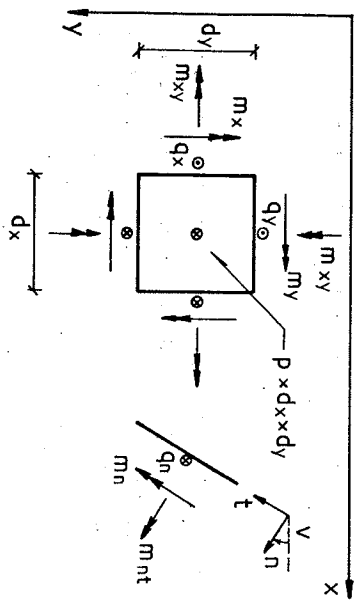
I det følgende vil snitkræfterne være definerede som kraftresultanter virkende på snit med længden 1. De indre kræfter, der virker på et snit er vist på figur 4.3.1.1, hvoraf fortegnene for bøjningsmomentet,  $m_b$ , vridningsmomentet,  $m_v$ , og forskydningskraften,  $q$ , fremgår.



Snitkræfter i vilkårligt pladesnit.

Figur 4.3.1.1

Pladens midterplan indlægges i et retvinklet koordinatsystem som vist på figur 4.3.1.2, hvor z-aksen er positiv nedad. På figuren er endvidere fortegnsgedefinitionen vist for snitkræfterne virkende på x- eller y-snit samt snit, hvis normal danner vinklen  $v$  med x-aksen. Der benyttes, at  $m_{yx} = -m_{xy}$ .



Snitkræfter i retvinklet koordinatsystem.  
Figur 4.3.1.2

Der gælder følgende differentiaalligninger for snitkræfterne i et punkt:

$$\frac{\partial m_x}{\partial x} - \frac{\partial m_{xy}}{\partial y} = q_x \quad (4.3.1.1a)$$

$$\frac{\partial m_y}{\partial y} - \frac{\partial m_{xy}}{\partial x} = q_y \quad (4.3.1.1b)$$

$$\frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y} = -p \quad (4.3.1.1c)$$

Af disse ligninger udledes pladens differentiaalligning:

$$\frac{\partial^2 m_x}{\partial x^2} - 2 \cdot \frac{\partial^2 m_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 m_y}{\partial y^2} = -p \quad (4.3.1.2)$$

Ovenstående ligninger skal gælde overalt i feltet, hvori  $m_x$ ,  $m_{xy}$  og  $m_y$  er kontinuerte og to gange differentiable. Snitkræfterne for snittet, hvis normal danner vinklen  $v$  (positiv med uret) med x-aksen er:

$$m_n = m_x \cos^2 v - 2m_{xy} \cos v \sin v + m_y \sin^2 v \quad (4.3.1.3a)$$

$$m_{nt} = m_x \cos v \sin v + m_{xy} (\cos^2 v - \sin^2 v) - m_y \cos v \sin v \quad (4.3.1.3b)$$

$$q_n = q_x \cos v + q_y \sin v \quad (4.3.1.3c)$$

Til senere brug skal her gives de transformationsformler, der gælder for momenterne beregnede i forskellige retvinklede koordinatsystemer. Betejner  $\bar{m} = (m_x, m_{xy}, m_y)^T$  momenterne beregnet i et x-y-koordinatsystem og  $\bar{m} = (m_x', m_{xy}', m_y')^T$  momenterne definerede i et x'-y'-system, der fremkommer ved drejning med vinklen  $v$  af x-y-systemet, se figur 4.3.1.3, fås:

$$\bar{m} = \bar{T} \times \bar{m} \quad (4.3.1.4)$$

og

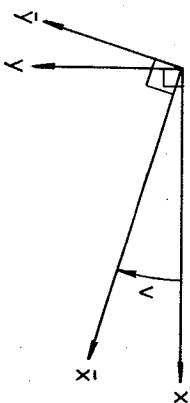
$$\bar{m} = \bar{T}^{-1} \times \bar{m} \quad (4.3.1.5)$$

hvor

$$\bar{T} = \begin{bmatrix} \cos^2 v & -2\cos v \sin v & \sin^2 v \\ \cos v \sin v & \cos^2 v - \sin^2 v & -\cos v \sin v \\ \sin^2 v & 2\cos v \sin v & \cos^2 v \end{bmatrix} \quad (4.3.1.6)$$

og

$$\bar{T}^{-1} = \begin{bmatrix} \cos^2 v & 2\cos v \sin v & \sin^2 v \\ -\cos v \sin v & \cos^2 v - \sin^2 v & \cos v \sin v \\ \sin^2 v & -2\cos v \sin v & \cos^2 v \end{bmatrix} \quad (4.3.1.7)$$



Koordinatsystemsbetegnelser.

Figur 4.3.1.3

4.3.2 Geometriske størrelser

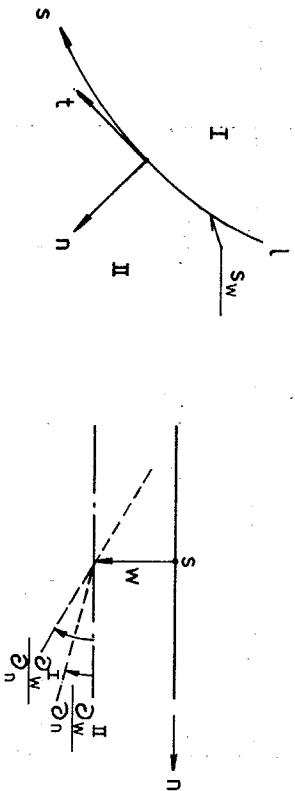
Pladens deformationer udtrykkes ved nedbøjningsfunktionen:  $w(x,y)$ . Af denne findes krumningerne:

$$K_x = - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad (4.3.2.1a)$$

$$K_y = - \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \quad (4.3.2.1b)$$

$$K_{xy} = - \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \quad (4.3.2.1c)$$

Funktionen,  $w(x,y)$ , kræves at være kontinuert over hele pladeområdet. Der tillades diskontinuiteter i den 1. afledede langs såkaldte kinematiske diskontinuitetslinier som f.eks.  $S_w$  vist på figur 4.3.2.1.



Kinematiske diskontinuiteter.  
Figur 4.3.2.1

Diskontinuitetsmålet langs denne linie angives ved

$$\theta_n(s) = \left(\frac{\partial w}{\partial n}\right)_I - \left(\frac{\partial w}{\partial n}\right)_{II} \quad (4.3.2.2)$$

Diskontinuitetslinierne inddeler pladen i felter, hvori  $w(x,y)$  kræves mindst tre gange differentiablel med kontinuerte partielle tredieordens afledede, idet kompatibilitetsbetingelserne i disse felter er:

$$\frac{\partial^2 K_x}{\partial y^2} = - \frac{\partial^2 K_{xy}}{\partial x \partial y} \quad \text{og} \quad \frac{\partial^2 K_y}{\partial x^2} = - \frac{\partial^2 K_{xy}}{\partial y^2} \quad (4.3.2.3)$$

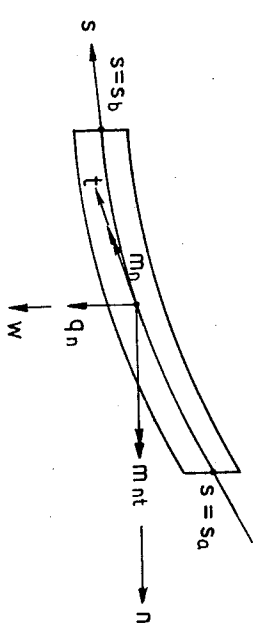
4.3.3 Virtuelt arbejdes princip, statiske betingelser

Det virtuelle arbejde, der udføres af randpåvirkningerne:  $m_n$ ,  $m_{nt}$  og  $q_n$ , langs et givet snit som vist på figur 4.3.3.1 bliver, idet vi først forudsætter kontinuitet i kræfterne langs snittet og at  $w$  har kontinuerte partielle afledede af første orden:

$$A_{ab}^Y = \int_{s_a}^{s_b} (-m_n \frac{\partial w}{\partial n} + m_{nt} \frac{\partial w}{\partial s} + q_n \times w) ds \quad (4.3.3.1)$$

Ved partiel integration fås:

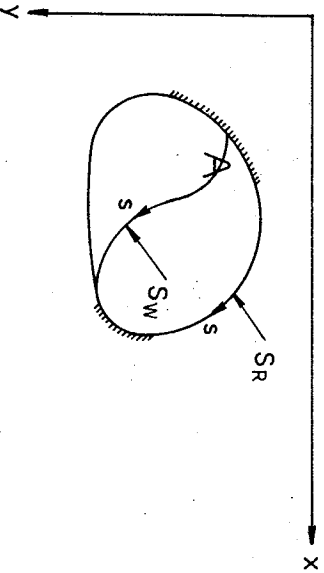
$$A_{ab}^Y = [m_{nt} \times w]_{s_a}^{s_b} + \int_{s_a}^{s_b} (-m_n \frac{\partial w}{\partial n} + (q_n - \frac{\partial m_{nt}}{\partial s}) \times w) ds \quad (4.3.3.2)$$



Snitkræftbetegnelse i lokalt n-t-koordinatsystem.  
Figur 4.3.3.1

Betragtes en plade, hvis midterplan udgør området A, hvis indre og ydre randkurver betegnes  $S_R$  og for hvilken diskontinuiteter i nedbøjningsfunktionen første afledede optræder langs indre kurver betegnet  $S_w$ , se figur 4.3.3.2, lyder det virtuelle arbejdes princip:

$$\int_A p \times w \, dA + \sum_{S_R} \left[ -m_n \frac{\partial w}{\partial n} + (q_n - \frac{\partial m_{nt}}{\partial s}) \times w \right] ds = \int_A (k_x m_x + 2k_{xy} m_{xy} + k_y m_y) \, dA + \sum_{S_w} m_n \theta_n \, ds \quad (4.3.3.3)$$



Pladefelt med kinematisk diskontinuitetslinje.

Figur 4.3.3.2

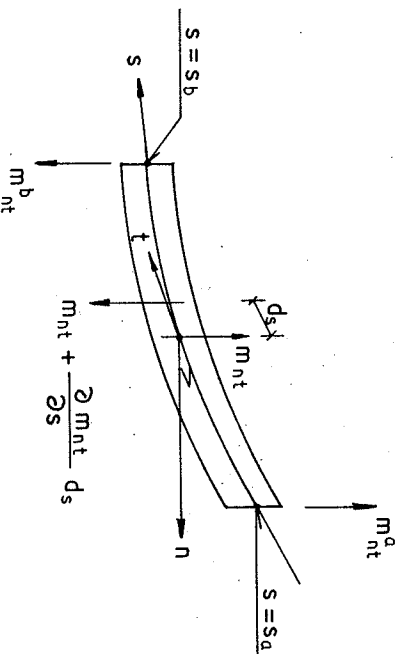
Heraf udledes randbetingelserne for en ydre rand. I det følgende betegnes givne ydre påvirkninger med en bølgestreg over symbolet.

$$\left. \begin{aligned} q_n - \frac{\partial m_{nt}}{\partial s} &= \tilde{q}_n - \frac{\partial \tilde{m}_{nt}}{\partial s} \\ m_n &= \tilde{m}_n \end{aligned} \right\} \quad (4.3.3.4)$$

Ved en ydre rand kan således ikke foreskrives overensstemmelser for såvel forskydningskraften,  $q_n$ , som vridningsmomentet,  $m_{nt}$ . For disse kan kun kræves overensstemmelse for de Kirchoff'ske forskydningskræfter:

$$q_n^* = q_n - \frac{\partial m_{nt}}{\partial s} \quad (4.3.3.5)$$

hvor  $q_n$  og  $m_{nt}$  beregnes af (4.3.1.3). Dette kan gives en statisk fortolkning som vist på figur 4.3.3.3, hvoraf ses, at den statiske ækvivalens af  $m_{nt}$  langs kurven ab er forskydningskræfterne,  $-\frac{\partial m_{nt}}{\partial s}$ , og de koncentrerede kræfter,  $m_{nt}^a$  og  $m_{nt}^b$  i overensstemmelse med (4.3.3.2).



Kirchoff'ske forskydningskræfter.

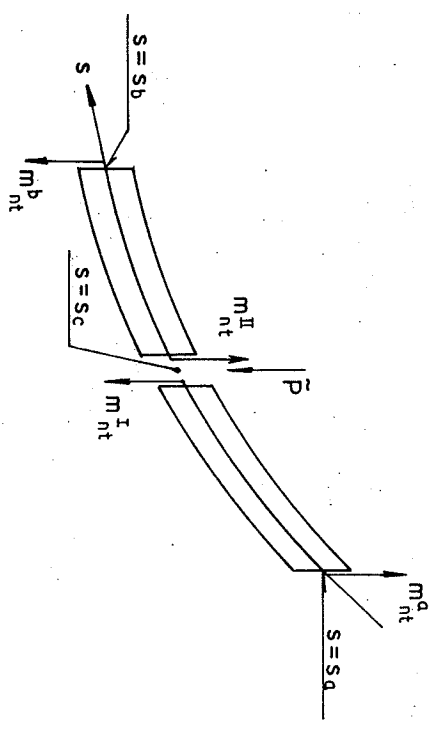
Figur 4.3.3.3

D.v.s., at den benyttede pladeteori ikke muliggør streng overholdelse af loven om aktion og reaktion langs ydre rande med givne påvirkninger. Ved benyttelse af Saint Venant's princip kræves kun overensstemmelse i de integrerede snitkræfter ( $\sim$  overensstemmelse i de Kirchoff'ske forskydningskræfter i hvert pkt.).

Ved udledning af (4.3.3.2) antoges, at  $m_{nt}$  var kontinuert langs kurven ab. Dette er ikke nødvendigt i henhold til det virtuelle arbejdes princip.

Betragtes igen, se figur 4.3.3.4, kurvelementet ab, hvori den lodrette kraft,  $\tilde{p}$ , angriber i punktet c, fås:

$$A_{ab}^Y = [m_{nt}^I \times w]_{s_a}^{s_c} + [m_{nt}^{II} \times w]_{s_c}^{s_b} + \tilde{P} \times w(s=s_c) + \int_{s_R} [-m_{nt} \frac{\partial w}{\partial n} + (q_n - \frac{\partial m_{nt}}{\partial s}) \times w] ds \quad (4.3.3.6)$$



Diskontinuitet i vridende moment.

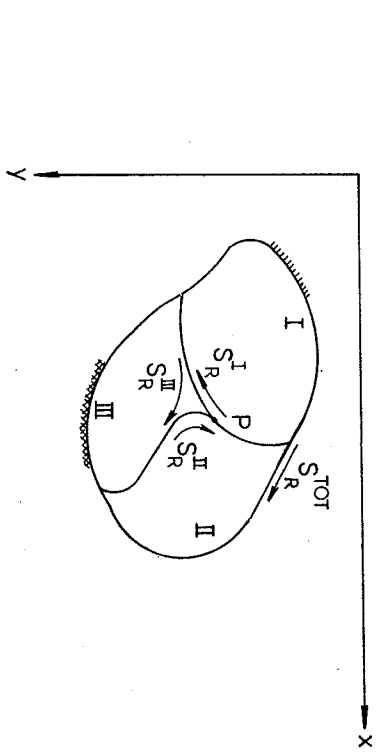
Figur 4.3.3.4

Heraf ses, at diskontinuiteten i  $m_{nt}$  intet bidrag giver til det virtuelle arbejdes princip, (4.3.3.3), såfremt vi kræver:

$$(m_{nt}^I - m_{nt}^{II})_{s=s_c} = \tilde{P} \quad (4.3.3.7)$$

Denne diskontinuitetsbetingelse er således i statisk henseende korrekt. Ved benyttelse af det virtuelle arbejdes princip og de ovenfor opstillede randbetingelser indses hvilke diskontinuiteter, der er tilladte for de statiske størrelser i det indre af pladen. Principet for udløselse heraf skal gives kort.

Pladen opdeles ved tænkte skillelinier, se figur 4.3.3.5. Hver af de herved dannede pladedele betragtes som selvstændige med snitkræfterne langs skillelinierne anvendte som ydre randpåvirkninger. Det virtuelle arbejdes princip for hele pladen fås ved summation af det virtuelle arbejdes princip opstillet for hver enkelt pladedel. Heraf ses, at hvis de nedenfor givne kontinuetsbetingelser for skillelinierne er opfyldte, vil bidragene fra skillelinierne (diskontinuitetslinierne) forsvinde. Omvendt ses heraf, at de derved fundne kontinuetsbetingelser sikrer et statisk tilladeligt momentfelt, hvis de øvrige indre ligevægtsligninger og randbetingelser er opfyldte.



Pladedelt med statiske diskontinuitetslinier.

Figur 4.3.3.5

Der er således her overensstemmelse med den almene sætning i matematisk plasticitetsteori: "Spændingsdiskontinuiteter giver ikke anledning til definition af nye generaliserede tøjninger".

Ved benyttelse af (4.3.3.3) ses at spændingsfeltet, momentfeltet, kan beskrives ved de generaliserede spændinger:  $Q_1 = (m_x, m_{xy}, m_y)^T$ . Tilsvarende kan tøjningsfeltet beskrives ved de fordelte generaliserede tøjninger:  $q_1 = (k_x, 2 \times k_{xy}, k_y)$ , samt de koncentrerede generaliserede tøjninger:  $\theta_n$ .

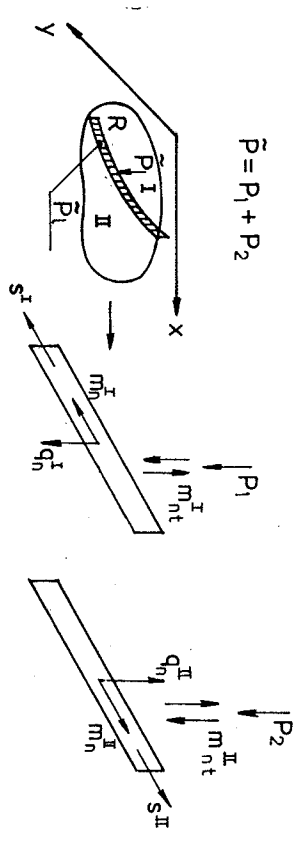
Nødvendige statiske kontinuetsbetingelser langs en skillelinje bliver, se figur 4.3.3.6:

$$(q_n - \frac{\partial m_{nt}}{\partial s})^I - (q_n - \frac{\partial m_{nt}}{\partial s})^{II} = \tilde{P}_\perp \quad (4.3.3.8)$$

$$m_n^I = m_n^{II} \quad (4.3.3.9)$$

$$\sum m_{nt} = \tilde{P} \quad (4.3.3.10)$$



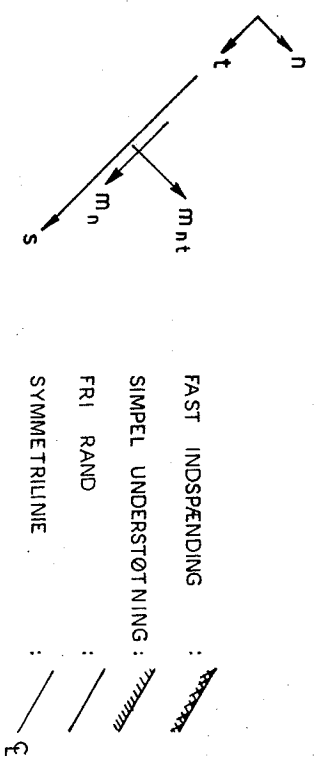


Optagelse af linielaste og enkeltkræfter.

Figur 4.3.3.6

Her er  $\tilde{p}_\lambda$  en given linielast langs skillelinjen og  $\tilde{p}$  er en given koncentreret kraft i et pkt. (evt. hvor flere skillelinier mødes). Udvikelse til også at medtage ydre momentbelastninger i (4.3.3.9) er indlysende.

Sluttelig skal de statiske randbetingelser rekapituleres for de gængse understøtningsformer, for hvilke de i det følgende anvendte signaturer er vist på figur 4.3.3.7.



Signaturer for ydre rand.

Figur 4.3.3.7

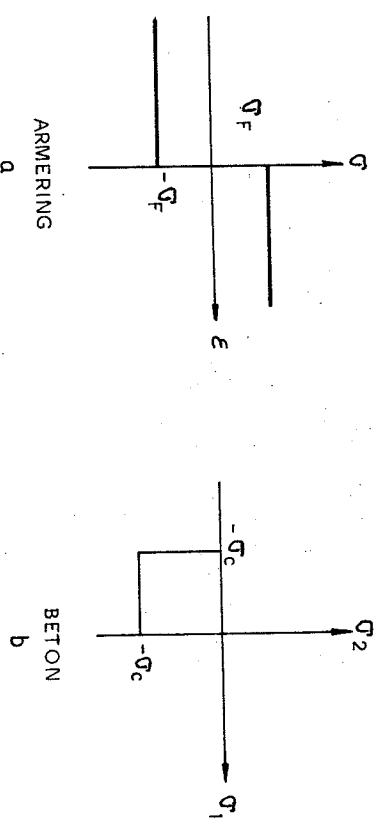
Randbetingelser:

- xxxxxxxxxxxx Ingen
- //////////  $m_n = \tilde{m}_n$
- $m_n = \tilde{m}_n$  ;  $\frac{\partial m}{\partial n} - 2 \frac{\partial m_{nt}}{\partial s} = \tilde{p}_\lambda$  ;  $\sum m_{nt} = \tilde{p}$
- $m_{nt} = 0$  ;  $\frac{\partial m}{\partial n} = \frac{1}{2} \tilde{p}_\lambda$

Ovenstående brede beskrivelse af de statiske forhold er givet, da den er af grundlæggende betydning for vurdering af mulige ligevægts-elementer, som betragtes i afsnit 4.5.

4.4 Flydebetingelser for jernbetonplader

Armeringen antages at have en arbejdskurve som vist på figur 4.4.1a, hvor  $\sigma_F$  angiver jernets flydespænding. Flydebetingelsen for betonen forudsættes at være som vist på figur 4.4.1b, hvor  $\sigma_1$  og  $\sigma_2$  er hovedspændingerne og  $\sigma_c$  er betonens trykstyrke.



Flydebetingelser for armering og beton.

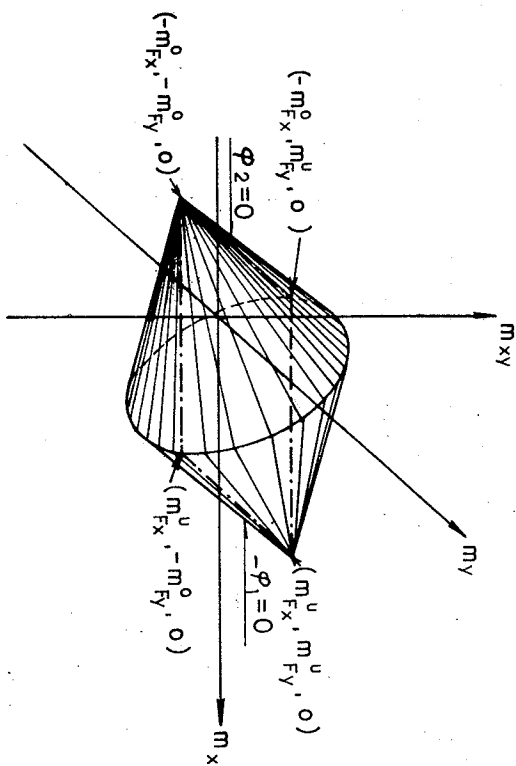
Figur 4.4.1

For orthotrope jernbetonplader med de ovenfor viste materialmodeller og med armeringsretningerne parallelle med x- og y-akserne har Nielsen [64.5] udledt følgende sæt flydebetingelser:

$$\left. \begin{aligned} \varphi_1 &= -(m_{Fx}^u - m_x) (m_{Fy}^u - m_y) + m_{xy}^2 \leq 0 \\ \varphi_2 &= -(m_{Fx}^o + m_x) (m_{Fy}^o + m_y) + m_{xy}^2 \leq 0 \end{aligned} \right\} \quad (4.4.1)$$

Her er  $m_{Fx}$  og  $m_{Fy}$  de plastiske momenter for ren bøjning i snit vinkelrette på x- henholdsvis y-aksen; u refererer til undersider-armering (positivt flydemoment) og o refererer til oversiderarmering (negativt flydemoment). For alle plastiske momenter indsættes de numeriske værdier i (4.4.1).

De tilhørende flydeflader bliver to skærende kegler som vist på figur 4.4.2.



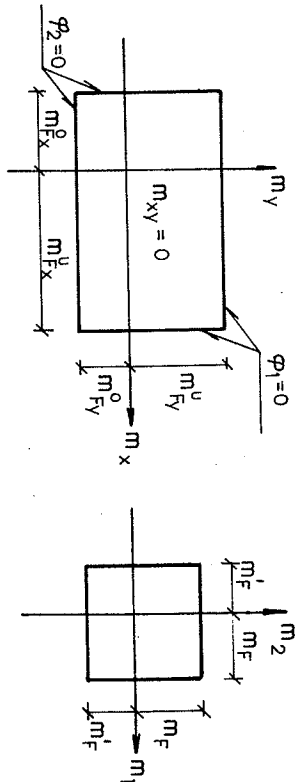
Flydeflade for orthotrop jernbetonplade.

Figur 4.4.2

På figur 4.4.3 er skæringskurven mellem de to kegler og  $(m_x, m_y)$ -planen vist sammen med den af Johansen [43.1] foreslåede kvadratiske flydebetingelse for isotrope jernbetonplader. Heraf ses, at den af

Johansen intuitivt anvendte flydebetingelse udgør et specialtilfælde af (4.4.1).

Flydebetingelserne, (4.4.1), blev udledt af Nielsen [64.5] på grundlag af brudegenskaberne for de indgående materialer. Betingelserne kan også på elegant måde udledes ved at opdele pladen i fiktive skiver og anvende flydebetingelserne for orthotrope jernbetonskiver, se Nielsen [69.2].



ORTOTROP PLADE

ISOTROP PLADE

Figur 4.4.3

Der er dog gjort visse tilnærmelser for at nå frem til flydebetingelserne givet ved (4.4.1), se Nielsen [64.5]. Disse er således ikke i streng overensstemmelse med de anvendte materialmodeller. Det vigtige er dog, at benyttelse heraf har vist at give gode resultater underbyggede med eksperimenter for plader, hvor eksakte løsninger i henhold til flydebetingelserne, (4.4.1), kendes.

Ved at gå ud fra antagelser om snitkræfterne i en flydelinie svarende til Johansens [43.1] foreslåede bøjningsmoment-kriterium er Massonet og Save [63.1] samt Wolfensberger [64.4] nået frem til det samme sæt flydebetingelser.

Betragtes et punkt af en flydelinie med et lokelt n-t-koordinatsystem og betegnes de numeriske værdier af det positive plastiske moment henholdsvis negative plastiske moment med  $m_{np}^u$  henholdsvis  $m_{np}^o$  siger bøjningsmoment-kriteriet:

$$\begin{aligned} -m_{np}^o \leq m_n \leq m_{np}^u \\ (4.4.2) \end{aligned}$$

hvor

$$\left. \begin{aligned} m_{hP}^u &= m_{F_x}^u \cos^2 v + m_{F_y}^u \sin^2 v \\ m_{hP}^o &= m_{F_x}^o \cos^2 v + m_{F_y}^o \sin^2 v \end{aligned} \right\} \quad (4.4.3)$$

Ved betragtning af de plastiske bøjningsmomenters variation med snitretningen i forhold til det retvinklede x-y-koordinatsystem samt formlerne for de bøjende og vridende snitkraftmomenter givet ved (4.3.1.3) kan vises, at for orthogonal armering repræsenteres flydebetingelsen (4.4.2) ved en øvre flydeflade, der er i overensstemmelse med (4.4.1). Omvendt kan vises, se Nielsen [64.5], at hvis en flydelinie betragtes som grænsetilfælde for en smal strimmel med uendelig store krumninger (d.v.s. den ene hovedkrumning er nul) giver flydebetingelserne (4.4.1) samme resultat for det bøjende moment ( $m_{hP}^u$  for  $\phi_1 = 0$  og  $m_{hP}^o$  for  $\phi_2 = 0$ ) som (4.4.3).

Det vridende moment bliver:

$$\left. \begin{aligned} \phi_1 = 0 : m_{hTP}^u &= (m_{F_x}^u - m_{F_y}^u) \cos v \sin v \\ \phi_2 = 0 : m_{hTP}^o &= (m_{F_y}^o - m_{F_x}^o) \cos v \sin v \end{aligned} \right\} \quad (4.4.4)$$

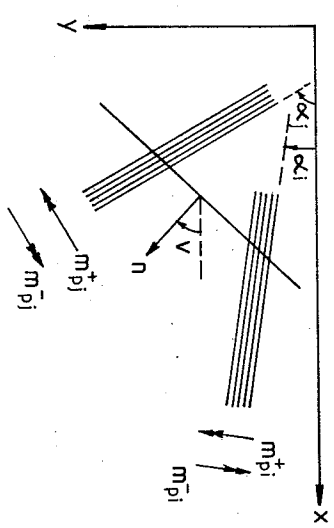
Det må således forventes, at flydebetingelserne (4.4.1) for fordelte generaliserede tøjninger og (4.4.2) for koncentrerede generaliserede tøjninger vil være velegnede ved plasticitetsteoretiske beregninger af jernbetonplader med orthogonal armering.

Skævvinklet armering

Der betragtes, som illustreret på figur 4.4.4, n forskellige armeringsretninger med retningsvinklerne  $\alpha_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ . De numeriske værdier af de tilhørende positive og negative plastiske momenter ved ren bøjning betegnes med  $m_{p_i}^+$  og  $m_{p_i}^-$  (én af disse evt. nul for armering i kun én side).

Benyttes nu ovenstående resultater for de bøjende og vridende momenter i en flydelinie ved orthogonal armering, (4.4.3-4), og betragtes snit vinkelrette på x-henholdsvis y-aksen som værende flydelinier fås:

$$\left. \begin{aligned} m_{F_x}^o &= \sum_1^n m_{p_i}^- \cos^2 \alpha_i \\ m_{F_y}^o &= \sum_1^n m_{p_i}^- \sin^2 \alpha_i \\ m_{F_{xy}}^o &= \sum_1^n m_{p_i}^- \cos \alpha_i \sin \alpha_i \\ m_{F_x}^u &= \sum_1^n m_{p_i}^+ \cos^2 \alpha_i \\ m_{F_y}^u &= \sum_1^n m_{p_i}^+ \sin^2 \alpha_i \\ m_{F_{xy}}^u &= \sum_1^n m_{p_i}^+ \cos \alpha_i \sin \alpha_i \end{aligned} \right\} \quad (4.4.5)$$



Skævvinklede armeringsretninger.  
Figur 4.4.4

Ved at antage følgende formler for de bøjende og vridende momenter i et punkt af en flydelinie, hvis normal i punktet danner vinklen  $v$  med x-aksen:

$$\left. \begin{aligned} \kappa > 0: \\ m_{n\dot{P}}^u &= m_{F_X}^u \cos^2 v - 2m_{F_{XY}}^u \cos v \sin v + m_{F_Y}^u \sin^2 v \\ m_{n\dot{t}P}^u &= m_{F_X}^u \cos v \sin v + m_{F_{XY}}^u (\cos^2 v - \sin^2 v) - m_{F_Y}^u \cos v \sin v \\ m_{n\dot{P}}^O &= m_{F_X}^O \cos^2 v - 2m_{F_{XY}}^O \cos v \sin v + m_{F_Y}^O \sin^2 v \\ m_{n\dot{t}P}^O &= m_{F_X}^O \cos v \sin v + m_{F_{XY}}^O (\cos^2 v - \sin^2 v) - m_{F_Y}^O \cos v \sin v \end{aligned} \right\} (4.4.6)$$

hvor  $\kappa$  er den hovedkrumning, der er forskellig fra nul, i den tilhørende smalle pladestrimmel, og ved at antage flydekriterierne:

$$\left. \begin{aligned} m_n &= m_{n\dot{P}}^u \quad \text{og} \quad m_{nt} = m_{n\dot{t}P}^u, \quad \kappa > 0 \\ m_n &= m_{n\dot{P}}^O \quad \text{og} \quad m_{nt} = m_{n\dot{t}P}^O, \quad \kappa < 0 \end{aligned} \right\} (4.4.7)$$

kan udledes følgende sæt flydebetingelser for det anisotrope tilfælde, se Wolfensberger [64.4], Knöpfel [73.2] eller Bræstrup [70.1],

$$\left. \begin{aligned} \varphi_1 &= - (m_{F_X}^u - m_X) (m_{F_Y}^u - m_Y) + (m_{F_{XY}}^u - m_{XY})^2 \leq 0 \\ \varphi_2 &= - (m_{F_X}^O - m_X) (m_{F_Y}^O + m_Y) + (m_{F_{XY}}^O - m_{XY})^2 \leq 0 \end{aligned} \right\} (4.4.8)$$

Formlerne (4.4.6) er foreslåede af Johansen [43.1] ved intuitive betragtninger.

Forskellen mellem (4.4.8) og (4.4.1) ligger i vridningskapaciteten,  $m_{F_{XY}}$ , idet x- og y-akserne ikke længere er hovedsnit for de plastiske momenter.

Flydebetingelserne, (4.4.8), skal naturligvis også anvendes for orthotrope plader, hvis beregningerne foretages i et koordinatsystem, hvis akser ikke er parallelle med armeringsretningerne.

Det skal nu eftervises, at man ved anvendelse af flydeloven og flydebetingelserne (4.4.8) kommer frem til formlerne (4.4.6) for de bøjende og vridende momenter i en flydelinie.

Lad os antage, at  $\varphi_1 = 0$  og  $\varphi_2 < 0$ . Af (3.1.5) fås:

$$\left. \begin{aligned} k_x &= \alpha \times (m_{F_Y}^u - m_Y) & (\geq 0) \\ 2 k_{xy} &= 2\alpha \times (m_{F_{XY}}^u - m_{XY}) \\ k_y &= \alpha \times (m_{F_X}^u - m_X) & (\geq 0) \end{aligned} \right\} (4.4.9)$$

Idet  $k_x k_y - k_{xy}^2 = -\alpha^2 \times \varphi_1 = 0$  ses, at anden hovedkrumning er nul og at første hovedkrumning er

$$\kappa = \frac{1}{2}(k_x + k_y) \geq 0 \quad (4.4.10)$$

For  $\varphi_1 < 0$  og  $\varphi_2 = 0$  fås

$$\left. \begin{aligned} k_x &= -\alpha \times (m_{F_Y}^O + m_Y) & (\leq 0) \\ 2 k_{xy} &= 2\alpha \times (m_{F_{XY}}^O - m_{XY}) \\ k_y &= -\alpha \times (m_{F_X}^O + m_X) & (\leq 0) \end{aligned} \right\} (4.4.11)$$

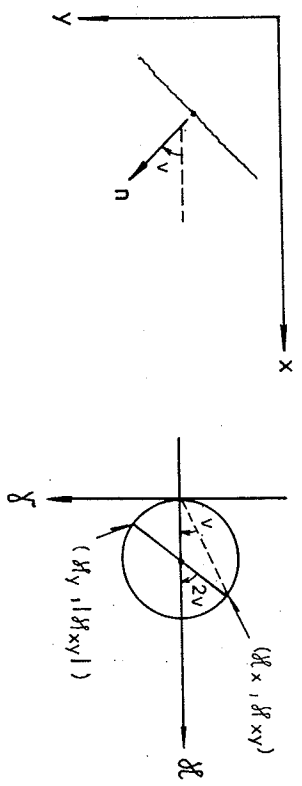
Her fås igen  $k_x k_y - k_{xy}^2 = -\alpha^2 \times \varphi_2 = 0$  således, at første hovedkrumning er nul, medens anden hovedkrumning er

$$\kappa = \frac{1}{2}(k_x + k_y) \leq 0 \quad (4.4.12)$$

Det antages nu, at krumningen er  $\kappa > 0$  i n-retningen, der danner vinklen  $v$  med x-aksen, se figur 4.4.5.a. Af Mohr's cirkel, se figur 4.4.5.b, fås:

$$\left. \begin{aligned} k_x &= \kappa \cos^2 v \\ k_{xy} &= -\kappa \cos v \sin v \\ k_y &= \kappa \sin^2 v \end{aligned} \right\} (4.4.13)$$

Af (4.4.9) og (4.4.13) fås:



Flydelinie og tilhørende generaliserede tøjninger.

Figur 4.4.5

$$\begin{aligned}
 m_x &= m_{FX}^u - \frac{k}{\alpha} \sin^2 v \\
 m_{xy} &= m_{FXY}^u - \frac{k}{\alpha} \cos v \sin v \\
 m_y &= m_{FY}^u - \frac{k}{\alpha} \cos^2 v
 \end{aligned}
 \tag{4.4.14}$$

Heraf findes ved benyttelse af (4.3.1.3):

$$\begin{aligned}
 m_n &= m_x \cos^2 v - 2m_{xy} \cos v \sin v + m_y \sin^2 v \\
 &= m_{FX}^u \cos^2 v - 2m_{FXY}^u \cos v \sin v + m_{FY}^u \sin^2 v = m_{nP}^u
 \end{aligned}
 \tag{4.4.15a}$$

$$\begin{aligned}
 \text{og } m_{nt} &= m_x \cos v \sin v + m_{xy} (\cos^2 v - \sin^2 v) - m_y \cos v \sin v \\
 &= m_{FX}^u \cos v \sin v + m_{FXY}^u (\cos^2 v - \sin^2 v) - m_{FY}^u \cos v \sin v = m_{ntP}^u
 \end{aligned}
 \tag{4.4.15b}$$

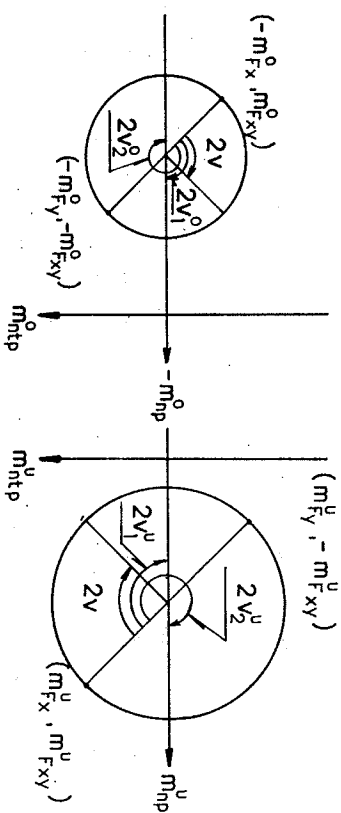
Det indre plastiske arbejde i punktet bliver:

$$\begin{aligned}
 A^I &= m_x^k + 2m_{xy}^k + m_y^k \\
 &= (m_{FX}^u - \frac{k}{\alpha} \sin^2 v) k \cos^2 v - 2(m_{FXY}^u - \frac{k}{\alpha} \cos v \sin v) k \cos v \sin v + (m_{FY}^u - \frac{k}{\alpha} \cos^2 v) k \sin^2 v \\
 &= m_{FX}^u \cos^2 v \times k - 2m_{FXY}^u \cos v \sin v \times k + m_{FY}^u \sin^2 v \times k \\
 &= m_n \times k
 \end{aligned}$$

På samme måde eftervises formlerne i tilfældet  $k < 0$ ,  $\phi_1 < 0$  og  $\phi_2 = 0$ .

Vi vil hermed antage at flydebetingelserne (4.4.8) for fordelte generaliserede tøjninger samt (4.4.7) for koncentrerede generaliserede tøjninger er gældende i det generelle tilfælde: anisotrope jernbetonplader, hvoraf orthotrope plader udgør et specialtilfælde.

De plastiske momenter i et snit, hvis normal danner vinklen  $v$  med x-aksen, (4.4.6), kan illustreres ved Mohr's cirkler, se figur 4.4.6.



OVERSIDEARMERING

UNDERSIDEARMERING

Flydemomenter ved Mohr's cirkler.

Figur 4.4.6

Af Mohr's cirkler fremgår, at der såvel for underside- som for overside- armering findes to snit, hvori de vridende plastiske momenter forsvinder. Disse retninger findes af:

Undersidearmering:

$$\operatorname{tg}(2v^u) = \frac{2 m_{FXY}^u}{m_{Fy}^u - m_{Fx}^u} \Rightarrow v^u = \begin{cases} v_1^u \\ v_1^u + \frac{\pi}{2} \end{cases} \quad (4.4.16a)$$

Oversidearmering:

$$\operatorname{tg}(2v^0) = \frac{2 m_{FXY}^0}{m_{Fy}^0 - m_{Fx}^0} \Rightarrow v^0 = \begin{cases} v_1^0 \\ v_1^0 + \frac{\pi}{2} \end{cases} \quad (4.4.16b)$$

Ved statiske betragtninger alene ses heraf, at armeringen i undersiden regningsmæssigt kan ækvivaleres med en orthogonalarmring med følgende

retninger og plastiske momenter ved ren bøjning om akser vinkelrette på disse retninger:

$$\left. \begin{aligned} m_1^u &= \frac{1}{2} (m_{Fx}^u + m_{Fy}^u) + \frac{1}{2} \sqrt{(m_{Fx}^u - m_{Fy}^u)^2 + 4(m_{FXY}^u)^2} & ; \text{ retn.} : v_1^u \\ m_2^u &= \frac{1}{2} (m_{Fx}^u + m_{Fy}^u) - \frac{1}{2} \sqrt{(m_{Fx}^u - m_{Fy}^u)^2 + 4(m_{FXY}^u)^2} & ; \text{ retn.} : v_1^u + \frac{\pi}{2} \end{aligned} \right\} \quad (4.4.17a)$$

For ækvivalent oversidearmering fås tilsvarende:

$$\left. \begin{aligned} m_1^0 &= \frac{1}{2} (m_{Fx}^0 + m_{Fy}^0) + \frac{1}{2} \sqrt{(m_{Fx}^0 - m_{Fy}^0)^2 + 4(m_{FXY}^0)^2} & ; \text{ retn.} : v_1^0 \\ m_2^0 &= \frac{1}{2} (m_{Fx}^0 + m_{Fy}^0) - \frac{1}{2} \sqrt{(m_{Fx}^0 - m_{Fy}^0)^2 + 4(m_{FXY}^0)^2} & ; \text{ retn.} : v_1^0 + \frac{\pi}{2} \end{aligned} \right\} \quad (4.4.17b)$$

Kun i tilfælde, hvor retningerne bestemte ved (4.4.16) for de ækvivalente orthogonale armeringsnet i over- og underside er sammenfaldende, kan problemet ved koordinattransformation føres tilbage til behandling af orthotrope plader.

Lad os antage, at pladen er sådan armeret, at de plastiske momenter i et x-y-koordinatsystem er givet ved  $m_{Fx}^u, m_{Fy}^u, m_{FXY}^u, m_{Fx}^0, m_{Fy}^0$  og  $m_{FXY}^0$  og at (4.4.16a) og (4.4.16b) giver samme løsning:

$$v = v_1^u = v_1^0 \quad (4.4.18)$$

Ved beregning i x-y-koordinatsystemet skal anvendes flydebetingelserne (4.4.8). I et koordinatsystem,  $\bar{x}-\bar{y}$ -system, der fremkommer ved at dreje x-y-systemet vinklen  $v$ , se figur 4.3.1.3, lyder flydebetingelserne:

$$\left. \begin{aligned} -(m_1^u - m_x^u) (m_2^u - m_y^u) - m_{xy}^u &\leq 0 \\ -(m_1^0 + m_x^0) (m_2^0 + m_y^0) - m_{xy}^0 &\leq 0 \end{aligned} \right\} \quad (4.4.19)$$

Det bemærkes, at (4.4.19) kan afledes af (4.4.8) ved slavisk anvendelse af transformationsformlerne (4.3.1.7) for såvel snitkræftermomenterne som de plastiske momenter. Omvendt kan naturligvis (4.4.8) afledes af (4.4.19) ved benyttelse af (4.3.1.6).

Ovenstående er beskrevet her, idet man undertiden ser det påstået, at den her betragtede plade kan behandles som en orthotrop plade ved

Indsættelse af de plastiske momenter givne ved (4.4.17a-b) i flydebetingelserne (4.4.1) og foretage beregningerne i x-y-koordinatsystemet. Dette er naturligtvis forkert.

Flydebetingelserne (4.4.8) kan kun regnes gældende for forholdsvis små armeringsgrader, da der stilles visse betingelser til udstrækningen af betonens trykzone. Kravene til armeringsgraderne blev for orthotrope plader bestemte af Nielsen [64.5] ved udledning af flydebetingelserne (4.4.1) ud fra brudegenskaberne for beton og armering. Betingelserne kan dog regnes gældende i de almindeligt forekommende tilfælde i praksis.

Som det ses af udtrykkene (4.4.8) negligeres indflydelsen af såvel forskydnings- som membrankræfter (i overensstemmelse med forudsætning (IV), se afsnit 4.2). Som nævnt i afsnit 4.1 vil der ofte ligge en ikke uvæsentlig bæreevnereserve i membran-effekten. Jernbetonens virkemåde betyder, at der i de fleste tilfælde vil forekomme sådanne membran-kræfter. Dette skyldes, at nullinjen ikke ligger i pladens midterplan i momentpåvirkede områder. Hvis de opståede tøjninger i midterplanen ikke tilfredsstiller kompatibilitetsbetingelserne samt de geometriske randbetingelser opstår disse membrankræfter.

Emnet er blevet dyrket af adskillige siden starten af 60'erne. Af arbejder på dette felt skal her blot nævnes Wood [61.2], Sawczuk [64.6] og Morley [74.4]. Bäcklund [72.8] har givet en litteraturoversigt over relevante forskningsarbejder. Der er dog ikke udviklet generelle flydebetingelser der på tilfredsstillende måde tager hensyn til disse kræfter.

Linearisering af flydebetingelserne

Flydebetingelserne kan lineariseres på mange måder. Vi vil her benytte en linearisering som foreslået af Wolfensberger [64.4] og benyttet af adskillige senere i forbindelse med bæreevnebestemmelser ved hjælp af lineær programmering, se f.eks. Anderheggen og Knöpfel [72.5]. Hermed erstattes flydebetingelserne (4.4.8) af otte lineære uligheder:

$$\begin{aligned}
 & -m_{FX}^u + m_x + m_{xy} - m_{FXY}^u \leq 0 \\
 & -m_{FY}^u + m_x - m_{xy} + m_{FXY}^u \leq 0 \\
 & -m_{FY}^u + m_y + m_{xy} - m_{FXY}^u \leq 0 \\
 & -m_{FY}^u + m_y - m_{xy} + m_{FXY}^u \leq 0 \\
 & -m_{FX}^o - m_x + m_{xy} - m_{FXY}^o \leq 0 \\
 & -m_{FX}^o - m_x - m_{xy} + m_{FXY}^o \leq 0 \\
 & -m_{FY}^o - m_y + m_{xy} - m_{FXY}^o \leq 0 \\
 & -m_{FY}^o - m_y - m_{xy} + m_{FXY}^o \leq 0
 \end{aligned}$$

(4.4.20)

Med de generelle betegnelser anvendte i (3.2.1.13) fås her, idet  $m_1 = (m_x, m_{xy}, m_y)^T$ :

$$\begin{aligned}
 \varphi_j &= -b_j^i + b_1^j m_1 \leq 0 \\
 j &= 1, \dots, 8; \quad i = 1, 2, 3
 \end{aligned}$$

(4.4.21)

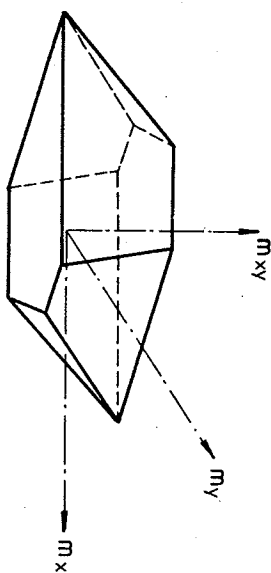
hvor:

$$b_j^i = \begin{bmatrix} m_{FX}^u & m_{FX}^o & m_{FY}^u & m_{FY}^o & m_x & m_y & m_{xy} & m_{FXY}^u & m_{FXY}^o \\ m_{FX}^u & m_{FX}^o & m_{FY}^u & m_{FY}^o & m_x & m_y & m_{xy} & m_{FXY}^u & m_{FXY}^o \\ m_{FX}^u & m_{FX}^o & m_{FY}^u & m_{FY}^o & m_x & m_y & m_{xy} & m_{FXY}^u & m_{FXY}^o \\ m_{FX}^u & m_{FX}^o & m_{FY}^u & m_{FY}^o & m_x & m_y & m_{xy} & m_{FXY}^u & m_{FXY}^o \\ m_{FX}^u & m_{FX}^o & m_{FY}^u & m_{FY}^o & m_x & m_y & m_{xy} & m_{FXY}^u & m_{FXY}^o \\ m_{FX}^u & m_{FX}^o & m_{FY}^u & m_{FY}^o & m_x & m_y & m_{xy} & m_{FXY}^u & m_{FXY}^o \\ m_{FX}^u & m_{FX}^o & m_{FY}^u & m_{FY}^o & m_x & m_y & m_{xy} & m_{FXY}^u & m_{FXY}^o \\ m_{FX}^u & m_{FX}^o & m_{FY}^u & m_{FY}^o & m_x & m_y & m_{xy} & m_{FXY}^u & m_{FXY}^o \end{bmatrix} \quad b_1^j = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & 0 & -1 & -1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

(4.4.22)

De lineariserede flydebetingelser for orthotrope jernbetonplader fremkommer umiddelbart af ovenstående ved sletning af  $m_{PXY}$ -leddene.

De til (4.4.20) hørende flydeflader begrænses i  $(m_x, m_{xy}, m_y)$ -rummet et polygonalt område beliggende inden for området begrænset af flydefladerne tilhørende  $\phi_1$  og  $\phi_2$  givet ved (4.4.8). Benyttelse af (4.4.20) er da på den sikre side. Dette indses intuitivt, et strengt bevis herfor er givet af Hodge [68.3]. De lineariserede flydebetingelser er illustrerede på figur 4.4.7.



Flydeflader tilhørende jernbetonpladers lineariserede flydebetingelser.

Figur 4.4.7

De lineariserede flydebetingelser, (4.4.20), er i overensstemmelse med et simplificeret formelsæt, foreslået af Nielsen [64.5], til dimensionering af orthotrope plader, hvor snitkræfterne kendes. Beregnes negative plastiske momenter af formlerne (med lighedstegn) sættes disse til nul. En behandling af lineariseringens betydning er givet af Knøpfell [73.2].

Et ikke lineært formelsæt, der er i bedre overensstemmelse med (4.4.1) og derfor fører til mindre armeringsforbrug er givet af Nielsen [64.5] og [69.2].

Formålet med lineariseringen er at nå frem til et lineært programmeringsproblem som beskrevet i det generelle tilfælde ved (3.2.2.15) og som vi senere skal se opstillet i det her aktuelle dimensioneringsproblem. Der er naturligvis intet i vejen for at anvende en finere tilnærmelse med benyttelse af flere lineære flydefunktioner end de otte givet ved (4.4.20). Herved vokser dog antallet af lineære restriktioner i optimeringsproblemet, således at dette sammen med lineariseringens nøjagtighed må bestemme den optimale lineariseringsform.

Ved betragtning af en linearisering som f.eks. (4.4.20) sammen med udtrykkene (4.4.5) og forudsætningen gjort i (4.2.4) ses, at der ved behandling af skævinklet armering i forbindelse med dimensionering ved hjælp af lineær programmering må skelnes mellem:

- (I) armeringsretningerne givne, eller
- (II) armeringsretningerne søges optimerede.

Tilfælde (I) medfører ingen ekstra komplikationer sammenlignet med problemer med givne orthogonale armeringsretninger. Dette ses umiddelbart af, at de ovenfor angivne relationer for skævinklet armering bevarer lineariteten.

Søges armeringsretningerne derimod optimerede må foretages yderligere lineariseringer for de i (4.4.5) opstillede trigonometriske funktioner. Dette i praksis væsentlige optimeringsproblem, f.eks. bestemmelser af optimale armeringsretninger i skæve pladebroer, vil ikke blive behandlet her, idet der vil blive forudsat givne armeringsretninger. Den her anvendte beregningsmetode bør dog principielt også kunne anvendes ved optimeringen af armeringsretningerne.



#### 4.5 Elementtyper

Til den parametriske angivelse af en plades momentfelt kan benyttes adskillige elementtyper. For valg af elementtype til løsning af et aktuelt problem må følgende tages i betragtning:

- (I) Kontinuummodellens pladeform skal med rimelig nøjagtighed kunne beskrives ved sammensætning af elementer
- (II) den givne belastning skal kunne beskrives ved de til elementtypen hørende belastningsformer
- (III) statisk ligevægt skal kunne sikres ved opstilling af et sæt lineære ligninger
- (IV) flydebetingelserne skal så vidt muligt sikres opfyldte overalt i elementet ved tilfredsstillende af betingelserne i et antal udvalgte punkter
- (V) det overordnede krav: den bestemte nedreværdi-løsning for den diskrete model skal ligge så nær den eksakte løsning tilhørende kontinuummodellen som muligt.

Ovenstående krav kan sjældent opfyldes samtidigt ved løsning af et aktuelt pladeproblem. Man er ofte nødsaget til at benytte et kompromis ved slækning på et eller flere af kravene.

I afsnit 3.2.2 blev generelt omtalt anvendelse af ligevægtslementer til opnåelse af sande nedreværdiløsninger. Momentfelterne i sådanne plade-elementer beskrives ved uafhængige elementparametre. Udvalgte af disse parametre samt opstilling af udtrykkene for momentfeltet, generelt givet ved (3.2.2.1), kan være bestemte ud fra variationsprincipet anvendt på den komplementære energi. Også blandede elementer kan finde anvendelse ved bestemmelse af ligevægtsløsninger. For disse kan de uafhængige statiske parametre samt momentfelterne udtrykt ved disse bestemmes ved hjælp af Hellinger-Reissners variationsprincip. På denne måde kan såvel bestemmes elementtyper for hvilke statisk ligevægt er strengt overholdt som typer for hvilke ligevægten kun opfyldes tilnærmelsesvist (i middell). Sidstnævnte elementtypes anvendelighed kan ikke udelukkes ved iagttagelse af det overordnede krav angående løsningens værdi sammenlignet med den kor-

rekte samt det forhold, at der ved lineariseringen af flydebetingelserne er foretaget tilnærmelser, der ligger helt på den sikre side. Vi vil dog i det følgende kun anvende elementtyper, for hvilke statisk ligevægt er overholdt. For udvikling af disse kan her benyttes en mere direkte metode, nemlig at udtrykke momentfelterne ved hjælp af interpolationspolynomier, hvis konstanter bestemmes alene ved kravet om ligevægt i elementets indre.

Endelig skal nævnes en fjerde mulighed for formuleringen af et elements parametre og momentfelt. Denne består i at sammensætte kendte ligevægtslementer til nye elementer ved elimination af de derved opståede indre parametre. På denne måde kan opnås en begrænsning i antallet af spændingsparametre tillige med et mere sikkert anvendeligt element.

En oversigt over tidlige udviklede pladeelementer er givet af Jofriet [69.4].

Eksempler på ovenstående elementformuleringer gives i det følgende ved beskrivelse af fire ligevægtslementer for plader: to rektangulære elementer, REKT 1 og REKT 2, samt to trekantelementer, TREK 1 og TREK 2.

To af disse, REKT 2 og TREK 2, er i dette arbejde afprøvede på forskellige problemer. Resultaterne heraf vises sammen med resultater fra andre beslægtede arbejder i kapitel 6.

I beskrivelsen af en elementtype vil blive gjort rede for:

1. Parametre for og udseende af momentfeltet.
2. Mulige belastningsformer.
3. Statistiske ligevægtsligninger
  - a. indre ligevægt
  - b. kontinuetsbetingelser langs fælles rand.
  - c. nødvendige randbetingelser ved ydre rand.
4. Nødvendigt omfang for opstilling af flydebetingelser.

Det til de forskellige elementtyper hørende lineære programmeringsproblem behandles generelt i kapitel 5.

#### 4.5.1 Rektangulære elementer

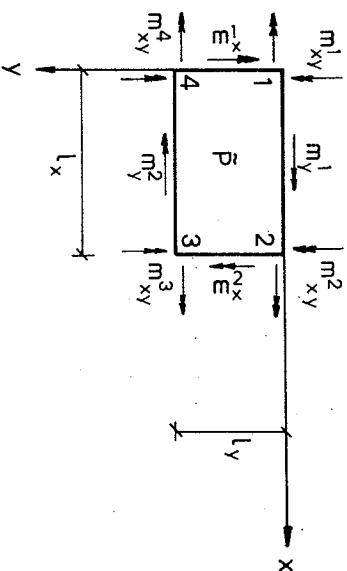
Rektangulære elementer kan være velegnede ved beregning af plader bestående af rektangulære felter. For jernbetonplader opnås en simpel formulering af flydebetingelserne udtrykte ved elementets momentparametre og de valgte variable for den søgte armering. Formuleringen bliver naturligtvis mest simpel i tilfælde, hvor der foreskrives orthogonal armering og disse retninger er parallelle med elementrandene.

Ranaweera og Leckie [70.2] har ved anvendelse af interpolationspolynomier udviklet et element, hvor  $m_x$ ,  $m_{xy}$  og  $m_y$  er givne ved 3. grads polynomier. Hertil kan benyttes i alt 22 uafhængige elementparametre, således at indre ligevægt er sikret. Dette element er anvendt ved bæreevnebestemmelse efter nedrevardimetoden under benyttelse af ikke-lineær optimeringsteknik, se [70.2]. Løsningen af det tilhørende matematiske optimeringsproblem er besværlig og sikkerheden problematisk i generelle tilfælde. Det er klart, at elementet er dårligt anvendeligt i forbindelse med lineær programmering på grund af momentfordelingens store variationsmuligheder inden for hvert element.

Ved sammensætning af fire trekantede elementer med konstante momentfelter har Bäcklund [73.1] formuleret et element med konstant vridningsmoment og lineært varierende bøjende momenter. Bäcklund fandt frem til de samme statistiske forhold for elementet ved anvendelse af interpolationspolynomier og benyttelse af Hellingner-Reissners variationsprincip. De to fremstillinger resulterer dog i afvigelser i de blandede elementers fleksibilitetsmatricer.

#### 4.5.1.1 Rektangulære element REKT 1

For illustration af den direkte metode for opstilling af et elements momentfelt på parameterform betragtes først det i henseende til linær programmering mest simple rektangulære element, når såvel fladelaste, fordelte laste som koncentrerede kræfter skal kunne behandles. Dette element har de konstante bøjende momenter langs randene og vridningsmomenterne i hjørnerne som parametre, se figur 4.5.1.1.1. Der forudsættes lineær variation af  $m_x$  i x-retningen og analogt for  $m_y$  i y-retningen. De vridende momenter antages at kunne beskrives ved en hyperbolisk parabololide.



Momentparametre for REKT 1.  
Figur 4.5.1.1.1

Momentfeltet er givet ved:

$$\underline{m}^e = (m_x^1, m_x^2, m_{xy}^1, m_{xy}^2, m_{xy}^3, m_{xy}^4, m_y^1, m_y^2)^T \quad (4.5.1.1.1)$$

I elementets indre er momentfeltet,  $\underline{m} = (m_x, m_{xy}, m_y)^T$ , givet ved

$$\underline{m} = \underline{\chi}^e \times \underline{m}^e \quad (4.5.1.1.2)$$

hvor

$$\chi^e = \begin{bmatrix} 1 - \frac{x}{l_x} & \frac{x}{l_x} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 - \frac{x}{l_x} - \frac{y}{l_y} & \frac{x}{l_x} (1 - \frac{y}{l_y}) & \frac{xy}{l_x l_y} & \frac{y}{l_y} (1 - \frac{x}{l_x}) \\ 0 & 0 & \frac{1}{l_x} \frac{xy}{l_y} & \frac{y}{l_y} (1 - \frac{x}{l_x}) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 - \frac{y}{l_y} & \frac{y}{l_y} \end{bmatrix} \quad (4.5.1.1.3)$$

Forskellen mellem dette element og det førnævnte af Bäcklund [73.11] angivne element er, at i sidstnævnte fås:  $m_{xy} = \frac{1}{2l_x} (m_y^2 - m_x^2) + \frac{1}{2l_y} (m_x^2 - m_y^2)$  (= konst.)

De Kirchhoff'ske forskydningskræfter langs randene tillige med knudekræfterne i elementets hjørner, se figur 4.5.1.2 opstilles i vektoren:

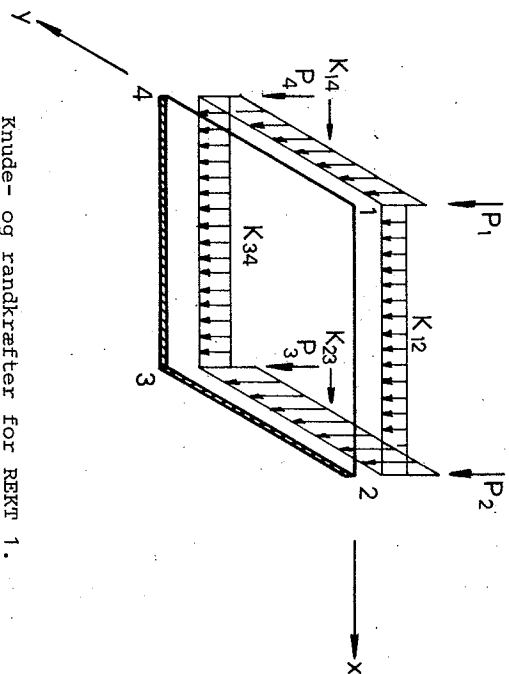
$$\underline{r}^e = (K_{12}, K_{23}, K_{34}, K_{41}, P_1, P_2, P_3, P_4)^T \quad (4.5.1.1.4)$$

Disse udtrykkes ved parametrene  $\underline{m}^e$  ved

$$\underline{r}^e = \underline{k}^e \times \underline{m}^e \quad (4.5.1.1.5)$$

hvor

$$\underline{k}^e = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\frac{2}{l_x} & \frac{2}{l_x} & 0 & 0 & \frac{1}{l_y} & -\frac{1}{l_y} \\ 0 & \frac{1}{l_x} & 0 & \frac{2}{l_y} & -\frac{2}{l_y} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{2}{l_x} & \frac{2}{l_x} & -\frac{1}{l_y} & \frac{1}{l_y} \\ 0 & \frac{1}{l_x} & -\frac{2}{l_y} & 0 & \frac{2}{l_y} & -\frac{2}{l_x} & \frac{1}{l_y} & -\frac{1}{l_y} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.5.1.1.6)$$



Knude- og randkræfter for REKT 1.   
 Figur 4.5.1.1.2

Parameterfremstilling for pladens momentfelter:

De bøjende momenter tildeles elementrandene nedens de vridende momenter tildeles elementerne, idet fortegnskonventionen som vist på figur 4.5.1.1.1 overholdes.

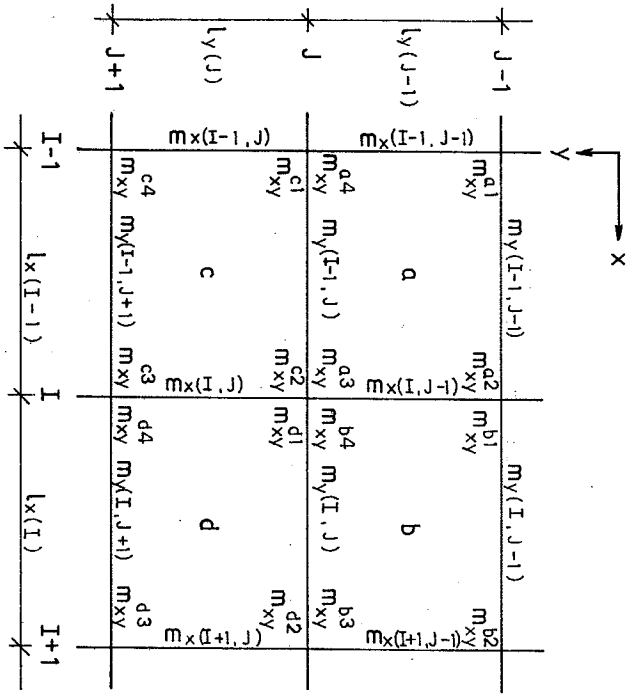
Ved nummerering af siderne og elementerne opstilles samtlige variable i vektoren:

$$\underline{r} = (m_x(1,1), \dots, m_x(n,m), \dots, m_y(1,1), \dots, m_y(m,n), \dots, m_{xy}^{1a}, \dots, m_{xy}^{4a}, \dots)^T$$

se figur 4.5.1.1.3.

Ud fra den benyttede (automatiske) nummerering opstilles umiddelbart for hvert element:

$$\underline{m}^e = \underline{g}^e \times \underline{r} \quad (4.5.1.1.7)$$



Global parameterangivelse.  
Figur 4.5.1.1.3

Belastninger:

Af udtrykket for momentfeltet, (4.5.1.1.2-3), ses at der kan behandles:

- a) Fladlast, konstant inden for element (optages ved vridning).
- b) Enkeltræfter, skal angribes i knudepunkt (optages ved diskontinuiteter i vridningsmomentet).
- c) Linielaste, konstante langs elementrand (ligevægt for Kirchoff'ske forskydningskræfter).

Ligevægtsbetingelser:

Indire ligevægt for element fås af (4.3.1.2) og (4.5.1.1.2-3) til:

$$2 \times (m_{xy}^1 - m_{xy}^2 + m_{xy}^3 - m_{xy}^4) = \tilde{p} \times l_x \times l_y \quad (4.5.1.1.8)$$

Er feltet søjleunderstøttet, udelades (4.5.1.1.8), idet søjletrykket

behandles som ubekendt. Ud fra fundne løsninger bestemmes søjletrykket ved hjælp af (4.5.1.1.8).

Kontinuitetsbetingelser:

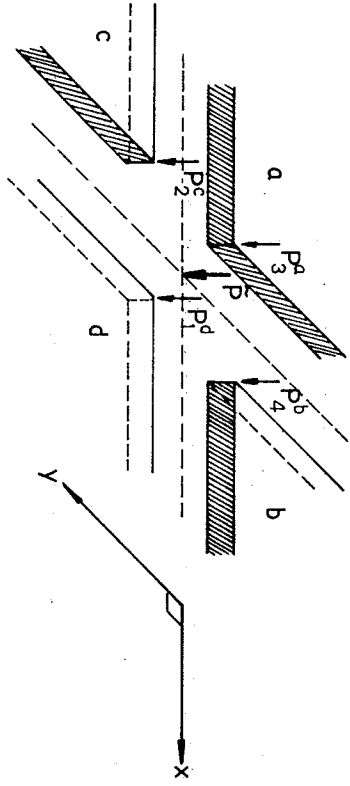
Med valgte variabelnumrering fås kontinuitetsbetingelserne, se figur 4.5.1.1.3:

rand mellem a og b :  $K_{23}^a + K_{14}^b = \tilde{p}_0$

rand mellem a og c :  $K_{34}^a + K_{12}^c = \tilde{p}_0 \quad (4.5.1.1.9)$

knude I, J (se figur 4.5.1.1.4) :  $p_3^a + p_4^b + p_2^c + p_1^d = \tilde{p}$

Repræsenterer den fælles rand en mellemunderstøtning opstilles disse kontinuitetsligninger ikke. Den jævnt fordelte reaktion og de til knudepunkterne hørende enkeltræfter findes ud fra løsningen ved (4.5.1.1.9).



Knudeligevægt.  
Figur 4.5.1.1.4

Randbetingelser:

Udgør randen 1-4 af element a en ydre rand fås randbetingelserne:

Ingen betingelser

$$\begin{cases} m_x^1 a = \tilde{m}_b \\ m_x^1 a = \tilde{m}_b ; K_{14}^a = \tilde{p}_1 \\ p_1^c + p_4^a = \tilde{p} \text{ (tilsvarende for punkt a1)} \end{cases} \quad (4.5.1.1.10)$$

Flydebetingelser:

Idet momentfeltet er lineært i alle retninger over et element er det tilstrækkeligt at opstille de lineariserede flydebetingelser, (4.4.20), i hvert elements fire hjørnepunkter til sikring af, at betingelserne er overholdte overalt. (Dette gælder naturligvis også hvis de korrekte flydebetingelser, (4.4.8), anvendes, da disse er konvekse.) Der opstilles altså ialt  $4 \times 8 \times n_e$  lineære uligheder, hvor  $n_e$  er antallet af elementer.

Anvendeligheden af dette element afhænger af den valgte elementinddeling ved det aktuelle problem. Diskretiseres ved benyttelse af kun ét element kan de gældende ligevægtsligninger ikke generelt opfyldes ud fra alle understøtningsformer for stift-legeme-bevægelse og alle former for belastninger, der ellers kan behandles.

Lad os betragte en plade inddelt i et  $n_x \times n_y$ -net.

Herved fås:

Antal ubekendte:  $n = 6 \times n_x \times n_y + n_x + n_y$

Antal st. ligninger:  $m \leq 4 \times n_x \times n_y + 2(n_x + n_y) - 2$

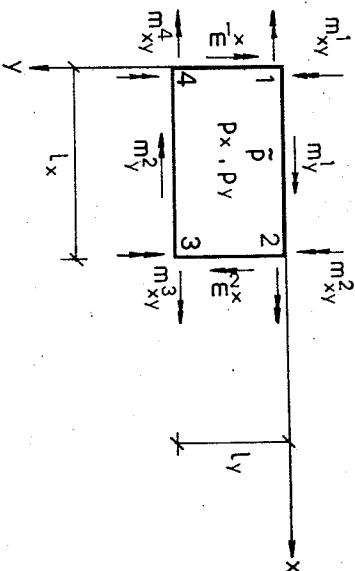
Ved grænseovergang til uendelig fin inddeling fås:

$$\frac{n}{m} \rightarrow \frac{6}{4} = 1.5 \quad (4.5.1.1.11)$$

Altså det halve af forholdet givet ved (3.2.2.5).

4.5.1.2 Rektangulært element, REKT 2.

Dette element fremgår af elementet: REKT 1, ved udvidelse til at lade  $m_x$  variere parabolisk i x-retningen og analogt for  $m_y$  i y-retningen. Herved kan fordelte belastninger over elementet optages ved såvel bøjning som vridning. Parameterantallet udvides til ti, se figur 4.5.1.2.1, idet de nye parametre er  $P_x$  og  $P_y$ .



Momentparametre for REKT 2.  
Figur 4.5.1.2.1

Momentfeltet i et element er givet ved parametrene

$$m^e = (m_x^1, m_x^2, m_{xy}^1, m_{xy}^2, m_{xy}^3, m_{xy}^4, m_y^1, m_y^2, P_x, P_y)^T \quad (4.5.1.2.1)$$

I elementets indre bliver udtrykkene for momenterne:

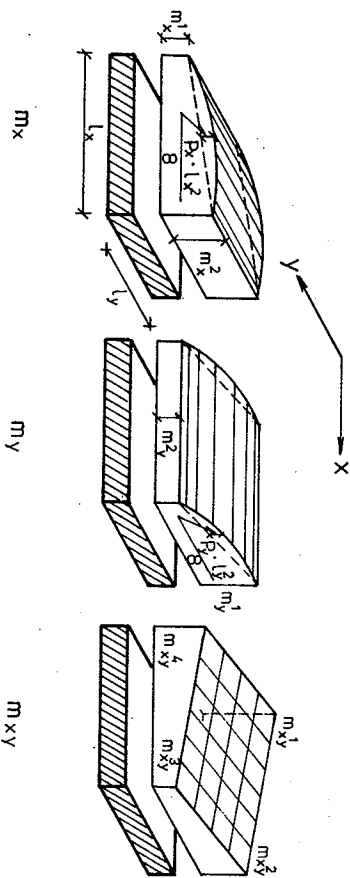
$$m = \chi^e \times m^e \quad (4.5.1.2.2)$$

Her er

$$\chi^e(\text{REKT 2}) = \begin{bmatrix} \chi^e(\text{REKT 1}) & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} \times (1-x) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} y(1-y) \end{bmatrix} \quad (4.5.1.2.3)$$

se (4.5.1.1.3)

For fordelingen af momenterne over elementet er vist på figur 4.5.1.2.2.



Momentfelt for REKT 2.

Figur 4.5.1.2.2

Opstilles igen de Kirchoff'ske forskydningskræfter langs elementtrædene tillige med knudekræfterne i elementets hjørner i:

$$\underline{r}^e = (K_{12}, K_{23}, K_{34}, K_{14}, P_1, P_2, P_3, P_4)^T \quad (4.5.1.2.4)$$

(se figur 4.5.1.1.2) fås:

$$\underline{r}^e = \underline{k}^e \times \underline{m}^e \quad (4.5.1.2.5)$$

Her er:

$$\underline{k}^e_{\text{(REKT 2)}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} l_x & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} l_x & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} l_x & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} l_y & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} l_y & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.5.1.2.6)$$

(se (4.5.1.1.6))

Parameterfremstilling for pladens momentfelt:

Samtlige variable for hele pladen opstilles som for REKT 1, idet  $P_x, P_y$  tilføjes for alle elementer, d.v.s.

$$\underline{r}^e_{\text{(REKT 2)}} = (\underline{r}^e_{\text{(REKT 1)}}, P_x^1, P_y^1, \dots, P_x^{ne}, P_y^{ne})^T. \text{ For } \underline{r}^e_{\text{(REKT 1)}} \text{ se Figur 4.5.1.1.3.}$$

Belastninger:

De samme belastningsformer som for REKT 1 kan optages. Æneste ændring er, at fladelast ikke nødvendigvis optages alene ved vridning i element.

Ligevægtsbetingelser:

Indre ligevægt for element fås af (4.3.1.2) og (4.5.1.2.2-3):

$$2 \times (m_{xy}^1 - m_{xy}^2 + m_{xy}^3 - m_{xy}^4) = l_x \times l_y (\bar{p}_x - p_x - p_y) \quad (4.5.1.2.7)$$

Denne ligning opstilles ikke, hvis det til elementet hørende pladefelt er søjleunderstøttet.

Kontinuitetsbetingelser:

Opstilles disse betingelser udtrykt ved komponenterne i  $\underline{r}^e$  fås samme udtryk som for REKT 1, se (4.5.1.1.9).

Råndbetingelser:

Disse bliver ligeledes analoge til betingelserne for REKT 1, se (4.5.1.1.10).

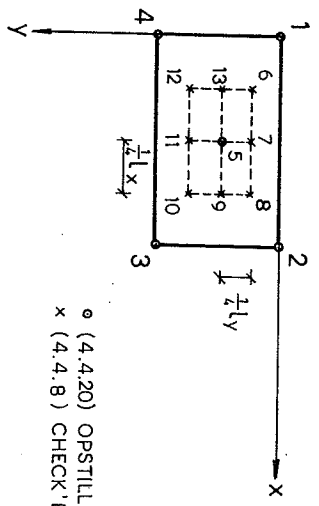
Flydebetingelser:

Da momentfeltet ikke er lineært varierende over elementet er det ikke tilstrækkeligt at opstille de lineariserede flydebetingelser i hjørnepunkterne. De lineære uligheder kan opstilles explicit i ethvert punkt af elementet. For at begrænse restriktionsantallet kan som eneste ekstrakt, vælges rektanglets midtpkt., pkt. 5 på figur 4.5.1.2.3, hvor

$$\begin{aligned}
 m_x &= \frac{1}{2}(m_x^1 + m_x^2) + \frac{1}{8} P_x l_x^2 \\
 m_y &= \frac{1}{2}(m_y^1 + m_y^2) + \frac{1}{8} P_y l_y^2 \\
 m_{xy} &= \frac{1}{4}(m_{xy}^1 + m_{xy}^2 + m_{xy}^3 + m_{xy}^4)
 \end{aligned}
 \tag{4.5.1.2.8}$$

Der opstilles således ialt  $5 \times 8 \times n_e$  lineare uligheder.

For den ved optimeringen fundne løsning kan de korrekte flydebetingelser, (4.4.8), check'es i f.eks. punkterne 6,7,8,9,10,11,12,13, se figur 4.5.1.2.3.



o (4.4.20) OPSTILLES  
x (4.4.8) CHECK'ES

Check/opstilling af flydebetingelser

Figur 4.5.1.2.3

Ved uendelig fin elementinddeling fås her forholdet mellem antallet af ubekendte,  $n$ , og antallet af statiske ligevægtsligninger,  $m$ :

$$\frac{n}{m} + \frac{8}{4} = 2.0
 \tag{4.5.1.2.9}$$

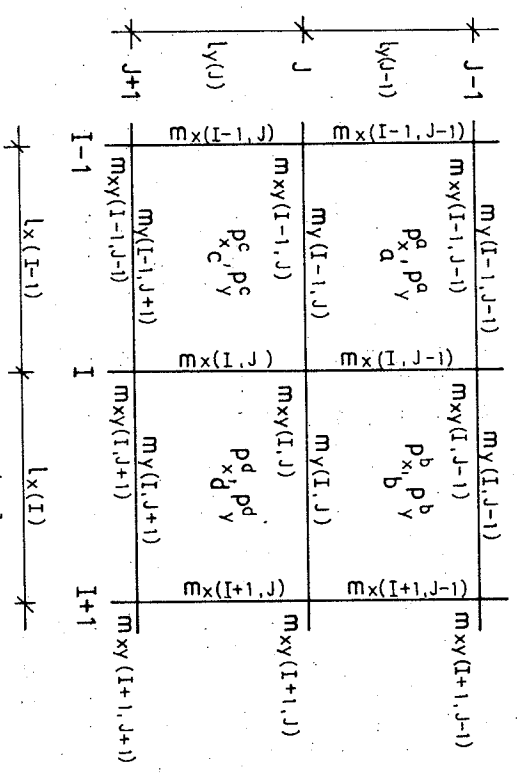
Altså må, set ud fra dette forhold alene, forventes bedre ligevægtsløsninger end for elementet REKR 1 med samme elementinddeling.

Det her omtalte element afspejler en analogi til strimmelmetoden, se Hillerborg [56.2]. Sammenhængen fremgår af figur 4.5.1.1.3, hvor elementindelingen repræsenterer pladestruklur parallelle med koordinataksene, samt af momentfeltet (4.5.1.2.2-3), der nemlig er løsninger til pladens differentiaalligninger på formen:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial^2 m_x}{\partial x^2} &= -P_x \\
 \frac{\partial^2 m_y}{\partial y^2} &= -P_y \\
 \frac{\partial^2 m_{xy}}{\partial x \partial y} &= (\tilde{p} - P_x - P_y)
 \end{aligned}
 \tag{4.5.1.2.10}$$

Elementet blev benyttet af Wolfensberger [64.4] der dog ikke anvendte de Kirchhoff'ske forskydningskræfter og som udtrykte kontinuetsbetingelserne i form af differensligninger. Ved anvendelse af den Kirchhoff'ske pladeteori ville man naturligvis herved komme til de samme betingelser som de her opstillede. Metoden er her blot opstillet i EDB-orienteret sprog som finite element metode.

Dette element er afprøvet på forskellige problemer i dette arbejde, se kapitel 6. Der er dog heri indført det unødvendige krav, at vridningsmomentet har samme værdi i et punkt for alle sammenstødende elementer. Herved udelukkes behandlingen af koncentrerede belastninger. Parameterrættstillingen for hele pladen bliver som angivet på figur 4.5.1.2.4.



Global parameterangivelse  
Figur 4.5.1.2.4

Ved krav om kontinuitet i vridningsmomenterne fås:

$$\bar{m} \rightarrow \frac{1}{3} = 1.67 \quad (4.5.1.2.11)$$

4.5.2 Trekantelelementer

Trekantformede pladeelementer har været ofte benyttede i forbindelse med forskelligartede pladeproblemer. Disse kan i visse tilfælde være overlegne i forhold til rektangulære elementer. Dels vil der for ikke rektangulære pladeformer kunne opnås en bedre geometrisk tilnærmelse ved inddeling i trekantelelementer. Dels vil disse elementer i de fleste tilfælde, hvor den aktuelle plade ikke er karakteriseret ved bestemte "hovedretninger", kunne udtrykke de til kontinuummodellen hørende felter (flytningsfelter - momentfelter) bedst.

Vi vil i dette afsnit betragte to trekantelementer: TREK 1, der har konstant momentfelt og TREK 2, hvis momentfelt er lineært varierende. TREK 2 er blevet afprøvet i forbindelse med dette arbejde. Resultaterne vises i kapitel 6.

4.5.2.1 Trekantelelement med konstant momentfelt, TREK 1

Trekantelelementet med konstant momentfelt har ofte været anvendt ved beregning af plader i forbindelse med såvel elastiske, elasto-plastiske som med rent plastiske beregningsmetoder.

Som blandt element med lineært varierende flytningsfelt blev det første gang udviklet af Hellan [67.3] og Hermann [67.4]. Allman [70.3] viste at elementet er et ligevægtselement og således velegnet i forbindelse med nedreværdiberegninger. I den blandede formulering kan elementets uafhængige variable repræsenteres af de bøjende momenter langs randene og de lodrette flytninger i hjørnepunkterne. Ved anvendelse af Hellingner-Reissner's variationsprincip har Bäcklund [73.11] udledt elementets fleksibilitets- og stivhedsmatricer.

Til vort brug er det kun elementets statiske forhold der interesserer os. De kræfter, der regnes virkende på elementets rande og knuder er vist på figur 4.5.2.1.1, hvor tillige elementets geometri er givet i et lokalt  $\bar{x}$ - $\bar{y}$ -koordinatsystem. For udledning af de her givne relationer henvises til Bäcklund [73.11].

Som parametre for elementet vælges de bøjende momenter på randene:

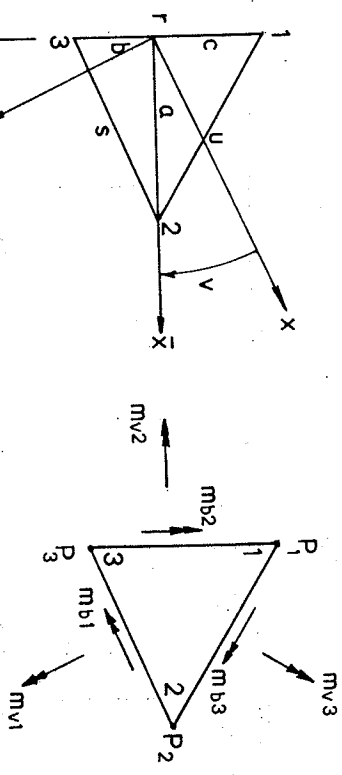
$$\bar{m}^e = (m_{b1}, m_{b2}, m_{b3})^T \quad (4.5.2.1.1)$$

I elementets indre er momentfeltet givet ved

$$\bar{m} = (m_x^e, m_{xy}^e, m_y^e)^T \quad (4.5.2.1.2)$$

der udtrykkes ved parametrene ved hjælp af:

$$\bar{m} = \chi^e \times \bar{m}^e \quad (4.5.2.1.3)$$



Geometri og momentparametre for TREK 1.

Figur 4.5.2.1.1

hvor

$$\bar{y}^e = \begin{bmatrix} 0 & 1/r & 0 \\ -s/2ar & (b-c)/2ar & u/2ar \\ cs/a^2r & -bc/a^2r & bu/a^2r \end{bmatrix} \quad (4.5.2.1.4)$$

De generaliserede spændinger,  $\bar{m} = (m_x^e, m_{xy}^e, m_y^e)^T$  findes af

$$\bar{m} = \chi^e \times \bar{m}^e \quad (4.5.2.1.5)$$

hvor  $\chi^e$  findes af (4.3.1.6) og (4.3.2.1.4)



$$\chi^e = \underline{r}^e \times \underline{\dot{\chi}}^e \quad (4.5.2.1.6)$$

De vridende momenter langs randene:  $\underline{m}_v^e = (m_{v1}, m_{v2}, m_{v3})^T$  findes af

$$\underline{m}_v^e = \underline{\dot{\Delta}}^e \times \underline{m}^e, \quad \text{hvor}$$

$$\underline{\dot{\Delta}}^e = \begin{bmatrix} (a^2 - b^2 - 2bc)/2ar & s/2a & -su/2ar \\ -s/2a & (b-c)/2a & u/2a \\ su/2ar & -u/2a & (c^2 - a^2 + 2bc)/2ar \end{bmatrix} \quad (4.5.2.1.7)$$

Endelig kan knudekræfterne  $\underline{p}^e = (P_1, P_2, P_3)^T$  findes af  $\underline{p}^e = \underline{p}^e \times \underline{m}^e$  eller  $\underline{p}^e = \underline{k}^e \times \underline{m}^e$ , hvor

$$\underline{p}^e = \begin{bmatrix} 0 & 1/r & -1/u \\ -1/s & 0 & 1/u \\ 1/s & -1/r & 0 \end{bmatrix} \quad (4.5.2.1.8)$$

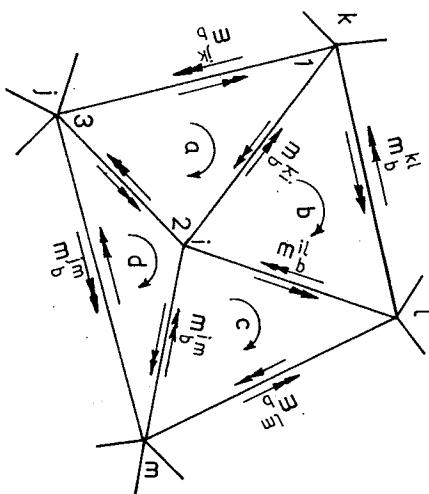
$$\underline{k}^e = \begin{bmatrix} -s/ar & b/ar & -(bc - a^2)/aru \\ b/as & -1/a & c/au \\ -(bc - a^2)/ars & c/ar & -u/ar \end{bmatrix} \quad (4.5.2.1.9)$$

Parameterfremstilling for pladens momentfelt:

De senere beskrevne ligevægtsbetingelser simplificeres ved at tildele samme variabel for det bøjende moment for to naboelementers fælles rand som vist på figur 4.5.2.1.2. For samtlige herved i pladen indførte variable for de bøjende momenter vælges samme fortegn, f.eks. positiv elementinddeling opstilles de variable automatisk i vektoren  $\underline{m} = (m_b^1, m_b^2, \dots)^T$ .

Ved explicit angivelse eller automatisk generering af numre for et elements tilhørende sider opstilles:

$$\underline{m}^e = \underline{G}^e \times \underline{r} \quad (4.5.2.1.10)$$



Global parameterangivelse

Figur 4.5.2.1.2

Belastninger:

Af (4.3.1.2) og (4.3.3.8) i forbindelse med (4.5.2.1.3-6) ses, at der hverken kan optages fordelte laste eller linjelaste på pladen. Kun koncentrerede kræfter i knudepunkterne kan optages. Disse optages ved diskontinuiteter i de vridende momenter som givet ved (4.3.3.10). For behandling af aktuelle flade- eller linjelaste må disse ækvivaleres med knudekræfter ved benyttelse af Saint Venant's princip, hvilket ofte vil være en rimelig tilnærmelse for den ydre belastning.

Ligevægtsbetingelser:

Indre ligevægt:

Ligevægten i elementets indre er opfyldt overalt, når fladelasten på elementet er nul. Kontinuitetsbetingelserne (4.3.3.8) og (4.3.3.9) langs fælles elementrande er ligeledes automatisk opfyldte, når der ikke påføres ydre last langs randen.

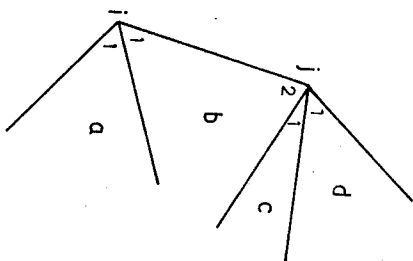
Kontinuitetsbetingelser:

Total ligevægt i det indre af pladen sikres da ved opstilling af knudeligevægt for alle indre knuder. F.eks. opstilles for punkt i på figur 4.5.2.1.2:

$$P_2^a + P_3^b + P_3^c + P_1^d = \underline{r} \quad (4.5.2.1.11)$$

For hvert element udtrykkes  $P_i^e$  ved  $\underline{r}$  gennem (4.5.2.1.9) og (4.5.2.1.10).

Randbetingelser:



Randbetingelser  
Figur 4.5.2.1.3

Er sidelinien  $ij$  for element  $b$ , se figur 4.5.2.1.3, en ydre rand lyder randbetingelserne (4.3.3.11):

$$\left. \begin{array}{l} \text{Ingen betingelser} \\ m_{b3} = m_b^{ij} = \bar{m} \\ m_{b3} = m_b^{ij} = \bar{m} \\ \text{sampt: } P_1^a + P_1^b = \bar{F}_1 \quad \text{og} \quad P_2^b + P_1^c + P_1^d = \bar{F}_j \end{array} \right\} (4.5.2.1.12)$$

Randbetingelserne udtrykkes ligeledes ved benyttelse af (4.5.2.1.9) og (4.5.2.1.10) ved lineære ligninger i  $\bar{F}$ .

Flydebetingelser:

Idet de plastiske momenter forudsættes konstante inden for hvert element ses det, at  $\phi_1$  og  $\phi_2$  som givne ved (4.4.8) antager konstante værdier inden for hvert element. Derfor er det tilstrækkeligt at anvende ét checkpunkt for hvert element, hvadenten flydebetingelserne (4.4.8) eller (4.4.20) anvendes.  $\bar{m} = (m_x, m_{xy}, m_y)^T$  udtrykkes ved  $\bar{F}$  ved anvendelse af (4.5.2.1.3-6) og (4.5.2.1.10).

Her opstilles altså i alt  $8 \times n$  lineære uligheder for flydebetingelserne.

Ved grænseovergang til uendelig fin elementinddeling fås:

$$\text{antal sider} \sim 3 \times \text{antal knuder.}$$

Altså bliver forholdet mellem antallet af spændingsvariable og antallet af statiske ligevægtsligninger:

$$\frac{n}{n} + 3 \quad (4.5.2.1.13)$$

d.v.s. eksakt lig det i (3.2.2.5) opstillede ønskede forhold.

4.5.2.2 Trekantelelement med lineært momentfelt, TRER 2

Trekantelelementet med lineært varierende momentfelt er også anvendt ved såvel elastiske som plastiske pladeberegninger.

Det her benyttede element blev udviklet af Veubeke og Sander [68.4], der har anvendt det i elastiske pladeberegninger. Ved anvendelse af variationsprincippet for den komplementære energi blev elementet udviklet som ligevægts-element.

Elementet har været benyttet af Faccioli og Vitiello [73.3] ved bærevebestemmelser for plader af materialer for hvilke Tresca's flydebetingelser er gældende.

Anderheggen og Knöpfell [72.5] samt Knöpfell [73.2] har benyttet et element med lineære momentfelter, hvor kontinuert i vridningsmomenterne foreskrives, til bærevebestemmelser for jernbetonplader. For dette element er ligevægten dog ikke eksakt opfyldt.

Da vi her blot er interesserede i elementets momentfelt i forbindelse med ligevægtsbetingelserne vil vi anvende en lidt anden parameterfremstilling. For nærmere bestemmelse af de i det følgende givne relationer henvises til Veubeke og Sander [68.4].

Det viser sig, at de statiske ligevægtsligninger opstilles mest bekendt i et skævvinklet koordinatsystem,  $x$ - $y$ -koordinatsystem, og dermed "skævvinklede momenter",  $\bar{m} = (m_x^-, m_{xy}^-, m_y^-)^T$  som vist på figur 4.5.2.2.1, hvor tillige fortegnskonventionen er vist. På figuren er også vist de  $n$  parametre for momentfeltet. Disse vælges som de tre momentstørrelser i hvert hjørne:

hvor

$$\bar{m}^e = \begin{bmatrix} \bar{m}_1 \\ \bar{m}_2 \\ \bar{m}_3 \end{bmatrix} \quad (4.5.2.2.1)$$

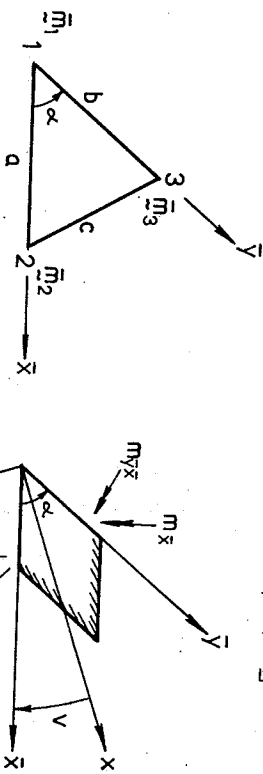
$$\bar{m} = (m_x^-, m_{xy}^-, m_y^-)^T \quad (4.5.2.2.2)$$

I det lokale koordinatsystem findes de skævvinklede momenter ved:

$$\bar{m} = \bar{\chi}^e \times \bar{m}^e \quad (4.5.2.2.3)$$

hvor

$$\bar{\chi}^e = \begin{bmatrix} 1 - \frac{\bar{x}}{a} - \frac{\bar{y}}{b} & 0 & 0 & \frac{\bar{x}}{a} & 0 & 0 \\ 0 & 1 - \frac{\bar{x}}{a} - \frac{\bar{y}}{b} & 0 & 0 & \frac{\bar{x}}{a} & 0 \\ 0 & 0 & 1 - \frac{\bar{x}}{a} - \frac{\bar{y}}{b} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.5.2.2.4)$$



Geometri og momentparametre for TREK 2.  
Figur 4.5.2.2.1

De generaliserede spændinger  $\bar{m} = (m_x^-, m_{xy}^-, m_y^-)^T$  i det globale koordinatsystem, vist på figur 4.5.2.2.1, findes af

$$\bar{m} = \chi^e \times \bar{m}^e \quad (4.5.2.2.5)$$

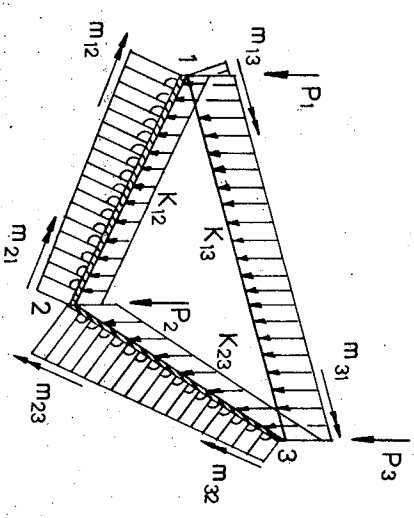
hvor  $\chi^e$  findes af:

$$\chi^e = \bar{a}^e \times \bar{\chi}^e \quad (4.5.2.2.6)$$

hvor:

$$\bar{a}^e = \frac{1}{\sin \alpha} \begin{bmatrix} -\cos^2 v & -2\cos v \cos(\alpha - v) & -\cos^2(\alpha - v) \\ \cos v \sin v & -\sin(\alpha - 2v) & -\cos(\alpha - v) \sin(\alpha - v) \\ -\sin^2 v & 2\sin v \sin(\alpha - v) & -\sin^2(\alpha - v) \end{bmatrix} \quad (4.5.2.2.7)$$

De kræfter, der virker på elementets rande og i dets knuder kan i henhold til den Kirchoff'ske plade teori beskrives som lineært varierende bøjende momenter, konstante Kirchoff'ske forskydningskræfter (de bøjende og vridende momenter varierer retlinet langs og vinkelret på randen) samt koncentrerede kræfter i knuderne. Kræfterne findes ved statiske betragtninger i forbindelse med formlerne angivet i afsnit 4.3.3. Samtlige rand- og knudekræfter er vist på figur 4.5.2.2.2.



Knude- og randkræfter for TREK 2.  
Figur 4.5.2.2.2

Samtlige kræfter, der alle på nær hjørnekræfterne er definerede pr. længdeenhed, opstilles i vektoren:

$$\bar{r}^e = (m_{1,2}, m_{2,1}, m_{1,3}, m_{3,1}, m_{2,3}, m_{3,2}, k_{1,2}, k_{2,1}, k_{1,3}, k_{3,1}, P_1, P_2, P_3)^T \quad (4.5.2.2.8)$$

Disse udtrykkes ved momentparametrene ved:



For randen,  $ij$ , mellem elementerne  $a$  og  $b$ , se figur 4.5.2.2.3, samt for knuderne  $i$  og  $j$  opstilles betingelserne:

$$\begin{aligned} \text{side } ij : m_{13}^b &= m_{12}^a ; m_{31}^b = m_{21}^a ; K_{13}^b + K_{12}^a = \tilde{P}_{1j} \\ \text{knude } i : p_1^a + p_1^c + p_1^d + p_2^e + p_1^b &= \tilde{P}_i \\ \text{knude } j : p_2^a + p_3^b + p_3^f + p_1^g + p_1^h &= \tilde{P}_j \end{aligned} \quad (4.5.2.2.12)$$

Randbetingelser:

Udgør randen 13 for element  $b$  (se figur 4.5.2.1.3, idet hjørne nr. 2 for elementet  $b$  erstattes af nr. 3) en ydre rand, opstilles randbetingelserne:

$$\begin{aligned} \text{Ingen betingelser} \\ m_{13}^b &= \tilde{m}_1 ; m_{31}^b = \tilde{m}_j ; \\ m_{13}^b &= \tilde{m}_1 ; m_{31}^b = \tilde{m}_j ; K_{13}^b = \tilde{P}_{1j} ; \sum_i P = \tilde{P}_1 ; \sum_j P = \tilde{P}_j \end{aligned} \quad (4.5.2.2.13)$$

Flydebetingelser:

Idet momentfeltet er lineært er det tilstrækkeligt at opstille flydebetingelserne i hvert hjørne for hvert element, hvadenten betingelserne (4.4.8) eller de lineariserede flydebetingelser, (4.4.20), anvendes.  $\tilde{m} = (m_x, m_y, m_{xy})^T$  findes af  $F$  ved (4.5.2.2.5) og (4.5.2.2.11).

Flydebetingelserne giver altså her anledning til opstilling af  $3 \times 8 \times n$  lineære restriktioner.

Ved grænseovergang til uendelig fin elementinddeling fås:

$$\begin{aligned} \text{antal parametre: } n &= 9 \times n_e \approx 9 \times 2 \times (\text{antal knuder}) \\ \text{antal ligevægtsligninger: } m &\leq 1 \times (\text{antal knuder}) + 3 \times (\text{antal sider}) - 3 \\ &\approx (1 + 3 \times 3) \times (\text{antal knuder}) - 3 \end{aligned}$$

således at:

$$\frac{n}{m} + \frac{18}{10} = 1.8 \quad (4.5.2.2.14)$$

For det lineære element med kontinuitet i vridningsmomentet fås tre parametre pr. knude og en ligevægtsligning pr. knude, d.v.s.

$$\frac{n}{m} = 3$$

Som nævnt er statisk ligevægt dog ikke opfyldt, se endvidere afsnit 7.2.3.

fordelte belastninger:

Ved benyttelse af det virtuelle arbejdes princip udledes de til (4.3.1) svarende differentialligninger udtrykte i det lokale skævvinklede koordinatsystem, se Veubeke og Sander [68.4].

$$\left. \begin{aligned} -\frac{\partial m_x}{\partial x} - \frac{\partial m_{xy}}{\partial y} + q_x &= 0 \\ -\frac{\partial m_y}{\partial y} - \frac{\partial m_{xy}}{\partial x} + q_y &= 0 \\ \frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y} + p \sin \alpha &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (4.5.2.2.15)$$

og hermed:

$$\frac{\partial^2 m_x}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 m_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 m_y}{\partial y^2} = -p \sin \alpha$$

En løsning til (4.5.2.2.15) er:

$$\tilde{m}_p = (m_{xp}^-, m_{xyP}^-, m_{yP}^-)^T \quad (4.5.2.2.16)$$

hvor:

$$\left. \begin{aligned} m_{xp}^- &= -\frac{1}{6} p a^2 \sin \alpha (1 - \frac{\bar{x}}{a}) \frac{\bar{x}}{a} \\ m_{xyP}^- &= \frac{1}{6} p \sin \alpha \times \bar{x} \times \bar{y} \\ m_{yP}^- &= -\frac{1}{6} p b^2 \sin \alpha (1 - \frac{\bar{y}}{b}) \frac{\bar{y}}{b} \end{aligned} \right\} \quad (4.5.2.2.17)$$

Dette momentfelt giver anledning til følgende randkræfter, se Veubekke og Sander [68.4], idet der anvendes samme opstilling som i (4.5.2.2.8):

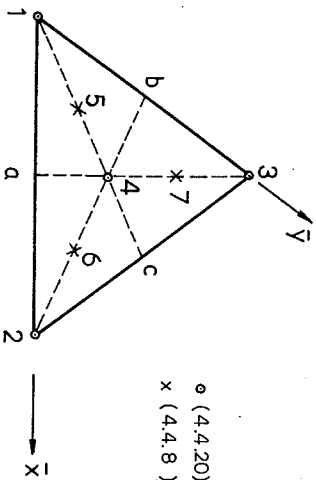
$$\bar{K}_P^e = (0, 0, 0, 0, 0, \frac{1}{6} pbs \sin \alpha, \frac{1}{6} p \sin \alpha, \frac{1}{6} p(ab/c) \sin \alpha, 0, 0, 0)^T \quad (4.5.2.2.18)$$

D.v.s. erstattes  $\bar{m}$  som givet ved (4.5.2.2.5-7) med  $\bar{m} + \bar{m}_P$ , hvor  $\bar{m}_P$  er givet ved (4.5.2.2.16-17) og erstattes randkræfterne  $\bar{K}^e$  givet ved (4.5.2.2.8-10) med  $\bar{K}^e + \bar{K}_P^e$ , hvor  $\bar{K}_P^e$  er givet ved (4.5.2.2.18) i ligevægtsligningerne fås et statisk tilladeligt momentfelt, når blot den fordelte belastning er konstant over hvert element.

Da momentfeltet ikke mere er lineært, er det ikke tilstrækkeligt at opstille flydebetingelserne i elementets hjørner. Som for det rektangulære element, REKT 2, kan vælges yderligere at opstille restriktionerne i elementets tyngdepunkt, hvor:

$$\bar{m} = \frac{1}{3}(\bar{m}_1 + \bar{m}_2 + \bar{m}_3) + (-\frac{a^2}{18}, \frac{ab}{18}, -\frac{b^2}{18})^T \cdot p \sin \alpha \quad (4.5.2.2.19)$$

For den fundne løsning kan flydebetingelserne (4.4.8) check'es i et finere net og løsningen proportioneres eventuelt for overholdelse af flydebetingelserne i alle checkpunkter, se figur 4.5.2.2.4.



o (4.4.20) OPSTILLES  
x (4.4.8) CHECK'ES

Check/opstilling af flydebetingelser for TREK 2.  
Figur 4.5.2.2.4

5. OPTIMERINGSPROBLEMET FOR JERNBETONPLADER

I afsnit 3.2.2 blev bæreevnebestemmelsen efter plasticitetsteoriens nedre værdimethode i det generelle tilfælde opstillet som et lineært programmeringsproblem ved (3.2.2.9).

En umiddelbar udvidelse heraf er at kombinere en given hvillende belastning udtrykt ved  $\bar{F}^g$  og en bevægelig belastning udtrykt ved lastfordelingen  $\bar{F}^\lambda$  og lastfaktoren  $\lambda$ . Ligevægtsligningerne kan da opskrives som:

$$\bar{K} \times \bar{F} = \bar{F}^g + \lambda \times \bar{F}^\lambda \quad (5.1)$$

Det tilhørende lineære programmeringsproblem lyder da:

Find  $\bar{F}$  og  $\lambda$  således at  
 $\lambda$  maksimeres, og der gælder

$$\left. \begin{aligned} K_{ij} F_j - \lambda \times F_i^\lambda &= F_i^g \\ \lambda \times R_{\lambda j} F_j &\leq R_{\lambda}^0 \end{aligned} \right\} \quad (5.2)$$

$i = 1, \dots, NS$  ;  $j = 1, \dots, NF$  ;  $\lambda = 1, \dots, N\lambda$

Tilsvarende blev dimensioneringsproblemet i det generelle tilfælde givet ved (3.2.2.15). Lad os gentage dette her:

Find  $\bar{F}$  og  $D$  således at

$z = c_k^T D_k$  minimeres, og der gælder

$$\left. \begin{aligned} K_{ij} F_j &= F_i^y \\ R_{\lambda j}^1 F_j + R_{\lambda k}^2 D_k &\leq R_{\lambda}^0 \\ h_n^0 - h_{nk} D_k &\leq 0 \end{aligned} \right\} \quad (5.3)$$

$i = 1, \dots, NS$  ;  $j = 1, \dots, NF$  ;  $k = 1, \dots, ND$  ;  $\lambda = 1, \dots, N\lambda$  ;  
 $n = 1, \dots, ND_0$

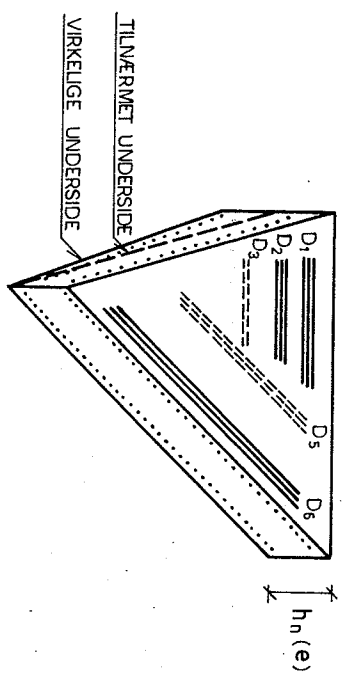
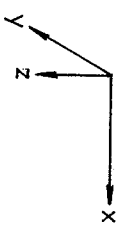
I forrige kapitel blev angivet, hvorledes de statiske ligevægtstilgninger tillige med de lineariserede flydebetingelser blev opstillet for forskellige elementtyper.

Vi vil nu specielt se på, hvordan objektfunktionen dannes for dimensioneringsopgaven, hvordan ønskede restriktioner for de valgte design-variable behandles og hvordan selve det formulerede lineære programmeringsproblem behandles numerisk idet berevnebestemmelsen og design-problemet løses analogt.

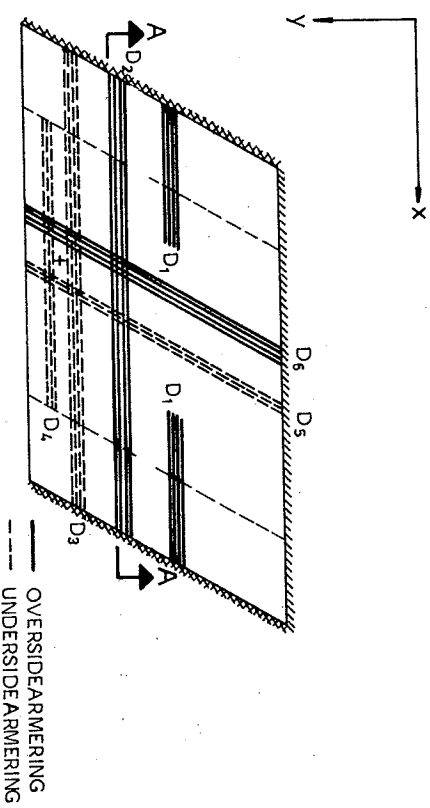
5.1 Design-variable, objektfunktion

Betondimensionerne forudsættes givne, således at samtlige design-variable udgøres af et på forhånd valgt antal jernarealer.

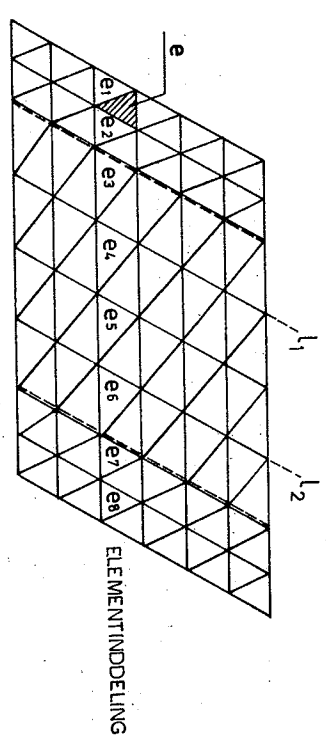
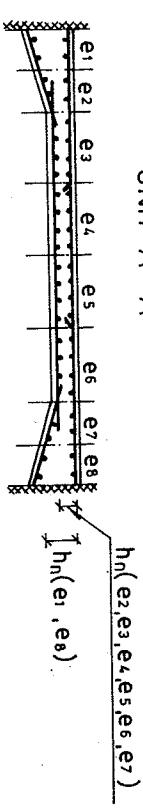
Princippet i opstilling af objektfunktionen samt bestemmelsen af de plastiske momenter ud fra disse jernarealer illustreres ved et eksempel. På figur 5.1.2 er vist en plade med seks designvariable. Lad os betragte element nr.  $e$ , se figur 5.1.1.



Jern-variable for element  $e$   
Figur 5.1.1



SNIT A - A



Designvariable for konstruktion.  
Figur 5.1.2

I dette afsnit benyttes undtagelsesvist betegnelserne  $c$ ,  $h$  og  $h_n$  med betydninger som i afsnit 4.2, se (4.2.1-4).

Som design-variable for elementet vælges:

$$\underline{d}^e = (m_{FX}^0, m_{FY}^0, m_{FX}^u, m_{FY}^u, m_{FXY}^u)^T \quad (5.1.1)$$

Disse findes udtrykte ved de globale design-variable ved (3.2.2.10):

$$d_i^e = E_{ij}^e D_j \quad (5.1.2)$$

I henhold til antagelse (XII) i afsnit 4.2 samt ved benyttelse af formlerne (4.4.5), se figur 4.4.4, fås her:

$$\left. \begin{aligned} E_{1j}^e &= c^0(h_n(e)) \times \delta_j^{e0} \times \cos^2 \alpha_j \\ E_{2j}^e &= c^0(h_n(e)) \times \delta_j^{e0} \times \sin^2 \alpha_j \\ E_{3j}^e &= c^0(h_n(e)) \times \delta_j^{e0} \times \cos \alpha_j \sin \alpha_j \\ E_{4j}^e &= c^u(h_n(e)) \times \delta_j^{eu} \times \cos^2 \alpha_j \\ E_{5j}^e &= c^u(h_n(e)) \times \delta_j^{eu} \times \sin^2 \alpha_j \\ E_{6j}^e &= c^u(h_n(e)) \times \delta_j^{eu} \times \cos \alpha_j \sin \alpha_j \end{aligned} \right\} (5.1.3)$$

I (5.1.3) angiver gentagelse af index ikke summation. Konstanterne,  $c^0(h_n(e))$  for oversidearmering og  $c^u(h_n(e))$  for undersidearmering, beregnes i henhold til (4.2.1-4) ud fra benyttede materialekonstanter og aktuelle betondimensioner. Konstanterne kan naturligvis variere for de forskellige armeringslag.

I (5.1.3) gælder endvidere:

$$\delta_j^{e0}(\delta_j^{eu}) = \begin{cases} 0 & \text{hvis armering } D_j \text{ ikke findes i overside} \\ & \text{(underside) af element } e. \\ 1 & \text{hvis armering } D_j \text{ findes i overside (underside)} \\ & \text{af element } e. \end{cases}$$

på denne måde kan de lineære flydebetingelser for hvert element udtrykkes ved de valgte designparametre og elementets momentfelt, de statiske parametre.

Endvidere kan i dimensioneringsopgaven let medtages tilfælde, hvor en del af armeringen er fastlagt på forhånd. Dette udtrykkes blot ved opskrivning af de dertil hørende konstante bidrag til de plastiske momenter i (4.4.21-22). På denne måde kan f.eks. en forudbestemt revnearmering tages i regning, idet vi så blot bestemmer brudundersøgelens eventuelle krav om ekstraarmering. Dette kan dog også gøres mere eksplicit ved angivelse af minimumsgrænser for jernarealerne, hvorved den samlede armering således bestemmes, se afsnit 5.2.

I de generelle udtryk for de lineariserede flydebetingelser, (3.2.1.24):

$$\phi_j^e = -b_0^j e - b_1^j e d_1^e + b_k^j e Q_k^e \quad (5.1.4)$$

bliver således her, idet flydebetingelserne (4.4.20) benyttes og bidragene til de plastiske momenter fra eventuelle givne armeringsstørrelser benævnes  $m_{FX,0}^0$  etc.:

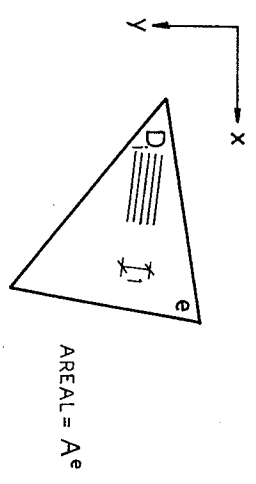
$$b_0^j e = \begin{bmatrix} m_{FX,0}^u + m_{FXY,0}^u \\ m_{FX,0}^u - m_{FXY,0}^u \\ m_{FY,0}^u + m_{FXY,0}^u \\ m_{FY,0}^u - m_{FXY,0}^u \\ m_{FX,0}^0 + m_{FXY,0}^0 \\ m_{FX,0}^0 - m_{FXY,0}^0 \\ m_{FY,0}^0 + m_{FXY,0}^0 \\ m_{FY,0}^0 - m_{FXY,0}^0 \end{bmatrix} \quad (5.1.5)$$



$$d_{1e}^j = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.1.6)$$

medens  $b_{1e}^j$  er givet ved (4.4.22).

Ved den valgte dimensionerings-angivelse bestemmes objektfunktionens konstanter, kostkoefficienter, let. Ved betragtning af figur 5.1.3 fås:



Elements bidrag til objektfunktionen.  
 Figur 5.1.3

$$z = \sum_1^{ne} (\delta_1^{eo} + \delta_1^{eu}) D_1 \times A^e = c_1 D_1 \quad (5.1.7)$$

5.2 Eksplisitte dimensionskrav

Forudbestemte krav til jernarealerne, som således ikke er afhængige af de statiske forhold i brudstadiet, kan angives eksplicit på følgende måde:

$$\left. \begin{aligned} h_n^o - h_{nk} D_k &\leq 0 \\ n &= 1, \dots, NDO ; h = 1, \dots, ND \end{aligned} \right\} (5.2.1)$$

På denne måde kan behandles armeringer bestemte ved andre beregninger som f.eks. brugsstadieregninger.

Ved optimering i forbindelse med successiv beregning af forskellige belastningstilfælde kan denne form også benyttes. Ud fra det (eller de) tidligere beregnede belastningstilfælde vælges de dertil hørende bestemte armeringer som minimum i den efterfølgende beregning af nyt belastningstilfælde. Den herved bestemte armering er dog ikke nødvendigvis optimal, alle lasttilfælde betragtede under ét, se afsnit 5.4.

Adskillige andre praktiske forhold kan behandles på denne måde. En af disse kan være eksplicit angivelse af den mængde undersidaermering, der ønskes opbukket i en given afstand fra understøtningen. Lad os som eksempel tage den på figur 5.1.2 viste plade.

Lad os antage, at jernene  $D_4$  i undersiden skal ligge i hele pladens længde og at en tredjedel af disse jern skal opbukkes i linjerne  $\lambda_1$  og  $\lambda_2$  som vist på figur 5.1.2. Denne opbukkede armering udgør al ekstra oversidaermering ved indspændingerne. Indføres en ny variabel,  $D_7$ , for den totale undersidaermering i områderne fra  $\lambda_1$  ( $\lambda_2$ ) til indspændingerne kan det ønskede arrangement udtrykkes eksplicit ved:

$$\begin{aligned} D_1 - \frac{1}{3} D_4 &= 0 \\ D_7 - D_3 - \frac{2}{3} D_4 &= 0 \end{aligned}$$

Herved er antallet af uafhængige designvariable for den viste plade reduceret til fem.

Restriktionerne (5.2.1) behandles i selve optimeringen analogt til flydebetingelserne. For simplificering af det efterfølgende vil

(5.2.1) blive forudsat indeholdt i:

$$R_{kj}^1 F_j + R_{k1}^2 D_1 \leq R_k^0$$

$k = 1, \dots, N_0 + N_D$ ;  $j = 1, \dots, N_F$ ;  $i = 1, \dots, N_D$

(5.2.2)

5.3 Løsning af LP-problemet

Indbygges de eksplícitte dimensioneringskrav i flydebetingelsesrestriktionerne får (5.2) og (5.3) samme udseende. Dette ses ved indførelse af et fælles variabelsæt,  $\tilde{x}$ , hvor:

$$\begin{aligned} \text{ved bæreevnebestemmelse: } \tilde{x} &= \begin{bmatrix} F_i \\ \lambda \end{bmatrix} \\ \text{ved dimensionering: } \tilde{x} &= \begin{bmatrix} F_i \\ D_i \end{bmatrix} \end{aligned}$$

(5.3.1)

Herved kan de lineære programmeringsproblemer skrives som:

$$\text{maksimer } z = c_j x_j$$

$$\text{under hensyn til } a_{ij}^1 x_j = a_i^1$$

$$\text{og } a_{kj}^2 x_j \leq a_k^2$$

(5.3.2)

For bæreevnebestemmelse er:

$$c = (0, \dots, 1)$$

$$a^1 = (R_i - \tilde{F}^1) ; a_0^1 = \tilde{F}^0$$

$$a^2 = (R_i^1, 0) ; a_0^2 = R^0$$

(5.3.3)

For dimensionering er:

$$c = (0, \dots, 0, c_{NF+1}, \dots, c_{NF+ND})$$

$$c_{NF+1} \text{ er lig } -c_1 \text{ givet ved (5.1.7)}$$

$$\begin{aligned} a^1 &= (R, 0) & a_0^1 &= \tilde{F}^0 \\ a^2 &= (R^1, R^2) ; a_0^2 &= R^0 \end{aligned}$$

(5.3.4)

Den numeriske behandling bliver således ens for de to problem-klasser.

Under visse betingelser (d.v.s. efter passende omformninger til opfyldelse af disse betingelser), se Appendix, kan (5.3.2) løses direkte ved simplex-strategi, for hvilken algoritmer er udviklede.

Ved opdeling af løsningsproceduren i to dele, idet ligheds- og ulig-hedsrestriktionerne behandles hver for sig, kan opnås en besparelse i regnetid. Dette vises overslagsmæssigt i det følgende.

Restriktionsmatrixerne,  $a^1$  og  $a^2$ , vil normalt være dominerede af nul-elementer, idet den enkelte statiske ligevægtsligning eller flydebetingelse ifølge elementinddelingen kun vil omfatte få variable.

Iad os betegne forholdet mellem antallet af elementer forskellige fra nul og det totale antal elementer i  $a^1$  og  $a^2$  med  $\alpha$ . Antages nu, at regnetiden for et problem med tætheden  $\alpha_0$ , antal restriktioner  $m_0$  og antal variable  $n_0$  er bestemt til  $t_0$ , da vil regnetiden for et problem med dimensionerne  $\alpha$ ,  $m$  og  $n$  være:

$$t \approx t_0 \times \frac{\alpha}{\alpha_0} \times \left(\frac{m}{m_0}\right)^2 \times \frac{n}{n_0}$$

(5.3.5)

Ovenstående formel har vist sig at være nogenlunde gyldig for almindelige lineære programmeringsproblemer.

På grund af det ret store antal flydebetingelser, der må opstilles (se afsnit 4.5), vil for (5.3.2) gælde, at  $m$  er stor i forhold til  $n$ .

Af afsnit 4.5 fremgår, at der for de der betragtede elementer gælder omtrentligt:

$$NF \sim 2 \times NS$$

$$N_0 \sim 3 \times NF \sim 6 \times NS$$

Da antallet af designvariable normalt vil være forsvindende i forhold til antallet af statiske parametre gælder tilnærmelsesvist for

såvel (5.2) som for (5.3):

antal variable :  $n \approx NF$

antal restriktioner:  $m \approx NS + Np \approx 3,5 \times NF$

d.v.s.

$$\frac{m}{n} \sim 3.5$$

(5.3.6)

Problemløsningen opdeles derfor i to dele:

1) Elimination af afhængige variable:

a) I ligningssystemet i (5.3.2):

$$a^1 x = a^0$$

(5.3.7)

har  $a^1$  dimensionerne (NS, NF), dog (NS, NF + 1) ved bare-  
evnebestemmelse.

Af (5.3.7) kan således udskilles et antal afhængige variable,  
idet vi indskrænker os til betragtning af problemer, for  
hvilke (5.3.7) har uendelig mange løsninger.

Adskillelse af  $x$  i afhængige variable,  $x_a$ , og uafhængige  
variable,  $x_u$ , kan foretages ved en rangmetode for hvilken  
der eksisterer effektive algoritmer. En nærmere beskrivelse  
af metoden kan ses hos Householder [65.3] eller Robinson  
[73.4].

Først bestemmes rangen,  $np$ , af  $a^1$ . Her kan indtræffe for-  
skellige tilfælde, se [65.3] og [73.4], men lad os her antage,  
at der ikke er modsættende ligninger i (5.3.7), således at  
der bestemmes en rang  $np \leq NS$ . De herved udskilte afhængige  
variable opstilles i den  $np$ -dimensionale vektor:  $x_a$ , og  
de uafhængige variable opstilles i den  $(NF(+1) - np)$ -dimensio-  
nale vektor  $x_u$ .

Idet  $x_a^0$  er en partikulær løsning til (5.3.7) fås:

$$x_a = a^0 x_u + x_a^0$$

(5.3.8)

Den ved rangmetoden bestemte matrix,  $a^0$ , har dimensionerne  
( $np$ ,  $NF(+1) - np$ ).

b) I de øvrige restriktioner, flydebetingelserne, indsættes  
(5.3.8) hvorved fås:

$$a^2 x = a_u x_u + a_0^3, \text{ d.v.s. ulighedsrestriktionerne ændres}$$

til:

$$a_u x_u \leq a_0^2 - a_0^3 = a_0$$

(5.3.9)

c) I objektfunktionen indsættes (5.3.8), hvorved denne ændres  
til:

$$z = c x = c_u x_u + z_0$$

(5.3.10)

2) Løsning af duale LP-problem:

LP-problemet givet ved (5.3.2) er nu reduceret til:

$$\text{maksimer: } z = c_u x_u$$

(5.3.11)

$$\text{under hensyn til } a_u x_u \leq a_0$$

Her gælder tilnærmelsesvist:

$$\text{antal variable: } n \approx NF - NS \sim \frac{1}{2} \times NF$$

$$\text{antal restriktioner: } m = Np \approx 3 \times NF$$

Der kan således drages fordel af at løse det til (5.3.11) hør-  
rende duale problem. Først indføres ikke-negative variable for  
de statiske parametre ved:

$$x_{ui}^1 = x_{ui} + x_{ui}^0$$

(5.3.12)

hvor transformationskonstanterne,  $x_{ui}^0$ , vælges ud fra proble-  
mets natur. Herved fås LP-problemet:

maksimer:  $z = c_u X_u$

under hensyn til :  $a_{ui} X_u \leq a_i$  (5.3.13)

og :  $X_{ui} \geq 0$

Det tilhørende duale problem lyder:

minimer:  $z = \tilde{a}_0 Y$

under hensyn til :  $\tilde{a}_{ui} Y \geq c_u$  (5.3.14)

og :  $Y_i \geq 0$

(5.3.14) giver samme optimale værdi af objektfunktionen som (5.3.13) og af den fundne løsning,  $Y^{Opt}$ , kan  $X_u^{Opt}$  let findes.

Ved elimination af de afhængige variable, (5.3.8), forøges tætheden i restriktionsmatricen. Beregnede eksempler viser, at forøgelsen er af størrelsesordenen  $\alpha \approx 8 \times \alpha_0$ .

Vi kan nu beregne et skøn over den herved sparede regnetid:  $t_0 - t$ , hvor:

for  $t_0$  gælder:  $n \approx NF$  ;  $m \approx 3.5 \times NF$  ;  $\alpha = \alpha_0$

for  $t$  gælder:  $n \approx 3 \times NF$  ;  $m \approx 0.5 \times NF$  ;  $\alpha \approx 8 \alpha_0$

Heraf fås:

$$t \approx t_0 \times \frac{8\alpha_0}{\alpha_0} \left( \frac{0.5 \times NF}{3.5 \times NF} \right)^2 \left( \frac{3 \times NF}{NF} \right) \sim t_0 \times 0.5$$

altså besparelse i regnetid  $\sim 50\%$ .

Til  $t$  skal naturligvis lægges den tid, der benyttes ved omformning af LP-problemet, (5.3.2) + (5.3.14), samt den tid der benyttes til beregning af  $X_u^{Opt}$  og hermed  $X^{Opt}$  ud fra den fundne  $Y^{Opt}$ . Til brug ved sidstnævnte beregning må matricen  $\tilde{a}^0$  i (5.3.8) gemmes under løsningen af det duale problem.

Alt i alt er der dog fundet en væsentlig reduktion af problemet ved benyttelse af rangmetoden og efterfølgende løsning af det duale problem.

5.4 Behandling af flere belastningstilfælde

Lad os betragte designopgaven og antage, at konstruktionen ønskes dimensioneret for  $n$  forskellige belastningstilfælde (evt.  $n_1$  enkelttilfælde og  $n_2$  deraf bestemte kombinationer med givne partialkoefficienter,  $n = n_1 + n_2$ ).

Ved dimensionering for de tilhørende elastiske snitkraftfordelinger beregnes umiddelbart den maksimale påvirkning for snittet og der dimensioneres herfor. Anvendes plasticitetsteorien bør påvirkningerne for hvert belastningstilfælde betragtes særskilt for maksimal udnyttelse af konstruktionens plastiske egenskaber. Her skal nævnes tre metoder for en sådan mere eller mindre særskilt behandling af belastningerne.

5.4.1 Successiv beregning

Belastningstilfældene behandles ét efter ét. Det, der skønnes at give de største påvirkninger tages først og så fremdeles.

Ved optimering for det enkelte tilfælde betragtes armeringer bestemte ved forudgående beregninger som givne, således at blot eventuel tillægsarmering bestemmes som beskrevet i afsnit 5.2.

5.4.2 Samtidig beregning, tilnærmet optimum

For det  $i$ 'te lasttilfælde fås ligningssystemet:

$$\tilde{K} \times \tilde{F} = \tilde{S}^{X,i} \tag{5.4.2.1}$$

Heri elimineres de afhængige variable. Ved umiddelbar omskrivning af (5.3.8) fås:

$$\tilde{F}_a = \tilde{K}^0 \times \tilde{F}_u + \tilde{F}^{0,i} \tag{5.4.2.2}$$

Flydebetingelserne bliver:

$$R^1 \times \tilde{F} + R^2 \times \tilde{D} \leq R^0, \text{ eller}$$

$$R_{u,u}^1 + R_a^1 (\tilde{K}^0 \times \tilde{F}_u + \tilde{F}^{0,i}) + R^2 \times \tilde{D} \leq R^0, \text{ eller}$$

$$(R_u^1 + R_a^1 \times \tilde{K}^0) \times \tilde{F}_u + R^2 \times \tilde{D} \leq R^0 - R_a^1 \times \tilde{F}^{0,i}$$

Med andre indlysende betegnelser fås:

$$R_u \times \tilde{F}_u + R^2 \times \tilde{D} \leq R^{0,i} \tag{5.4.2.3}$$

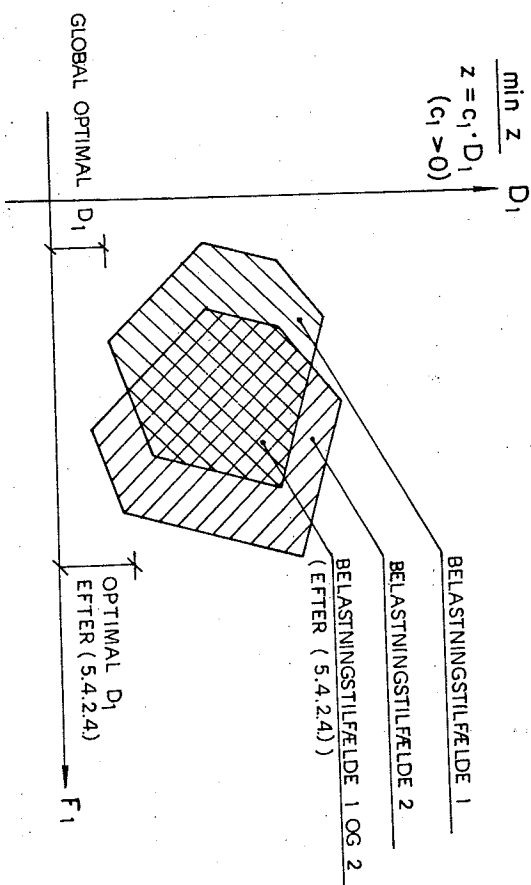
Anvendes (5.4.2.2) for alle lasttilfælde og beregnes for hver af disse  $R^{0,i}$ ,  $i = 1, \dots, n$ , bliver resultatet i optimeringsproblemet blot  $n$  forskellige højresider  $i$  (5.4.2.3):  $R^{0,i}$ ,  $i = 1, \dots, n$ .

Heraf ses, at der bestemmes et sikkert statisk tilladeligt spændingsfelt, alle lasttilfælde betragtede, ved løsning af optimeringsproblemet med restriktionerne:

$$R_u \times \tilde{F}_u + R^2 \times \tilde{D} \leq R_j^{\min} \tag{5.4.2.4}$$

hvor

$$R_j^{\min} = \min(R_j^{0,1}, R_j^{0,2}, \dots, R_j^{0,n}) \tag{5.4.2.5}$$



Tilnærmet optimum ved flere belastningstilfælde.

Figur 5.4.2.1

Den herved bestemte løsning vil dog sjældent være optimal i global henseende, idet der for alle lasttilfælde er antaget samme løsning for de uafhængige variable.

Dette ses umiddelbart ved betragtning af eksemplet vist på figur 5.4.2.1, hvor  $F_u$  er antaget endimensionel,  $F_1$ , og der blot er én design-variabel,  $D_1$ .

5.4.3 Samtidig beregning, global optimum

Det globale optimum i henhold til den lineære model fås ved løsning af:

$$\begin{aligned} &\text{minimer } z = c_k D_k \\ &\text{under hensyn til: } R^1_{TOT} \times F^1_{TOT} + R^2_{TOT} \times D \leq R^0_{TOT} \end{aligned} \quad (5.4.3.1)$$

hvor  $R^1_{TOT}$ ,  $F^1_{TOT}$ ,  $R^2_{TOT}$  og  $R^0_{TOT}$  forklares ved opstillingen:

$$\begin{bmatrix} R_u & 0 & \dots & 0 & 0 & R^2 & R^2 \\ 0 & R_u & \dots & 0 & 0 & R^2 & F_u^1 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & R_u & 0 & R^2 & F_u^n \\ 0 & 0 & \dots & \vdots & \vdots & D & F_u \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} R^0_{TOT} \\ R^0_{TOT} \\ \vdots \\ R^0_{TOT} \end{bmatrix}$$

Dette lineære programmeringsproblem opstilles ved blot én bestemmelse af  $R^0_{TOT}$ ,  $R_u$  og  $R^2_{TOT}$ . For hvert belastningstilfælde skal blot bestemmes  $F_u^i$ , se (5.4.2.2), samt heraf  $R^0_{TOT}$ .

Optimeringsproblemet vokser dog hurtigt med antallet af lasttilfælde som det ses af (5.4.3.1). Hermed vil regnetiden vokse stærkt, hvilket fremgår af (5.3.5).

Et ganske analogt tilfælde fås ved bestemmelse af bæreevnen for en plade påvirket af en lastgruppe med n forskellige positioner.

For løsning af disse problemer kan der muligvis drages fordele af restriktionsmatrixens specielle struktur, se (5.4.3.1). Forfatteren er dog ikke bekendt med eksistensen af en til dette problem special egnet algoritme.

5.5 Eventuel proportionering af løsning

Som tidligere nævnt kan der ikke (teoretisk set) sikres et sikkert statisk tilladeligt momentfelt ved opstilling af flydebetingelserne i et endeligt antal punkter for elementet REKT 2. Det samme gælder der for TREK 2, når fladelastrast medtages.

Overskridelse af betingelserne inden for visse grænser må dog anses for at være acceptabel ved praktiske anvendelser, når de øvrige "sikre" tilnærmelser førende til den lineære model tages i betragtning.

Ønskes mindre overskridelser af flydebetingelserne end den fundne løsning måtte afsiøre ved checking af flydebetingelserne, (4.4.8), i et finere net, se figur 4.5.1.2.3 og 4.5.2.2.4, må foretages en proportionering af løsningen. En sådan kan udføres på uendelig mange måder. Der gives ikke nogen opskrift for en generel fremgangsmåde. Den bedst egnede metode vil være afhængig af elementtype samt det aktuelle pladeproblem. Nogle metoder skal dog nævnes i det følgende.

5.5.1 Ensartet proportionering

Flydebetingelserne, (4.4.8), opstilles i alle kontrolpunkter med den fundne løsning indsat. Er betingelserne ikke opfyldte, d.v.s.  $\varphi_1$  og/eller  $\varphi_2 > 0$ , bestemmes en reduktionsfaktor for bæreevnen,  $(1-\beta)$ . Beregningerne af  $\beta$  er analoge for tilfælde, hvor  $\varphi_1 > 0$  som for tilfælde, hvor  $\varphi_2 > 0$ . Lad os antage, at  $\varphi_1 > 0$  i checkpunktet.  $\beta$  findes da af:

$$-(m_{FX}^u - (1-\beta)m_X)(m_{FY}^u - (1-\beta)m_Y) + (m_{FXY}^u - (1-\beta)m_{XY})^2 = 0 \quad (5.5.1.1)$$

Af denne lignings to rødder vælges den mindste værdi, hvor  $\beta > 0$ . For alle herved undersøgte punkters eventuelt beregnede  $\beta$ -værdier bestemmes den største:  $\beta_{max}$ . Multipliseres det ved optimeringen bestemte momentfelt med  $(1-\beta_{max})$  fås herved et (iflg. det udvidede antal punkter, hvori flydebetingelserne er overholdte) sikkert statisk tilladeligt momentfelt for lastfaktoren  $(1-\beta_{max}) \times \lambda$ .

Denne metode er velegnet ved bæreevnebestemmelser, hvor hele belastningen er proportionalt voksende. Metoden kan ligeledes anvendes ved

dimensionering i tilfælde hvor ingen armeringsstørrelser er givne på forhånd (d.v.s.  $b_0^j = 0$  i (5.1.5)). Samtlige design-variable forøges med faktoren  $(1+\beta)$ . Er der fundet, at  $\varphi_1 > 0$  kan  $\beta$  bestemmes af:

$$-((1+\beta)m_{FX}^u - m_x^u)(1+\beta)m_{FY}^u - m_y^u + ((1+\beta)m_{FXY}^u - m_{xy}^u)^2 = 0 \quad (5.5.1.2)$$

Metoden bør kun anvendes ved beregninger, hvor fladelasten for de enkelte elementer er af samme størrelsesorden. I tilfælde, hvor koncentrerede kræfter behandles som fladelaste samt i tilfælde med søjleunderstøttede elementer kan metoden dog stadig anvendes, når blot de lineære flydebetingelser yderligere opstilles i de såkaldte "checkpunkter" før optimeringen.

Ved bæreevnebestemmelser for belastninger, hvor denne er givet i visse områder og proportionalt voksende i andre kan de lineære restriktioner opstilles i "checkpunkter" for elementer for hvilke fladelasten er givet, medens (5.5.1.1) kun bringes i anvendelse i områder, hvor belastningen er proportionalt voksende. En analog fremgangsmåde kan benyttes ved dimensionering af plader, for hvilke armeringen er givet i visse områder.

### 5.5.2 Elementvis proportionering

Ved praktiske anvendelser af automatisk dimensionering kan man i mange tilfælde være interesseret i den maksimale belastning, der kan optages ud fra det bestemte design og så herudfra foretage den endelige dimensionering. Eller man vil være interesseret i en given plades maksimale bæreevne tilhørende en lastfordeling beregnet ud fra optimeringen og som evt. afviger lidt fra den givne lastfordeling.

Til disse beregninger kan anvendes mange fremgangsmåder. Vi vil i det følgende betragte en metode, for hvilken momenterne langs elementrandene ikke ændres ved proportioneringen, d.v.s. flydebetingelserne er stadig opfyldte i opstillings-punkter beliggende på elementrandene.

For checkpunkterne beregnes kun reduktionsfaktorer for fladelasten,  $p_x$  og  $p_y$  for REKT 2 og  $p$  for TRRK 2, idet de plastiske momenter betragtes som givne.

### REKT 2

Ud fra de lokale koordinater til checkpunktet beregnes konstanterne  $k_x$ ,  $k_y$ , se (4.5.1.2.2-3), således at

$$m_x = m_x^0 + k_x p_x$$

$$m_y = m_y^0 + k_y p_y$$

(5.5.2.1)

$$m_{xy} = m_{xy}^0$$

Lad os antage at  $\varphi_1 > 0$ .  $\beta$ -værdien for checkpunktet bestemmes af:

$$-(m_{FX}^u - m_x^0 - (1-\beta)k_x p_x)(m_{FY}^u - m_y^0 - (1-\beta)k_y p_y) + (m_{FXY}^u - m_{xy}^0)^2 = 0 \quad (5.5.2.2)$$

Ud fra resultatet i alle checkpunkter for et element bestemmes den maksimale  $\beta$ -værdi, hvorefter elementets fladelast kan beregnes.

Efter at de reducerede værdier,  $(1-\beta)p_x$  og  $(1-\beta)p_y$ , er bestemte for samtlige elementer beregnes tilhørende linjelaste langs elementrandene ved hjælp af (4.5.1.2.5-6) (eventuelle koncentrerede kræfter i knuderne forbliver som før, idet  $m_{xy}$  ikke ændres).

### TRRK 2

I checkpunktet opstilles ved hjælp af (4.5.2.2.5-7) og (4.5.2.2.16-17):

$$m_x = m_x^0 + k_x \times p$$

$$m_y = m_y^0 + k_y \times p$$

$$m_{xy} = m_{xy}^0 + k_{xy} \times p$$

Antages igen at  $\varphi_1 > 0$  bestemmes checkpunktets  $\beta$ -værdi ved:

$$-(m_{FX}^u - m_x^0 - (1-\beta)k_x p)(m_{FY}^u - m_y^0 - (1-\beta)k_y p) + (m_{FXY}^u - m_{xy}^0 - (1-\beta)k_{xy} p)^2 = 0 \quad (5.5.2.3)$$

Bestemmelse af hvert elements fladelast sker som for REKT 2. Herefter

beregnes de resulterende linjelaste langs elementrandene ved (4.5.2.2.8-10) og (4.5.2.2.18).

### 5.5.3 Proportionering af jernarealer

Vi betragter dimensioneringsproblemet, hvori visse armeringsstørrelser er givne på forhånd. Det forudsættes, at flydebetingelserne blev opstillede i alle punkter for elementer hvor armeringen var fuldstændigt fastlagt i enten oversiden eller undersiden (evt. i begge sider). Den følgende proportioneringsundersøgelse omfatter alene elementer hvori en del af armeringen for såvel over- som underside afhænger af de beregnede jernarealer (design-variable).

Lad os antage, at der i et checkpunkt er fundet  $\varphi_1 > 0$ . Alle designvariable der har indflydelse på  $m_{FX}^u$  - værdierne i elementet proportioneres med  $(1 + \beta)$ , hvor  $\beta$  findes af:

$$-(m_{FX,0}^u + (1 + \beta)E_{4j}^E D_j - m_X) (m_{FY,0}^u + (1 + \beta)E_{5j}^E D_j - m_Y) + (m_{FXY,0}^u + (1 + \beta)E_{6j}^E D_j - m_{XY})^2 = 0 \quad (5.5.3.1)$$

$E_{1j}^E$  er givet ved (5.1.3).

Af de i samtlige checkpunkter af pladen således bestemte  $\beta$ -værdier beregnes den største,  $\beta_{\max}$ .

For den givne belastning er brudsikkerheden således i orden i henhold til det udvidede antal punkter, hvori flydebetingelserne er sikrede overholdte, hvis jernarealerne vælges som  $(1 + \beta_{\max}) \times D_1$ .

## 6. RESULTATER VED NEDREVÆRDIMETODEN

på basis af den i kapitel 5 beskrevne fremgangsmåde er udført numeriske beregninger for forskellige pladeformer. Beregningerne er udført på IBM SYSTEM/360, NEUCC, Danmarks tekniske Højskole, København.

Til automatisk generering af LP-problemet samt til behandling af den optimale løsningsvektor er udviklet EDB-programmer i PL/I-sprog.

Til elimination af afhængige variable i ligningssystemet (statistiske ligevægtsligninger) er benyttet IBM's SYSTEM/360 SSP (Scientific Subroutine Package)-programmerne MFRG og MIG, se [69.6].

Til løsning af LP-problemet er anvendt IBM's Matematiske Programmerings System, MPS/360, se [69.7].

For dette system har været anvendt såvel version V2 - M10 som V2 - M11. Ved beregnede eksempler er fundet, at regnetiden ved anvendelse af V2 - M11 versionen har været betydeligt mindre end regnetiden ved V2 - M10 versionen.

Ved diskretiseringen er anvendt pladeelementerne REKT 2 og TREK 2, se afsnit 4.5.1.2 og 4.5.2.2. For REKT 2 er forudsat kontinuitet i de vridende momenter, hvilket som sagt er et unødvendigt krav iflg. plasticitetsteorien.

For nogle beregningers vedkommende har været benyttet dobbeltpræcision ved opstilling af LP-problemet og ved behandling af løsningsvektoren. Der er herved ikke fundet afvigelse fra løsningerne bestemte ved hjælp af enkeltpræcision.

Der er ved proportioneringen af den fundne optimale løsning, i tilfælde med fiadelaste, blevet benyttet metoden som beskrevet i afsnit 5.5.1, d.v.s. ensartet proportionering.

For nogle af de herefter viste løsninger er draget sammenligninger med andre numeriske løsninger, for hvilke de anvendte metoder vil blive omtalt i kapitel 7.

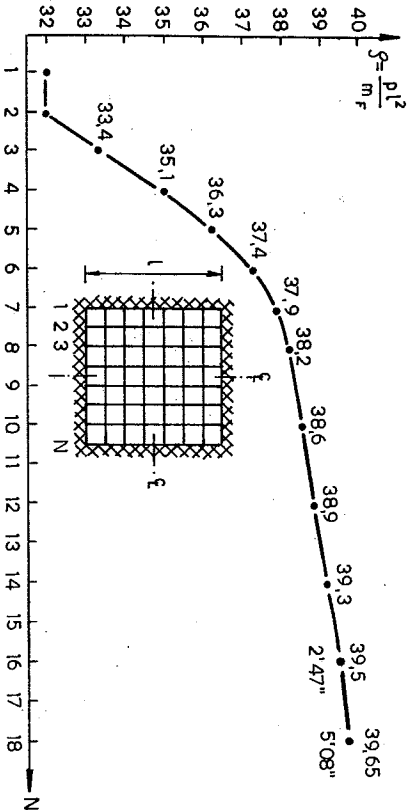
Der er ved samtlige beregnede eksempler anvendt/forudsat orthogonal armering (orthotrope plader).



6.1 Kvadratisk indspændt plade

Det klassiske eksempel: bestemmelse af brudlasten for den isotrope kvadratiske plade med fast indspændte sider og belastet med jævnt fordelt fladbelast,  $p$ , er undersøgt ved anvendelse af REKT 2.

Resultaterne er viste på figur 6.1.1. Ved værdien  $\rho = \frac{p l^2}{M_F}$ , hvor  $M_F$  er pladens flydemoment og  $l$  er sidelængden. Pladen er inddelt i kvadratiske elementer. Finheden er givet ved  $N$  som fremgår af figuren. For  $N > 8$  er symmetrien udnyttet, idet der blot er regnet på en fjerdedel af pladen.



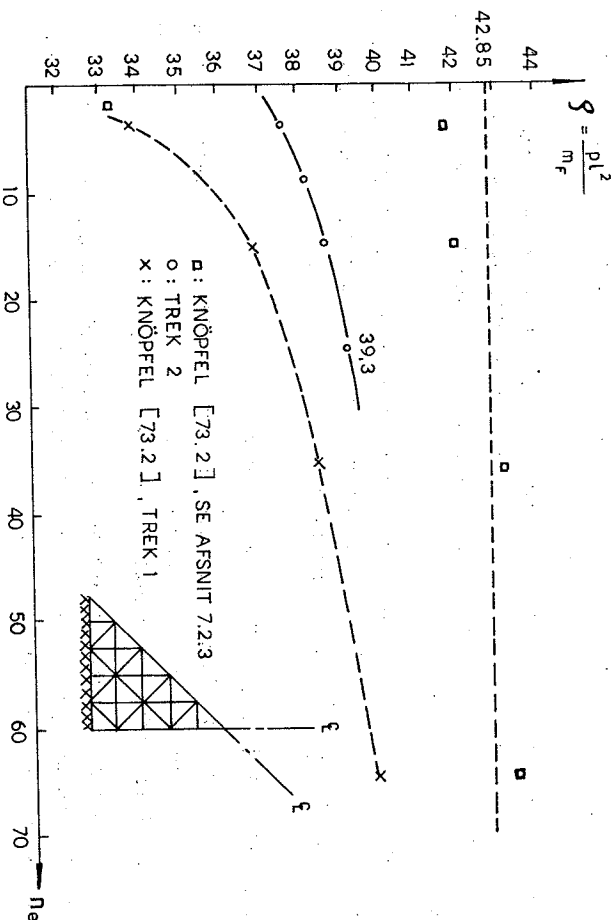
Kvadratisk indspændt plade beregnet ved REKT 2.

Figur 6.1.1

For pladen med  $16 \times 16$  elementer fordeler den totale regnetid, 2 minutter og 47 sekunder, sig på  $1' 29''$  til løsning af IP-problemet og  $1' 18''$  til opstilling af IP-problemet og efterbehandling af løsningsvektoren.

For opdelingen med  $18 \times 18$  elementer er fordelingen  $3' 25''$  og  $1' 43''$ . Problemet har f.eks. ved elementopdelingen  $14 \times 14$  (resultat  $\rho = 39,3$ ) været løst ved anvendelse af MPS/360 version V2 - M10. Her var den totale regnetid  $7' 31''$  med fordelingen  $5' 8''$  og  $1' 23''$ .

En nedreværdi for brudlasten er også beregnet med det lineære trekantelement, TREK 2. Ved udnyttelse af symmetri er der blot beregnet en ottendedel af pladen. Resultaterne er viste på figur 6.1.2, hvor  $n$  er antallet af elementer for den beregnede pladedel.



Kvadratisk indspændt plade beregnet ved hjælp af trekantelementer.

Figur 6.1.2

Regnetiden for pladen opdelt i  $8 \times 25$  elementer var  $6' 50''$  ved MPS/360 version V2 - M10. For de beregnede eksempler var forholdet mellem beregnet værdi af  $\rho$  og regnetid nær den samme som for REKT 2. Knöpfell [73.2] har ved benyttelse af de samme lineære flydebetingelser bestemt nedreværdiløsninger som også er viste på figur 6.1.2. Knöpfell benyttede den blandede formulering, se afsnit 7.3, for trekantelementet med konstant momentfelt, TREK 1, og lineært flytningsfelt. Her ved er den jævnt fordelte belastning dog akvivaleret med koncentrerede knudekræfter, se afsnit 4.5.2.1. Knöpfell har endvidere bestemt tilnærmede nedreværdier, som viste på figur 6.1.2, ved benyttelse af et tre-

kantelement med lineært momentfelt og kontinuitet i de vridende momenter, se afsnit 7.2.3.

Endvidere kan nævnes, at Chan [72.9] har bestemt nedreværdien  $\rho = 41,78$  ved hjælp af ikke-lineær programmering, se afsnit 7.2.1. Her var regnetiden dog meget større selv for  $\rho$ -værdier mindre end de her ved lineær programmering fundne.

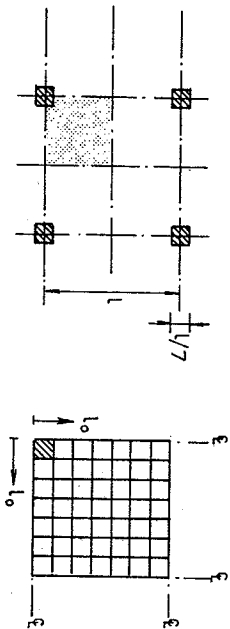
Der fås naturligvis samme resultat for  $\rho$  ved en dimensionering, hvor armeringsarrangementet vælges til at skulle bestå af ens net i over- og underside og med samme jernarealer i såvel x- som y-retningen.

Pladeproblemet blev først løst eksakt i 1974 af Fox [74.5], der fandt resultatet  $\rho = 42,851$ . Benyttes brudlinieteorien og skønnes diagonalerne at være de eneste brudlinier fås  $\rho = 48,0$ .

### 6.2 Indre felt af padderhat-konstruktion

For et indre pladefelt af en padderhat-konstruktion med søjleafstanden  $l$  i begge retninger, se figur 6.2.1, er den samlede armering minimumret for forskellige forudvalgte arrangementer.

Beregningerne er udførte med REKT 2. Ved udnyttelse af symmetri er der blot regnet på en fjerdedel af pladefeltet. Søjleværnsnittet er kvadratisk med sidelængden  $l/7$ .



Indre pladefelt beregnet ved REKT 2.

Figur 6.2.1

Idet samtlige elementer tildelles de samme designvariable (homogen armering i hele pladefeltet) er bestemt følgende resultater:

Designvariable:

Resultat:

a)  $D_1$

$$m_F = 0,0685 p l^2$$

$$m_{FX}^u = m_{FY}^u = m_F^o = m_{FY}^o = m_F$$

b)  $D_1, D_2$

$$m_F^u = 0,1370 p l^2; m_F^o = 0$$

$$m_{FX}^u = m_{FY}^u = m_F^u \sim D_1$$

eller:

$$m_{FX}^o = m_{FY}^o = m_F^o \sim D_2 \quad m_F^u = m_F^o = 0,0685 p l^2$$

c)  $D_1$

$$m_F^u = 0,1370 p l^2$$

$$m_{FX}^u = m_{FY}^u = m_F^u \sim D_1$$

$$m_{FX}^o = m_{FY}^o = 0$$

Der er således i alle tre tilfælde fundet samme armeringsmængde.

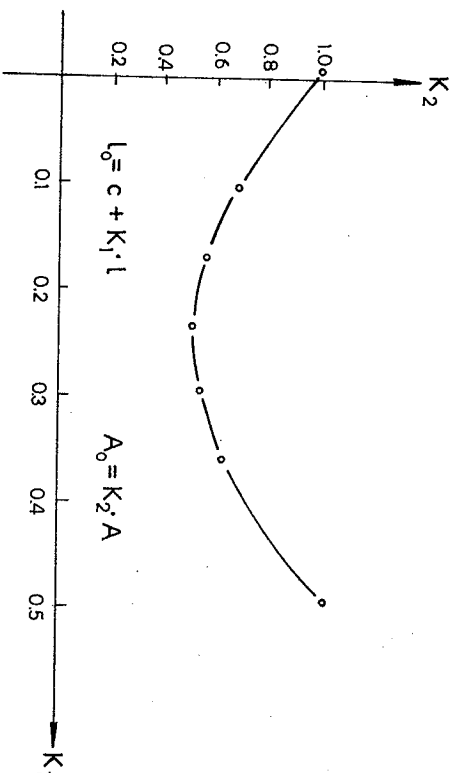
Løsningen i a) svarer til  $\rho = \frac{p l^2}{m_F} = 13,9$ . Ved beregning af samme eksempel har Wolfensberger [64.4]  $m_F$  bestemt værdien  $\rho = 13,0$ . Knøpfelli [73.2] har ved anvendelse af et "blandet" trekantelement med lineære moment- og flytningsfelter bestemt værdien  $\rho = 18,9$ , der dog ikke er nogen sand nedreværdi. Der synes for dette problem at være stor spredning for de i litteraturen givne løsninger. Johansen [49.1] angiver brudlinieløsningen  $\rho = 17,6$ .

Med trekantelementet, TREK 1, fandt Knøpfelli nedreværdien  $\rho = 11,6$ , idet søjleaktionen tilnærmedes med en koncentreret knudekraft ( $\rho = 4 \times \pi$ ).

Endvidere er beregnet minimum for det samlede armeringsforbrug i tilfælde, hvor undersidearmeringen er homogen i hele pladefeltet medens oversidearmeringen er begrænset til et kvadrat med sidelængden  $2 l_0$  over søjlen,  $l_0$  frengår af figur 6.2.1.

Idet  $l_0 = c + K_1 \times l$ , hvor  $c$  er radius i cirklen, der har samme areal som søjleværnsnittet, er for forskellige værdier af  $K_1$  fundet de tilhørende minima af det totale armeringsforbrug,  $A_0$ .

De fundne resultater er viste på figur 6.2.2, hvor  $K_2 = A_0/A$ ,  $A$  er armeringsmængden i det homogene tilfælde.



Samlet armering ved begrænset oversidearmering.

Figur 6.2.2

Af beregningerne er således fundet, at minimum opnås for  $l_0 \sim c + 0,23 \times l$ , hvor  $A_0 \sim 0,5 \times A$ . Ved denne løsning er fundet, at jernarealet for oversidearmeringen er ca. 4 gange så stor som for undersidearmeringen. Johansen [49.1] angiver ved brudlinieberegninger, at  $l_0$  bør være  $c + 0,3 \times l$ .

### 6.3 Rektangulær plade med enkeltkraft

For den på figur 6.3.1. viste simpelt understøttede, rektangulære plade er bærevnen beregnet. Pladens dimensioner tillige med de tillidne givne armering hørende plastiske momenter fremgår af figur 6.3.1.a. Foruden egenvægten,  $6,5 \text{ KN/m}^2$ , påvirkes pladen i midtpunktet af en koncentreret kraft. For denne bestemmes en nedre værdi.

Bærevnen er beregnet ved hjælp af elementet REKT 2 med elementinddelingen vist på figur 6.3.1.b. Enkeltkraften er behandlet som fladelast over elementet med arealet  $(2 \times 0,115) \times (2 \times 0,115)$ . Resultatet var  $p = 608,7 \text{ KN/m}^2$  svarende til  $P = 32,2 \text{ KN}$ .

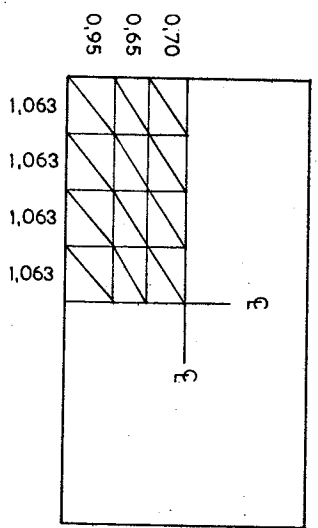
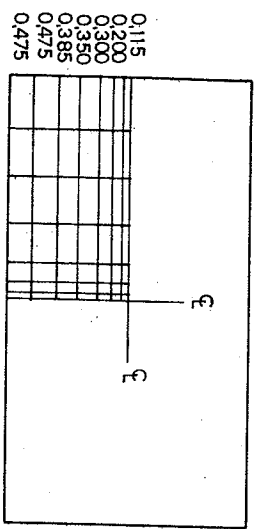
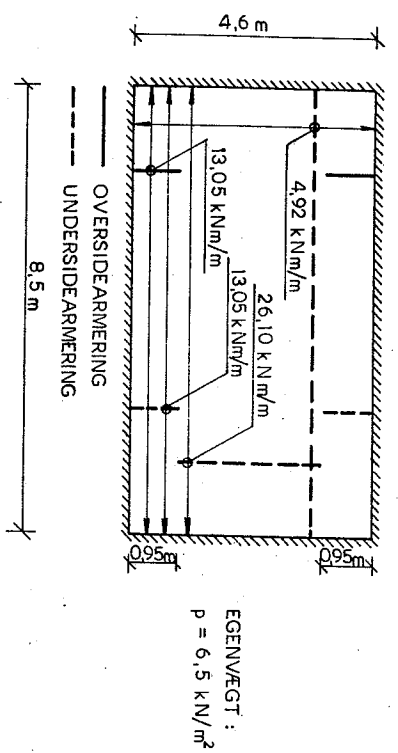
Ved hjælp af trekantelementet, TRBK 2, med den på figur 6.3.1.c viste elementinddeling og med egenvægten behandlet som linjelaste langs elementrandene er bestemt værdien  $P = 28,3 \text{ KN}$ .

### 6.4 Andre pladeformer

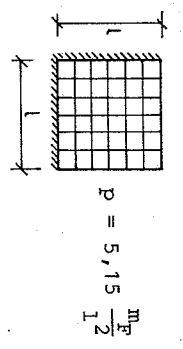
Bærevnen er bestemt for forskellige pladeformer, viste på figur 6.4.1. Der er i hvert tilfælde anvendt elementet REKT 2. Elementinddelingen fremgår af figuren tillige med de beregnede værdier. For alle eksempler er pladen isotrop og med samme armering i under- og overside. Det plastiske moment er  $m_p$ .

Til de beregnede værdier skal knyttes følgende kommentarer:

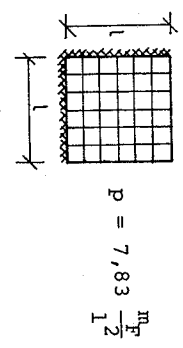
- a: For denne har Nielsen [64.5] beregnet nedreværdien  $4,5 \frac{m_p}{l^2}$  og angivet øvre værdien  $5,5 \frac{m_p}{l^2}$ .
- b: Johansen [49.1] har givet øvre værdien  $8,53 \frac{m_p}{l^2}$ .
- c: Denne er beregnet eksakt af Prager [52.2], der fandt  $24,0 \frac{m_p}{l^2}$ .
- d: Wolfensberger [64.4] har ved samme elementinddeling fundet værdien  $120,0 \frac{m_p}{l^2}$ .
- e: En nedreværdi er givet af Wood [61.2]:  $p = 8 \frac{1}{1+1^2} \times (1 + \frac{1}{1^2} + \frac{1}{1^2})$ . For siderforholdet  $\frac{1}{1} = 0,5$  har Bäcklund [73.11] i stedet for faktoren 8 fundet nedreværdien 7,73 og øvre værdien 8,12.



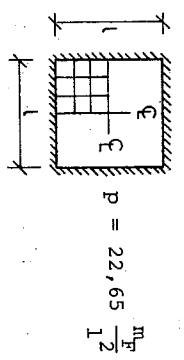
Rektangulær plade med enkeltkraft.  
Figur 6.3.1



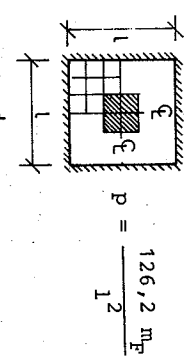
a



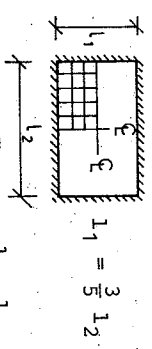
b



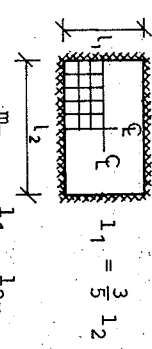
c



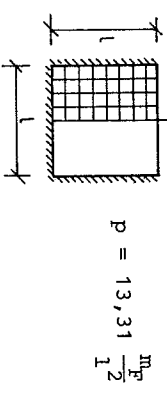
d



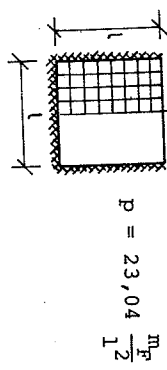
e



f



g



h

Isotrope plader med jævnt fordelt belastning.  
Figur 6.4.1

f: Johansen [43.1] angiver en værdi på den sikre side af brud-

linieteorien formeludtryk til  $8 \frac{M_P}{1r^2} (1 + \frac{1}{2r} + \frac{1}{4r^2})$ , hvor  $1r = 1_1/\sqrt{2}$  og  $1_2r = 1_2/\sqrt{2}$ .

g: Nielsen [64.5] har bestemt nedreværdien  $13,0 \frac{M_P}{2}$ . En approximationsformel af Johansen [43.1] for en øvre-værdi giver  $14,0 \frac{M_P}{2}$ .

h: For denne har Nielsen [64.5] bestemt nedreværdien  $18,0 \frac{M_P}{2}$  medens Johansens [43.1] approximationsformel i tilfaldet  $1$  med indspænding giver  $28,0 \frac{M_P}{2}$ .

#### 6.5 Bemærkninger til resultaterne

De her viste resultater samt resultater fra andre forskningsarbejder fører til en konklusion, som gives i kapitel 8, angående den bedst egnede metode for en sikker og rational automatisk beregningsmetode for jernbetonplader.

Man må her tage i betragtning, at alternativet til en sådan metode for beregninger i praksis næppe vil være sådanne analytiske eller numeriske beregningsmetoder som er udviklede for de "dyrkede" regulære pladeformer. Alternativerne for en mere irregulær plade vil ofte være brudlinieberegninger eller andre simplificerede metoder eller blot beregninger efter elasticitetsteorien.

### 7. ANDRE OPTIMERINGSMETODER FOR JERNBETONPLADER

Der er i tidens løb udviklet mange optimeringsmetoder for plader. Såvel bæreevnebestemmelses- som designproblemet er behandlet af adskillige.

Ralrige optimeringsmetoder finder anvendelse ved rent elastiske beregninger. Her skal kun omtales metoder, der bygger på plasticitetsteorien.

Der opdeles naturligt i analytiske- og numeriske optimeringsmetoder.

#### 7.1 Analytiske optimeringsmetoder

Adskillige forfattere har ved analytiske metoder søgt at bestemme minimum for den totale armeringsmængde, der er nødvendig i en plade med given geometri og med en given belastning. Der er naturligvis ad denne vej kun behandlet simple pladeformer så som rektangulære- og aksesymmetriske plader, som dog må siges at udgøre en ikke uvæsentlig del af benyttede pladeformer i praksis. De herved fundne resultater har ringe direkte interesse ved praktiske beregninger. Der er dog ad denne vej opnået værdifulde resultater set i relation til de i praksis anvendte metoder for jernlagning.

De benyttede metoder er for størstepartens vedkommende baserede på Drucker og Shields [57.1] minimum-vægt-kriterium for konstruktioner af stift ideal-plastisk materiale. Dette kriterium siger, at det mindste materialeforbrug, der er nødvendig for optagelse af en given belastning, fås hvis det indre plastiske arbejde pr. arealenhed er konstant for hele konstruktionen i dennes brudtilstand.

Ved denne metode har Worley [66.2] bestemt den minimale armering i simpelt understøttede rektangulære og cirkulære plader. Lowe og Melchers [71.5] fandt resultater for andre pladeformer og Melchers [76.2] undersøgte plader med variabel tykkelse. Mroz [67.5] behandlede cirkulære plader for hvilke såvel jernarealerne som betondimensionerne kunne variere.

Worley [70.4] og [77.1] har på lignende måde behandlet plader påvirket af såvel momenter som membrankræfter. Endelig kan nævnes, at Nielsen [71.6] har udledt formler for den nødvendige armering i skal-

elementer med givne snitkræfter.

Metoderne og de deraf opnåede resultater skal ikke kommenteres nærmere her. Henvisninger til relevante arbejder kan fås i en litteraturoversigt givet af Rozwany og Hill [76.3], hvori også nævnes eksempler på metoder til analytisk bestemmelse af brudlasten for givne plader.

### 7.2 Numeriske Optimeringsmetoder

Langt de fleste udviklede numeriske optimeringsmetoder omhandler bæreevnebestemmelsen. Der anvendes oftest diskretisering ved finite element efter principper som givet i denne afhandlings kapitel 3. Som regel er såvel nedre- som øvregrænsemetoden repræsenterede i samme numeriske beregningsmetode, idet der drages parallelitet mellem ekstremalprincippernes og de tilhørende LP-problemers dualiteter.

I mange tilfælde anvendes alene selve ekstremalmetodens fremgangsmåde, medens der gøres visse tilnærmelser for dennes grundlag. I de følgende afsnit vil ekstremalmetoderne ved sådanne anvendelser blive nævnt i anførselstegn.

#### 7.2.1 Ikke-lineære nedregrænsemetoder

Benyttes de korrekte flydebetingelser (4.4.8) eller (4.4.1) for orthotrope plader bliver det til nedregrænsemetoden hørende optimeringsproblemer ikke-lineært. Problemet form bliver som udtrykt generelt ved (3.2.2.8) for bæreevnebestemmelsen og som (3.2.2.12) for dimensionsringsopgaven. For begges vedkommende kan de afhængige variable elimineres ved rangmetoden idet ligningssystemet forudsættes lineært.

For jernbetonplader vil en mulig løsning for optimeringsproblemet være en sand nedregrænse, hvis momentfeltet for elementet er enten konstant eller lineært (konvekse flydebetingelser). Er momentfeltet af højere orden kan der ikke sikres et sikkert tilladeligt momentfelt ved opstilling af de korrekte flydebetingelser i et endeligt antal punkter.

En mulig løsningsmetode for optimeringsproblemet er straffunktionsmetoden. Også andre ikke-lineære optimeringsmetoder så som gradientmetoden, mulige retnings metode og sekventiel lineær programmering (se henvisninger for dem i afsnit 1.2) kan måske være anvendelige. Man kan dog ikke for disse metoder i samme grad, som det er tilfældet

med lineær programmering, forudsige anvendeligheden ud fra det aktuelle optimeringsproblems matematiske karakter. Mulige anvendelser i praksis må bygge på numeriske undersøgelser af metoderne ved praktiske eksempler, idet såvel regnetiden som selve beregningsresultatet må tages i betragtning.

Straffunktionsmetoden har været benyttet til bestemmelse af bæreevnen for plader. Chan [72.9] bestemte herved bæreevnen for isotrope jernbetonplader. Momentfeltet blev givet ved en partikulær løsning i ligevægt med den ydre belastning overlejret med et momentfelt genereret af trekantelementer med konstant momentfelt og i ligevægt uden ydre belastning. Hodge og Belytschko [68.2] betragtede plader med Von Mises' flydebetingelse. Momentfeltet blev genereret ved inddeling i rektangulære elementer, for hvilke variationen antoges at være kvadratisk.

I begge ovenstående arbejder er fundet gode nedregrænseløsninger for visse pladeformer. Resultaterne synes dog at vise, at der må anvendes lang regnetid for opnåelse af rimelige resultater. Løsningsmøjsagtigheden er endvidere stærkt afhængig af elementinddelingens finhed omend resultaterne tyder på god konvergens. Endvidere afsløres numeriske vanskeligheder ved løsning af mere komplekse problemer.

Endelig skal nævnes, at Koopmann og Lance [65.2] har benyttet differensmetoden til bestemmelse af nedregrænseløsninger. Flydebetingelserne opstilledes i netpunkterne. For den opnåede optimale løsningsvektor var flydebetingelserne dog væsentligt overskredne i mellemliggende punkter, således at resultaterne efter nødvendig proportionering ofte var ubrugbare. Endvidere viste det sig at være vanskeligt at programmere metoden til anvendelse for generelle pladeproblemer.

7.2.2 Øvrerærdimetoder ~ Mechanismemetoden

I afsnit 3.2.1 blev øvrerærdimetodens anvendelse ved numerisk beregning af bærevnen ved hjælp af lineær programmering formuleret generelt. I det følgende gives principperne for en mulig fremgangsmåde for jernbetonplader. Kun det principielle skal beskrives ved elementære betragtninger.

Lad os indskrænke os til kun at betragte trekantelementer, og lad konstruktionens flytningsfelt være givet ved knudeflytningerne som parametre, idet der forudsættes lineær variation for nedbøjningsfunktionen over elementerne.

Elementets geometriske forhold beskrives i et lokalt  $\bar{x}$ - $\bar{y}$ -system som vist på figur 7.2.2.1. Elementets flytningsfelt kan da udtrykkes ved:

$$w(\bar{x}, \bar{y}) = \frac{\Delta_1^e}{\Delta^e} w_1^e \quad (7.2.2.1)$$

hvor  $\Delta_1^e$  og  $\Delta^e$  fremgår af figur 7.2.2.1.

Af (7.2.2.1) ses, at der i pladen kun kan forekomme koncentrerede generaliserede tøjninger ( $k_x = 2k_{xy} = k_y = 0$ ), og at disse optræder på elementrandene.

De koncentrerede generaliserede tøjninger, vinkeldrejninger, tildeles da bekvemt elementrandene på samme måde som de bøjende momenter for trekantelementet med konstant momentfelt, TREK 1, se figur 4.5.2.1.2.

Der benyttes følgende betegnelser: antal sider  $\sim nr$ , antal knuder  $\sim nk$  og antal elementer  $\sim ne$ .

Til bestemmelse af vinkeldrejningerne ud fra knudeflytningerne,  $\vec{w} = (w_1, w_2, \dots, w_{nk})^T$ , vil vi først betragte hvert element for sig.

De til et element hørende flytninger benævnes  $\vec{w}^e = (w_1^e, w_2^e, w_3^e)^T$ . De hertil hørende vinkeldrejninger benævnes  $\vec{\alpha}^e = (\alpha_1^e, \alpha_2^e, \alpha_3^e)^T$ , se figur 7.2.2.1.

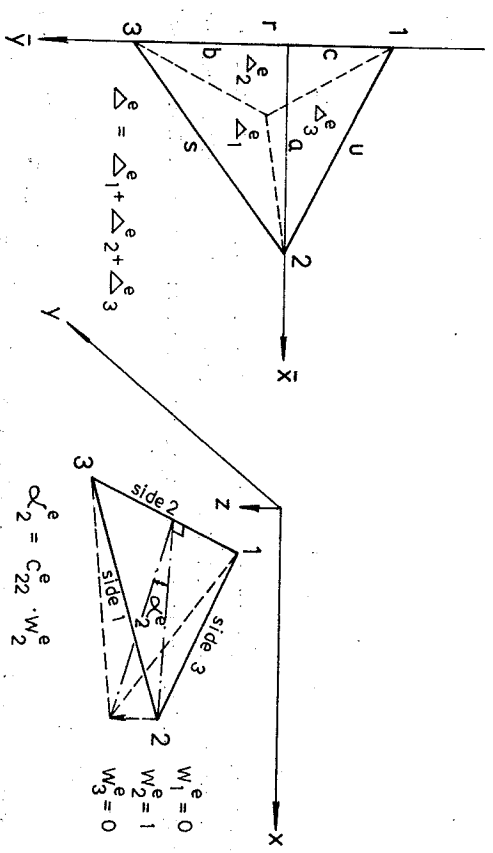
Ved rent geometriske betragtninger fås:

$$\vec{\alpha}^e = \vec{c}^e \vec{w}^e \quad (7.2.2.2)$$

hvor

$$\vec{\alpha}^e = \begin{bmatrix} -s/ar & b/as & -(bc - a^2)/ars \\ b/ar & -1/a & c/au \\ -(bc - a^2)/aru & c/au & -u/ar \end{bmatrix} \quad (7.2.2.3)$$

D.v.s.  $\vec{\alpha}^e = (\vec{k}^e)^T$ ,  $\vec{k}^e$  givet i (4.5.2.1.9).



Kinematisk forhold for trekantelement.   
 Figur 7.2.2.1

Sammenhængen mellem et elements lokale knudeflytninger og de globale knudeflytninger (relation mellem lokale og globale knudenumre) opskrives ved (se (3.2.1.2)):

$$\vec{w}^e = \vec{H}^e \times \vec{w} \quad (7.2.2.4)$$

Endvidere gives sammenhængen mellem elementets lokale sidenumre og de globale sidenumre ved elementinddelingen på en form svarende til momentrelationen for TREK 1, se (3.2.2.2) og (4.5.2.1.10):

$$\vec{m}^e = \vec{G}^e \times \vec{F} \quad (7.2.2.5)$$

Idet samtlige totale vinkeldrejninger opstilles i vektoren  $\hat{\varrho} = (\hat{\varrho}_1, \dots, \hat{\varrho}_{nr})^T$  kan denne findes af:

$$\hat{\varrho} = \sum_1^{ne} (\hat{G}^e)^T \times \hat{\varrho}^e = \sum_1^{ne} (\hat{G}^e)^T \times (\hat{K}^e)^T \times \hat{H}^e \times \hat{W}$$

eller

$$\hat{\varrho} = \hat{C} \times \hat{W} \quad (7.3.3.6)$$

hvor

$$\hat{C} = \sum_1^{ne} ((\hat{H}^e)^T \times \hat{K}^e \times \hat{G}^e)^T \quad (7.2.2.7)$$

For at simplificere fremstillingen indskrænkes til behandling af orthotroppe plader for hvilke flydebetingelserne (4.4.2) anvendes. Der må da skelnes mellem positive og negative vinkeldrejninger. Hertil opdeles i

$$\hat{\varrho} = \hat{\varrho}^+ - \hat{\varrho}^-$$

$$\text{hvor } \hat{\varrho}_1^+ \geq 0, \hat{\varrho}_1^- \geq 0 \text{ og for hvert } i: \hat{\varrho}_1^+ \times \hat{\varrho}_1^- = 0 \quad (7.2.2.8)$$

De plastiske momenter antages konstante langs hver rand. De positive plastiske momenter,  $s_r \times m_{Tp}^u$ , hvor  $s_r$  er sidelængden og  $m_{Tp}^u$  bestemmes ved (4.4.3), opstilles svarende til  $\hat{\varrho}$  i vektoren  $\hat{M}_{Pr}^u$ , de negative i  $\hat{M}_{Pr}^o$ . Idet det bøjende moment langs randen  $r$  iflg. (4.4.2) må være lig  $M_{Pr}^u$  for  $\theta_r > 0$  og lig  $M_{Pr}^o$  for  $\theta_r < 0$  fås for det indre plastiske arbejde:

$$\Delta I = (\hat{M}_{Pr}^u)^T \times \hat{\varrho}^+ + (\hat{M}_{Pr}^o)^T \times \hat{\varrho}^- \quad (7.2.2.9)$$

For belastning med koncentrerede kræfter i knuderne alene, for hvilken lastfordelingen udtrykkes ved  $(\hat{F}^Y)^T$ , bliver det ydre arbejde:

$$\Delta Y = \lambda (\hat{F}^Y)^T \times \hat{W} \quad (7.2.2.10)$$

For at opnå beregninger med endelige deformationer opstilles betingelsen:

$$(\hat{F}^Y)^T \times \hat{W} = 1 \quad (7.2.2.11)$$

hvorved fås det lineære programmeringsproblem til bestemmelse af bæreevnen:

Find  $\hat{\varrho}^+$ ,  $\hat{\varrho}^-$ ,  $\hat{W}$  og  $\lambda$  således at

$$\lambda = (\hat{M}_{Pr}^u)^T \times \hat{\varrho}^+ + (\hat{M}_{Pr}^o)^T \times \hat{\varrho}^- \text{ bliver minimum}$$

og der gælder:  $\hat{C} \times \hat{W} - \hat{\varrho}^+ + \hat{\varrho}^- = 0$

$$\text{og } (\hat{F}^Y)^T \times \hat{W} = 1$$

} (7.2.2.12)

Samtlige frie variable i (7.2.2.12) udgøres af knudeflytningerne  $\hat{W}$  og lastfaktoren  $\lambda$ . Metoden er således blot en automatisering af brudlinieteorien, idet brudfigurerne genereres automatisk ved hjælp af parametrene  $W_i$ ,  $i = 1, \dots, nk$ . Løsningen bliver en sand øvregrænse. Det bemærkes, at kun elementets kinematiske forhold, lineært flytningsfelt, indgår i optimeringsproblemet.

Lad os betragte elementet med konstant momentfelt, TREK 1, og lad os antage, at dette er belastet med knudekræfter alene.

De statiske ligevægtsligninger opstilles med den her anvendte terminologi. Ligevægtsligningerne i de frie knuder lyder, idet (4.5.2.1.9) benyttes for elementknudekræfterne,  $\hat{p}^e$ :

$$\lambda \times \hat{F}^Y = \sum_1^{ne} (\hat{H}^e)^T \times \hat{p}^e = \sum_1^{ne} (\hat{H}^e)^T \times \hat{K}^e \times \hat{m}^e$$

$$= \left[ \sum_1^{ne} (\hat{H}^e)^T \times \hat{K}^e \times \hat{G}^e \right] \times \hat{F}$$

eller

$$\hat{K} \times \hat{F} = \lambda \times \hat{F}^Y \quad (7.2.2.13)$$

hvor

$$\hat{K} = \sum_1^{ne} (\hat{H}^e)^T \times \hat{K}^e \times \hat{G}^e \quad (7.2.2.14)$$



Heraf ses, at ligningsmatricen,  $K$ , er lig den transformerede kompartabilitetsmatrix:  $K = \tilde{C}^T$ .

Opstilles flydebetingelserne (4.4.2) for hver rand i stedet for de otte lineære flydebetingelser pr. element fås det til "nedreværdi-metoden" hørende optimeringsproblem:

Find  $\tilde{F}$  og  $\lambda$  således at

$\lambda$  bliver maximum,

og der gælder:  $K \times \tilde{F} - \lambda \times \tilde{P}^Y = 0$

$$\tilde{F} + M_D^O \geq 0$$

$$-\tilde{F} + M_D^U \geq 0$$

(7.2.2.15)

De hermed angivne lineære programmeringsproblemer, (7.2.2.12) og (7.2.2.15), opstilles i standardskema som følger:

	$1$	$m_{p1}$	$\dots$	$m_{pnr}$	$\lambda$
$\lambda =$	$0$	$0$	$\dots$	$0$	$1$
$n_k$	$0$	$0$	$\dots$	$0$	$\tilde{P}^Y$
	$0$	$0$	$\dots$	$0$	$\geq 0$
$n_r$	$0$	$0$	$\dots$	$0$	$\tilde{P}^Y$
	$0$	$0$	$\dots$	$0$	$\geq 0$
$n_r$	$0$	$0$	$\dots$	$0$	$\tilde{P}^Y$
	$0$	$0$	$\dots$	$0$	$\geq 0$

(7.2.2.15)

Primale LP-problem. "Nedreværdimetoden".

	$1$	$0$	$\dots$	$0$	$\dots$	$0$
$n_k$	$0$	$0$	$\dots$	$0$	$\dots$	$0$
$n_r$	$0$	$0$	$\dots$	$0$	$\dots$	$0$
$n_r$	$0$	$0$	$\dots$	$0$	$\dots$	$0$

(7.2.2.12)

Duale LP-problem. "Øvre værdimetoden".

De opstillede LP-problemer er hinandens duale problemer. D.v.s. (7.2.2.12) og (7.2.2.15) giver samme løsning.

I formuleringerne er ikke medtaget de gældende randbetingelser for dels knudeflytningerne i (7.2.2.12), dels de statiske parametre i (7.2.2.15). Det viser sig at også med disse medtaget bevares dualitet i LP-problemerne. For nærmere behandling heraf henvises til Knöpfung [73.2] og Munroe og Fonseca [78.2].

Ved løsning af øvre værdiproblemet, (7.2.2.12), fås således et statisk tilladeligt momentfelt. Dog vil de korrekte flydebetingelser sædvanligvis ikke være overholdte. Momentfeltet er altså næppe et sikkert statisk tilladeligt felt.

Opstilles LP-problemet efter nedreværdimetodens fremgangsmåde, (7.2.2.15), fås heller ikke et sikkert statisk tilladeligt momentfelt, idet opstilling alene af flydebetingelsen, (4.4.2), ikke er tilstrækkeligt. Vi kan således heraf udlæde det interessante resultat, at der ved benyttelse af trekantelementet, TREK 1, kan produceres såvel sande øvre- som sande nedreværdiløsninger udelukkende ved anvendelse af nedreværdimetodens fremgangsmåde. Ekstremal-løsningens art vil alene afhænge af de valgte flydebetingelsesrestriktioner.

Ovenstående afspejler en analogi til de to kendte løsningsmetoder for brudlinieteoriens anvendelse, nemlig arbejdsligningsmetoden og ligevægtsmetoden. Disse metoder giver her, hvor intet andet end bøjningsmomentet i en flydelinie foreskrives, samme resultat. En behandling af de to metoders indbyrdes forhold er givet af Nielsen [64.5].

Den rene øvrevarde metode fører til (7.2.2.15) har været undersøgt af Knöpfell [73.2] og Munroe og Fonseca [78.2]. Der er dog her ved fundet, at løsningserne er stærkt afhængige af det aktuelle plade-problems natur og kan blive væsentligt på den usikre side.

### 7.2.3 Tilnærmede ekstremalmetoder

Som nævnt i afsnit 4.5 bør man ikke udelukke anvendelser af elementtyper for hvilke statisk ligevægt ikke er strengt opfyldt. Benyttelse af sådanne elementtyper vil ofte kunne forsøres ved praktiske anvendelser, hvor man med de øvrige givne forudsætninger taget i betragtning vil være tilfreds med et design, der er sikkert omend for en lidt anden belastningsopstilling end den foreskrevne.

Dette får os til at betragte den brede klasse af elementer, blandede elementer, for hvilke såvel flytnings- som momentfelterne indgår ved opstillingen af de statiske ligevægtsligninger.

En almindelig fremstilling af denne elementtypes anvendelse er givet af Anderhuggen og Knöpfell [72.5]. Metoderne er benyttede af Knöpfell [73.2] ved beregning af bæreevnen for jernbetonplader ved hjælp af lineær programmering. For fuldstandig beskrivelse af fremgangsmåden henvises til ovennævnte, idet der her kun skal anstilles principielle betragtninger.

Lad os betragte et eksempel. For trekantelementet med lineært varierende momentfelt, TRÆK 2, foreskrives nu kontinuitet i de vridende momenter.

Pladens momentfelt kan da gives ved  $(m_x, m_{xy}, m_y)$  i hver knude som parametre.

Randpåvirkningerne for et element bliver som vist på figur 4.5.2.2.2. Der opstilles ikke ligevægt i knuden, idet denne er automatisk opfyldt for ingen ydre last i knuden (kontinuitet i vridende moment). For hele pladen opstilles da blot én ligning pr. side. Denne udtrykker ligevægt

i de Kirchoff'ske forskydningskræfter.

Ved grænseovergang til uendelig fin inddeling bliver antallet af sider tre gange antallet af knuder.

D.v.s. antal ubekendte:  $n + 3 \times nk$

antal ligninger:  $n + 1 \times ns + 3 \times nk$

Elementet er således dårligt anvendeligt ved optimeringen, idet ligningsystemet ikke lever tilstrækkeligt med overfaldige.

Vi søger nu at slække på kravene til statisk ligevægt, idet vi ved benyttelse af arbejdsligningen med virtuelle flytninger specielt taget fra det i afsnit 7.2.2 betragtede flytningsfelt kan opstille blot én ligevægtsligning pr. knude.

For alle frie knuder opstilles en ligevægtsligning ved at ækvivalere det indre- og det ydre arbejde for knudeflytningen alene lig 1 (alle andre knudeflytninger lig 0). Bidragene til det indre arbejde beregnes elementvis.

Idet der i det indre af hvert element gælder  $k_x = 2k_{xy} = k_y = 0$  fås af det virtuelle arbejdes princip (4.3.3.3) benyttet for ét element:

$$\int_V \mathbf{I}^T \mathbf{A}_e^T \mathbf{a}_1^e = \int_V \mathbf{m}_1^e \mathbf{a}_1^e \quad (7.2.3.1)$$

hvor  $\mathbf{a}_1^e$  findes af formelen (7.2.2.2) med de relevante knudeflytninger indsat og  $\mathbf{m}_1^e$  er det gennemsnitlige bøjningsmoment for side i multipliseret med sidelængden.  $\mathbf{m}_1^e$  udtrykkes ved pladens globale momentparametre,  $\mathbf{M} = (m_x^1, m_{xy}^1, m_y^1, \dots, m_{nk}^1, m_{xy}^1, m_{nk}^1)^T$  og (4.3.1.3a). Arbejdsligningen for knude  $j$ ,  $\mathbf{W}_k = \begin{cases} 0 & \text{for } k \neq j \\ 1 & \text{for } k = j \end{cases}$ , lyder da:

$$\mathbf{A}_j^Y = \lambda \sum_{j=1}^{ne} \mathbf{A}_e^T \mathbf{I}^T (\mathbf{W}_j = 1) \quad (7.2.3.2)$$

hvor  $\mathbf{A}_j^Y$  altså blot udtrykker det ydre arbejde for  $\mathbf{W}_j = 1$ . Heri kan medtages alle slags lodrette belastninger (enkeltkraft, linjelaste og fladelaste).

De aktuelle statiske randbetingelser samt de lineære flydebetingelser (8 pr. knude) opstilles som sædvanlig.

Ud fra den ved optimeringen fundne optimale løsning kan momentfeltet bestemmes og den hertil hørende belastning kan findes. Løsningen er således en sand nedreværdiløsning for den fundne belastning. Denne vil bestå af linjelaste alene. Det bemærkes, at man, selv om det ydre arbejde beregnes ud fra givne linjelaste alene, ikke kan sikre, at den optimale løsning er i overensstemmelse hermed.

På denne måde er bestemt en løsning, der hverken kan forudsiges som værende en sand øvre- eller en sand nedreværdi.

Endelig bemærkes, at der ved "øvre værdimetoden" kan formuleres et til "nedreværdimetoden" svarende dualt LP-problem, hvis visse tilnærmelser indføres. Det elementvis lineære flytningsfelt anvendes. Kompatibilitetsbetingelserne udtrykkes tilnærmelsesvist ved hjælp af arbejdslligningen med virtuelle spændinger specielt lig det lineære momentfelt. Det indre plastiske arbejde beregnes som angivet i afsnit 3.2.1, idet der dog indføres visse antagelser.

Den ved øvre værdimetoden bestemte løsning er således ikke nogen sand ekstremalværdi.

Metoden til formulering af ligevægtsligningerne kan naturligvis også benyttes ved design-problemet.

Endelig skal nævnes, at formuleringen af ligevægtsligningerne også kan benyttes for elementet TREK 1, hvorved også fordelte belastninger og linjelaste kan behandles. Elementet er et ligevægtselement når den ydre belastning består af knudelaste alene. At der her ved arbejdslligningen opstilles de korrekte ligevægtsligninger ses af, at for et element gælder:

$$A_e^T I = \sum_{\alpha} m_{\alpha}^e \times \sum_{\beta} \tilde{u}_{\beta}^e = \sum_{\alpha} (K_{\alpha}^e)^T W_{\alpha}^e = \sum_{\beta} P_{\beta}^e W_{\beta}^e$$

hvorved netop opstilles knudeligevægt:

$$\sum_{\alpha} \frac{m_{\alpha}^e}{V} (\tilde{H}_{\alpha}^e)^T P_{\alpha}^e = \lambda \tilde{P}^Y \quad (7.2.3.3)$$

Anderheggen og Knøpfell [72.5] samt Knøpfell [73.2] har med denne metode bl.a. bestemt bæreevnen for den kvadratiske indspændte plade, se figur 6.1.2.

#### 7.2.4 Elasto-plastisk beregningsmetode

En alternativ metode til bestemmelse af øvre værdier for såvel den elastiske som den plastiske bæreevne for jernbetonplader er udviklet af Bäcklund [73.1]. Beregningsgangen skal her refereres kort.

Trekantelementet med lineært flytningsfelt og konstant momentfelt anvendes. Der forudsættes proportionalt voksende belastning.

Konstruktionen beregnes først rent elastisk. Den lastfaktor, der bringer mindst ét bøjende moment op på værdien for det plastiske bøjende moment bestemmes som den elastiske bæreevne.

Ved næste beregning for den totale belastning foreskrives dette moment værdien for det tilhørende plastiske moment og ligningssystemet løses igen. Denne procedure fortsættes indtil der er opnået en brudmekanisme og således bestemt en øvre værdi for bæreevnen.

Der er således ikke tale om nogen trinvis lastpåføring med tilhørende ændringer af ligningsmatrixen. Samtlige størrelser for brudmekanismen fremgår af sidst løste ligningssystem.

Ud fra den fundne øvre værdiløsning bestemmes en nedreværdiløsning ved proportionering og evt. ved hjælp af kendskabet til den bestemte elastiske løsning.

Rent intuitivt vil denne fremgangsmåde følge selve pladens brududvikling og repræsentere de forskellige brudstadlers snitkraftomlejninger.

Metodens fordele er, at den giver såvel den rent elastiske som den rent plastiske løsning med et minimum af beregningsindsats. Metoden er dog ikke anvendelig ved automatisk dimensionering.

## 8. KONKLUSION OG FORSLAG TIL EDB-PROGRAM

Ud fra resultaterne i dette arbejde samt resultater fra andre beslægtede forskningsarbejder angående numerisk optimering af plader, i særdeleshed jernbetonplader, konkluderes, at en rationel og sikker automatisk dimensioneringsmetode bør være baseret på lineær programmering.

Mulige anvendelser af ikke-lineære optimeringsmetoder vil kræve nærmere undersøgelser og eventuel videreudvikling specielt angående pålidelighed, idet kendskabet hertil må siges i dag ikke at være tilstrækkeligt for benyttelse i praksis. Endvidere bør kendskabet til de ikke-lineære metoders effektivitet ved sådanne opgaver udvides. Ved anvendelser i praksis vil omkostningerne, regnetiden, være en afgørende faktor, således at en dokumenteret konvergens alene ikke kan berettigede metodernes anvendelse.

Undersøgelserne for pladeberegninger viser, at anvendelse af lineær programmering giver brugbare resultater ved rimelige diskretiseringsgrader. Hertil kommer at metoden med sikkerhed fører til den optimale løsning, hvis en sådan eksisterer, for den lineære model.

Som det fremgår af denne afhandling kan der ved benyttelse af øvre-værdimetoden ikke fremskaffes numeriske løsninger for den lineære model, som ikke kan produceres ved nedreværdimetoden, når der anvendes de her betragtede elementtyper til diskretisering. Da nedreværdimetoden desuden er ligetil ved automatisk generering af ligevægtsløsninger og da anvendelser heraf er analoge for bæreevnebestemelses- og designproblemet må metoden foretrækkes som grundlag for et praktisk EDB-program.

For valget af det bedst egnede element bør nærmere undersøgelser foretages. De beregnede eksempler tyder på, at elementerne, REKT 2 og TREK 2, vil give sammenlignelige resultater. Trekantelementet med konstant momentfelt besidder den fordel, at der, som omtalt i afsnit 7.2.2, herved kan bestemmes såvel sande nedreværdiløsninger som sande øvre-værdiløsninger, hvorved der kan bestemmes et interval for den korrekte løsning. Trekantelementet med statisk ligevægt kun tilfredsstillende tilnærmelsesvist synes at give gode resultater. Man vil ofte i praksis kunne acceptere en løsning svarende til en lidt

anden belastning end den foreskrevne. Dette tillige med de ved lineariseringen gjorte ensrettede tilnærmelser på den sikre side taler for elementets anvendelighed i et praktisk dimensioneringsprogram. Endvidere vil elementinddelingens nødvendige tilnærmelse af pladegometrien spille en rolle for valg af elementtype. Her kan måske blive tale om at anvende forskellige elementtyper samtidig ved elementindelingen.

I afsnit 8.1 gives forslag til opbygning af et i praksis anvendeligt EDB-program byggende på det i denne afhandling præsenterede grundlag. D.v.s. der anvendes lineariserede flygebetingelser og diskretisering ved hjælp af finite element. Problemet opstilles efter nedreværdimetoden.

I afsnit 8.2 foreslås forskellige udvidelser af anvendelsesområdet til medtagning af sådanne problemer, til hvis tilfredsstillende løsning må kræves yderligere undersøgelser af grundlaget.

### 8.1 Programopbygning

I det følgende betragtes dimensioneringsprogrammet. Også bæreevnebestemmelsen bør kunne behandles af programmet. Fremgangsmåden her til betragtes som indlysende og medtages ikke for overskuelighedens skyld.

#### 8.1.1 Formulering af omfang

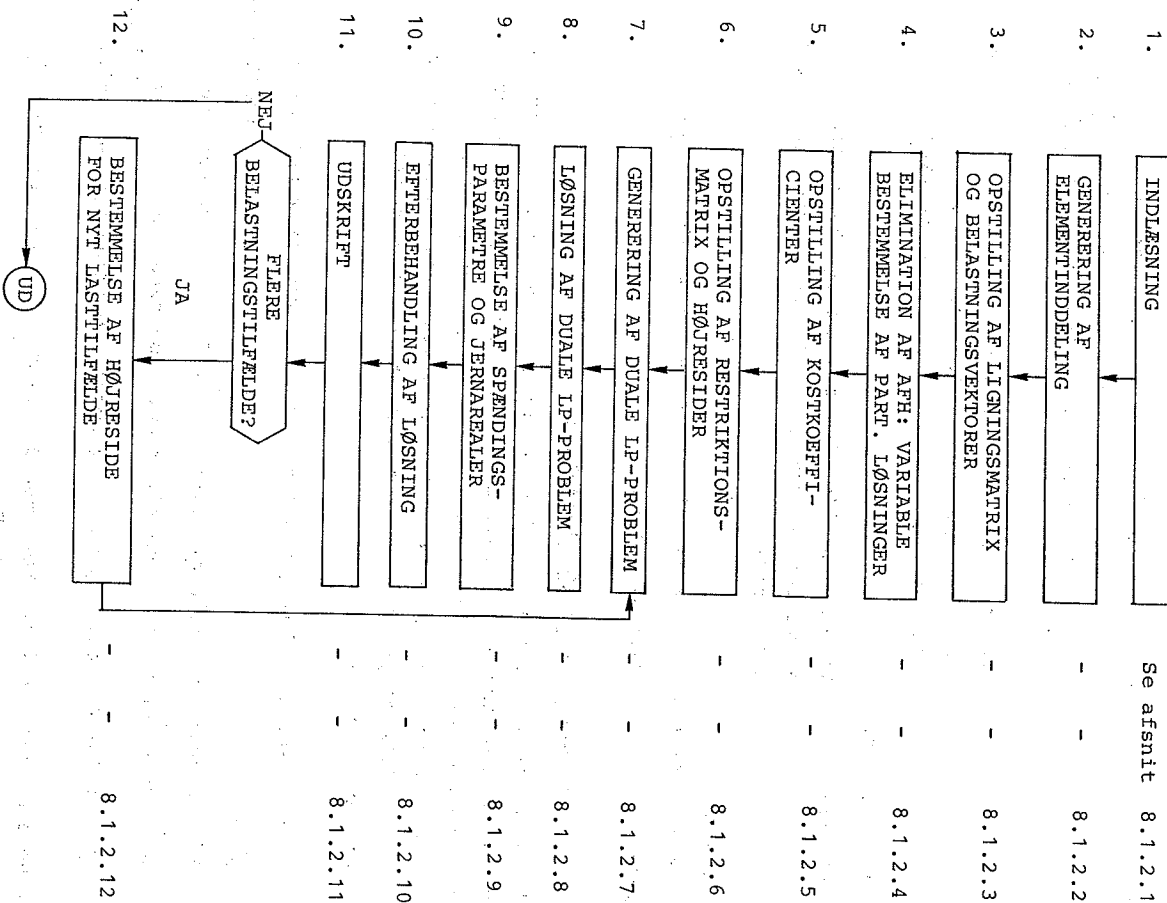
I en plade med givne dimensioner og med en eller flere flere givne belastninger bestemmes den minimale armeringsmængde idet:

- Pladeranden er polygonformet (eller kan tilnærmes med en polygon)
- Pladetykkelsen er eller kan tilnærmes som værende konstant over givne delområder
- Understøtningerne er enten simple eller fast/delvist indspændte. Desuden kan visse linier eller områder af pladen være understøttede (mellemunderstøtninger, søjleunderstøtninger)
- Belastningen er lodret og kan opdeles i a) jævnt fordelt last, hvis intensitet er konstant i givne områder, b) linjelast med konstant intensitet langs givne linjestykker og c) koncentrerede kræfter.

- Armeringen er homogen i givne områder. Armeringsretningerne er givne tillige med dæklagstykkelser og hovedarmeringsretninger (yderste lag). Eventuel given armering skal kunne betragtes tillige med visse givne relationer for armeringsstørrelserne (minimumsarmering, opbøjet armering etc.)
- Materialekonstanterne er givne:  $\sigma_c$  og  $\sigma_F$ .

8.1.2 Rutediagram

Beregningsgangen fremgår af nedenstående diagram.



### 8.1.2.1 Indlæsning

Geometri: Pladerande, pladetykkelser, understøtningsbetingelser.

Belastninger: For hvert lasttilfælde: jævnt fordelt last, lnhlast og koncentrerede kræfter. Behandlingsform for flere lasttilfælde angives, muligheder som i afsnit 5.4.

Armering: Pladefelter med homogen armering, hertil hørende armeringsstørrelser. Retningsangivelser, angivelse af lodret placering, given armering etc.

Materialestykker:  $\sigma_F$  og  $\sigma_C$ .

Elementtype: Valg af en eller flere samtidigt benyttede elementtyper. Angivelse af diskretiseringsgrad (evt. max. areal).

Behandlingsform

for løsningsvektor: Valg af muligheder som givet i afsnit 5.5.

Udskrift: Valg af omfang.

### 8.1.2.2 Generering af elementinddeling

Ud fra pladageometri, valg af elementtype(r) og diskretiseringsgrad foretages automatisk elementinddeling, idet naturlige elementtrande og knudepunkter bestemte af tykkelsesvariation, armeringsvariation, mellemunderstøtninger og givne belastningsopstillinger respekteres.

For valgte elementtype(r) opstilles automatisk i nødvendigt omfang for hvert element, e :

$\xi^e$  : relation mellem globale og lokale momentparametre (se(4.5.1.1.7))

$\xi^e$  : - - - designvariable (se(5.1.2-3))

$\beta_0^e$  : bidrag fra given armering i lnh. flydebetingelser (se(5.1.4-5))

$\xi^e$  : relation mellem lokale parametre og randkræfter (se (4.5.1.1.5-6))

$\xi^e$  : relation mellem globalt og lokalt koordinatsystem (se(4.3.1.6))

For hele pladen opstilles vektoren for samtlige designvariable,  $D$ , og vektoren for momentfeltet,  $M$ .

### 8.1.2.3 Opstilling af ligningsmatrix

Ligningsmatrixen for de statiske ligevægtsligninger og -randbetingelserne opstilles, se (3.2.2.3). Samtidigt hermed opstilles belastningsvektoren,  $\tilde{y}^i$ , for hvert lasttilfælde.

8.1.2.4 Elimination af afh. variable og bestemmelse af partikulære løsninger

En rangmatrix,  $K^0$ , for ligningsmatrixen bestemmes. For hvert belastningstilfælde findes den til belastningsvektoren,  $\tilde{y}^i$ , hørende partikulære løsning,  $F_{0,i}$ , se (5.4.2.2)

### 8.1.2.5 Opstilling af kostkoefficienter

Objektionsfunktionens kostkoefficienter beregnes som ved (5.1.7). Disse bliver ens for alle lasttilfælde. Hermed er det duale LP-problems højre-side bestemt, se (5.3.14).

### 8.1.2.6 Restriktionsmatrix og højre-sider

De lineære flydebetingelser opstilles automatisk i de udvalgte opstillingspunkter. Herved bestemmes matrixerne  $R_u$  og  $R^2$ , se (5.4.2.3). Ud fra de til belastningerne hørende partikulære løsninger bestemmes højre-siderne,  $R_{0,i}^1$ , i restriktions-systemet.

I denne beskrivelse forudsættes, at eventuelle eksplicitte armeringskrav indbygges i flyde-restriktionerne.

### 8.1.2.7 Generering af duale LP-problem

Det duale LP-problems restriktionsmatrix bliver  $(R_u, R^2)^T$ . Behandles flere lasttilfælde samtidigt og søges det globale optimum bliver restriktionsmatrixen dog den transformerede af den ved (5.4.3.1) givne matrix.

Endelig fås det duale LP-problems kostkoefficienter af højresiderne,  $R_0$ . Ved samtidig behandling af flere lasttilfælde og bestemmelse af tilnærmet optimum benyttes  $R_{\min}$ , se (5.4.2.5), medens  $R_{0,TOT}$ , se (5.4.3.1), benyttes ved bestemmelse af global optimum.

Ved successiv beregning af flere lasttilfælde, se afsnit 5.4.1, benyttes den til første belastningstilfælde hørende højre side,  $R_{0,i}^1$ .

### 8.1.2.8 Løsning af duale LP-problem

Det duale LP-problem løses ved hjælp af standardrutine.

### 8.1.2.9 Bestemmelse af momentparametre og jernarealer

Jernarealerne og de uafhængige momentparametre bestemmes direkte ud fra fundne løsningsvektor. De afhængige momentvariable findes ved hjælp af rangmatricen, se (5.4.2.2).

### 8.1.2.10 Efterbehandling af løsning

Ud fra indlæst ønske bestemmes enten den til det fundne design hørende maksimale belastning eller der foretages en proportionering af jernarealerne efter en valgt metode som givet i afsnit 5.5.

### 8.1.2.11 Udskrift

Der udskrives:

- De bestemte jernarealer og disses placeringer (ud fra input).
- Den givne belastning, samt den eventuelt under efterbehandling fundne maksimale last.
- I valgte punkter udskrives for det behandlede belastnings-tilfælde eller for hvert enkelt lasttilfælde, hvor alle behandles samtidigt i LP-problemet:
  - a. momenter ( $m_x, m_{xy}, m_y$ )
  - b. hovedmomenter
  - c. jernspændinger
  - d. betonspændinger

### 8.1.2.12 Bestemmelse af højreside for nyt lasttilfælde

Ved successiv behandling af flere lasttilfælde, se afsnit 5.4.1, korrigeres restriktionernes højre side,  $R_{0,i}$ , for medtagning af de tidligere bestemte jernarealer. De efter behandling af  $(i-1)$ 'de lasttilfælde bestemte jernarealer,  $\bar{D}_i^{-1}$ , tages i regning, idet jernarealerne,  $\bar{D}_i$ , i  $i$ 'te lasttilfælde fås af:

$$\bar{D}_i = \bar{D}_j + \bar{D}_j^{-1} - 1, \quad D_j \geq 0 \quad \text{for } j = 1, \dots, ND \quad (8.1.2.12.1)$$

(8.1.2.12.1) indsættes i flydebetingelserne, hvor nu  $D_j$  er designvariable, hvilket kun giver anledning til ændring af  $R_{0,i}$ . Efter behandling af lasttilfælde nr.  $i$  fås de totale jernarealer af (8.1.2.12.1). Det tidligere opstillede duale LP-problem kan således gennanvendes, idet blot nye kostkoefficienter indføres.

### 8.1.3 Elastisk beregning

Dimensionseringsopgaven kan med fordel indledes med en elastisk beregning, som man alligevel ofte vil benytte i forbindelse med brugsstadieberegninger til dimensionering ud fra bl.a. krav til stivhed og maksimale revnevidder.

De indlysende fordele er:

- mulighed for automatisk medtagning af armering bestemt ved brugsstadieberegninger
- let måde at bestemme tilladelig startværdi for LP-problemet, hvorved regnetiden ofte kan nedsættes betydeligt.

Bestemmelsen af såvel den elastiske som den optimale plastiske snitkraftfordeling kan f.eks. foretages som følger.

Trekantelement med konstant momentfelt og lineært flytningssfelt, hvoraf momentfeltet er benyttet i TREK 1, benyttes.

Elementet anvendes som blandet element til elastiske beregninger af de givne belastningstilfælde. Løsningerne proportioneres svarende til brudstadieberegningens belastningskoefficienter.

De lineariserede flydebetingelser, (4.4.20), benyttes til dimensionering efter de fundne snitkræfter, idet det givne armeringsarrangement tages i betragtning.

For hvert lasttilfælde er således fundet en tilladelig løsning for moment- og designparametrene, der kan anvendes direkte ved optimeringen, hvori elementets momentfelt anvendes. Optimeres ved samtidig behandling af alle lasttilfælde bestemmes de uafhængige momentparametre ud fra det enkelte elements maksimale snitkræfter, og jernarealerne tildeles de maksimale værdier, alle lasttilfælde betragtede.

Endelig skal nævnes, at en øvre værdiløsning kan findes ved anvendelse af samme element, idet blot restriktionerne for flydebetingelserne ændres, se afsnit 7.2.2.

8.2 Udvidelser af anvendelsesområde

Nedenfor skal nævnes eksempler på væsentlige områder, til hvis løsning det her givne grundlag for anvendelse af lineær programmering ikke slår til.

- a. Optimering af armeringsretningerne ved skævvinklet armering. Her kan muligvis med fordel anvendes heltalsvariable, idet der udvælges en række mulige armeringsretninger, hvoraf kun en vis del tillades indeholdt i den optimale løsning.
- b. Beregning af delvis forspændte pladekonstruktioner.

Heri såvel mulighed for behandling af givne forspænding som mulighed for optimering af forspændingen, idet kostpriserne for blød armering og forspændt armering medtages.

For medtagning af forspænding kan de her benyttede flydebetingelser (der jo er baserede på en fiktiv opdeling af pladen i skiver, hvori kræfterne optages) ikke umiddelbart forventes at være anvendelige. Der må udføres yderligere undersøgelser for udvikling af anvendelige flydebetingelser.

- c. Beregning af ribbeafstivede plader. Beregningen kan muligvis udføres ved inddeling i rene pladelementer og "bjælke"-elementer, der kan optage både højning og vridning. Desuden må anvendes specielle flydebetingelser i disse "bjælke"-elementer. En behandling af plader med kantbjælker er givet af McNeice [69.8].

APPENDIX

LINEAR PROGRAMMERING

Nedenfor nævnes de vigtigste egenskaber for den klassiske lineære programmerings-teknik. For beviser og nærmere beskrivelse af løsningsalgoritmer henvises til Kinzi [67.1] og Gass [69.1].

Ved et lineært programmeringsproblem forstås opgaven at optimere, maksimere eller minimere, et lineært udtryk under hensyntagen til et antal lineære restriktioner.

Problemet kan matematisk formuleres ved:

$$\left. \begin{aligned}
 &\text{optimer } z = c_1 x_1 && i = 1, \dots, n_1 \\
 &\text{m.h.t. } a_{ji} x_i \leq b_j && j = 1, \dots, m_1 \\
 & && a_{ki} x_i = b_j && k = 1, \dots, m_2 \\
 & && a_{li} x_i \geq b_l && l = 1, \dots, m_3 \\
 &\text{og } x_i \geq 0 && 
 \end{aligned} \right\} \text{(A.1)}$$

Forudsat rangen af  $a_{ij}^2$  er  $m_2$  og at  $m_2 < n_1$  kan lighedsrestriktionerne benyttes til at eliminere  $m_2$  variable. Idet endvidere  $a_{li} x_i \geq b_l \Leftrightarrow -a_{li} x_i \leq -b_l$ , og da  $\min(c_1 x_1) = -\max(-c_1 x_1)$  kan ethvert lineært programmeringsproblem som (A.1) generelt omskrives til:

$$\left. \begin{aligned}
 &\text{maksimer } z = c_1 x_1 && i = 1, \dots, n \\
 &\text{m.h.t. } a_{ji} x_i \leq b_j && j = 1, \dots, m \\
 &\text{og } x_i \geq 0 && 
 \end{aligned} \right\} \text{(A.2)}$$

Ved indførelse af  $m$  såkaldte slack-variable,  $y_j$ , kan (A.2) formuleres:



$$\text{maksimer } z = c_1 x_1 \quad l = 1, \dots, n \quad (\text{A.3.1})$$

$$\text{m.h.t. } a_{ji} x_i + Y_j = b_j \quad j = 1, \dots, m \quad (\text{A.3.2})$$

$$\text{og } x_i \geq 0 \quad ; \quad Y_l \geq 0 \quad (\text{A.3.3})$$

Dette er den almindelige formulering af et lineært programmeringsproblem, et L.P.-problem.  $c_i$ -værdierne kaldes problemets kostkoefficienter,  $z$  kaldes objektfunktionen eller kostfunktionen og (A.3.2-3) benævnes restriktionerne.

Såfremt løsningsmængden  $l$  (A.3.2-3) ikke er tom fås altid en optimal løsning af  $z$ . Denne kan enten være endelig eller ubegrænset. Er den endelig fås altid et entydigt optimum. Den tilhørende optimale løsningsvektor,  $x_i$ , er da også, med visse undtagelser, entydig. I det følgende forudsættes, at løsningsmængden  $l$  (A.3.2-3) ikke er tom.

Såfremt  $b_j \geq 0$ ,  $j = 1, \dots, m$  kan IP-problemet, (A.3.1-3), løses ved Simplex-algoritmen, der blev udviklet af G.B.Dantzig i 1948. I dette tilfælde er  $x_i = 0$  og  $Y_j = b_j$  nemlig en løsning til (A.3.2-3) og kan benyttes som startværdi. Algoritmen regner sig herudfra på rationel måde frem til den optimale løsning  $l$  et endeligt antal skridt.

Er kravet  $b_j \geq 0$  ikke opfyldt må en løsning  $l$  (A.3.2-3) bestemmes før anvendelse af Simplex-algoritmen.

Variable, der kan antage negative værdier kan også behandles, idet variabeltransformationer som:

$$x_i^1 = x_i + x_{i0} \quad (\text{A.4})$$

hvor  $x_{i0}$  er således valgt, at  $x_i^1 \geq 0$ , eller

$$x_i^1 - x_i^2 = x_i \quad ; \quad x_i^1 \geq 0 \quad \text{og} \quad x_i^2 \geq 0 \quad (\text{A.5})$$

bringer problemet over i ét med ikke-negative variable.

Dualitet

til enhver maksimeringsopgave, som (A.3.1-3), kaldet den primale opgave, eksisterer en minimeringsopgave, kaldet den duale opgave, og omvendt.

Det til (A.3.1-3) hørende duale LP-problem er:

$$\text{minimér } w = b_j Y_j \quad j = 1, \dots, m \quad (\text{A.6.1})$$

$$\text{m.h.t. } a_{ij} Y_j + x_i = c_i \quad i = 1, \dots, n \quad (\text{A.6.2})$$

$$x_i \geq 0 \quad ; \quad Y_l \geq 0 \quad (\text{A.6.3})$$

For disse problemer gælder:

a. Har det ene problem ingen løsningsmængde er løsningen til det andet ubegrænset og omvendt.

b. Gælder der for de to LP-problemer, at  $c_i \geq 0$  og  $b_j \geq 0$  da er løsningerne for de to problemer sammenfaldende.

Specielt vil dette sige at såfremt det primale problem (A.3.1-3) har  $c_i \geq 0$ , da kan dette løses ved løsning af det tilhørende duale problem, (A.6.1-3). Løsningsvektoren for det primale LP-problem findes af det duale problems løsningsvektor,  $Y_j$ , ved indsettelse  $l$  (A.6.2).

## LITTERATURFORTEGNELSE

- [90.1] Maxwell, C.J.: Scientific Papers II, Cambridge University Press, pp. 175-177, 1890.
- [104.1] Michell, A.G.M.: The limit of economy of Material in Frame-Structures, Phil. Mag., Ser. 6, Vol. 6, No. 47, pp. 589-597, 1904.
- [121.1] Ingerslev, A.: Om en Elementær Beregningsmetode for Krydsarmerede Plader, Ingeniøren, Vol. 30, No. 69, pp. 507-515, 1921.
- [136.1] Gvozdev, A.A.: The Determination of the Value of the Collapse Load for Statically Indeterminate Systems undergoing Plastic Deformations, Proc. of the Conf. on Plastic Deformation, dec. 1936, Akademiia Nauke, S.S.S.R., Moscow-Leningrad, p. 19, 1936.  
Også beskrevet i: Rjantitsyn, A.R.: Calcul a la Rupture et Plasticité des Constructions, Paris 1959.
- [43.1] Johansen, K.W.: Brudlinie teorier, København, 1943.
- [49.1] Johansen, K.W.: Pladeformler, København, 1949.
- [52.1] Drucker, D.C., Greenberg, H.J. & Prager, W.: Extended Limit Design Theorems for Continuous Media, Quart. Appl. Math., Vol. 9, pp. 381-389, 1952.
- [52.2] Prager, W.: The General Theory of Limit Design, Proc. 8<sup>th</sup> Int. Congr. Theor. Appl. Mech., Istanbul, Vol. II, pp. 65-72, 1952.
- [54.1] Foulkes, R.: Minimum Weight Design of Structural Frames, Proc. Royal. Soc. A, Vol. 223, pp. 482-494, 1954.
- [56.1] Livesley, R.: The Automatic Design of Structural Frames, Quart. Journ. Mech. Appl. Math., Vol. 9, pp. 257-278, 1956.
- [56.2] Hillerborg, A.: Jämnviksteori för armerade Betongplattor, Betong, Vol. 41, No. 4, pp. 171-181, 1956.
- [57.1] Drucker, D.C. & Shield, R.T.: Bounds on Minimum Weight Design, Quart. of Appl. Math., Vol. 15, No. 3, pp. 269-281, 1957.
- [59.1] Prager, W.: An Introduction to Plasticity, London 1959.
- [59.2] Hodges, P. G.: Plastic Analysis of Structures, McGraw-Hill, New York, 1959.
- [59.3] Charney, A., Lemke, C.E. & Zienkiewicz, O.C.: Virtual Work Linear Programming and Plastic Limit Analysis, Proc. Royal Soc. A, Vol. 251, pp. 110-116, 1959.
- [59.4] Timoshenko, S. & Woinowsky-Krieger, S.: Theory of Plates and Shells, second edition, McGraw-Hill, New York, 1959.
- [60.1] Rosen, J.B.: The Gradient Projection Method for non Linear programming, Part I, Linear Constraints, Journ. Siam, Vol. 8, pp. 181-217, 1960.
- [60.2] Zoutendijk, G.: Methods of Feasible Directions, Elsevier Publishing Co., Amsterdam, 1960.
- [61.1] Griffith, R.E. & Stewart, R.A.: A nonlinear Programming Technique for Opt. of Cont., Proc. System. Man. Sci., Vol. 7, pp. 379-392, 1961.
- [61.2] Wood, R.H.: Plastic and Elastic Design of Slabs and Plates, Thames and Hudson, London, 1961.
- [63.1] Massonet, Ch. & Save, M.: Calcul Plastique des Constructions, Vol. 2, Structures Spatiales, Bruxelles, Centre Belgo-Luxembourgeois d'Information de l'Acier, 1963.
- [64.1] Fiacco, A. & McCormick, G.P.: Computational Algorithm for the Sequential Unconstrained Minimization Technique for nonlinear Programming, Man. Sci., Vol. 10, No. 4, pp. 601-617, 1964.
- [64.2] Hemp, W.S.: Studies in the Theory of Michell Structures, Proc. 11<sup>th</sup> Congr. Appl. Mech., München, 1964.
- [64.3] Marcal, P.V. & Prager, W.: A Method of Optimal Plastic Design, Journ. de Mech., Vol. 3, No. 4, pp. 509-530, 1964.
- [64.4] Wolfensberger, R.: Traglast und Optimale Bemessung von Platten, Diss., Erdgenossische Techn. Hochsch., Zürich, 1964.
- [64.5] Nielsen, M.P.: Limit Analysis of Reinforced Concrete Slabs, Acta Polytechnica Scandinavia, København, 1964.
- [64.6] Sawczuk, A.: On Initiation of the Membrane Action in R-C Plates, Journ. de Mech., Vol. 3, No. 1, pp. 15-23, 1964.
- [65.1] Prager, W.: Mathematical Programming and Theory of Structures, Journ. Soc. Ind. Appl. Math., Vol. 13, pp. 312-332, 1965.
- [65.2] Koopmann, D.C.A. & Lance, R.H.: On Linear Programming and Plastic Limit Analysis, Journ. Mech. Phys. Solids., Vol. 13, pp. 77-87, 1965.
- [65.3] Householder, S.: The Theories of Matrices in Numerical Analysis, Blaisdell Publ. Co., New York, 1965.
- [66.1] Collatz, L. & Watterling, W.: Optimierungsaufgaben, 1966.

- [66.2] Morley, C.T.: The Minimum Reinforcement of Concrete Slabs, Int. Journ. Mech. Sci., Vol. 8, pp. 305-319, 1966.
- [67.1] Künzi, H.P., Tzseach, H.G. & Zehnder, C.A.: Numerische Methoden der Mathematischen Optimierung, B.G. Teubner, Stuttgart, 1967.
- [67.2] Duffen, R.J., Peterson, E.L. & Zener, C.K.: Geometric Programming, John Wiley, 1967.
- [67.3] Hellan, K.: Analysis of Elastic Plates in Flexure by a Simplified Finite Element Method, Acta Polytechnica Scandinavica, CI 46, Trondheim, 1967.
- [67.4] Herrmann, I.R.: Finite Element Bending Analysis for Plates, Journ. of the Eng. Mech. Div., ASCE, Vol. 93, No. EM 5, pp. 13-26, 1967.
- [67.5] Mroz, Z.: On the Optimum Design of Reinforced Slabs, Acta Mechanica, Vol. 3, No. 1, pp. 34-55, 1967.
- [68.1] Sheu, C.Y. & Prager, W.: Recent Developments in Optimal Structural Design, Appl. Mech. Review, Vol. 21, No. 10, pp. 985-992, 1968.
- [68.2] Hodge, P.G. & Belytschko, T.: Numerical Methods for the Limit Analysis of Plates, Journ. Appl. Mech., Vol. 35, pp. 796-802, 1968.
- [68.3] Hodge, P.G.: Numerical Applications of Minimum Principles in Plasticity, in "Engineering Plasticity", Cambridge University Press, Cambridge, 1968.
- [68.4] Veubeke, B.F. & Sander, G.: An Equilibrium Model for Plate Bending, Int. Journ. Sol. Struct., Vol. 4, pp. 447-468, 1968.
- [68.5] Chan, H.S.Y.: Mathematical Programming in Optimal Plastic Design, Int. Journ. Struct., Vol. 4, 1968.
- [69.1] Gass, S.I.: Linear Programming Methods and Applications, McGraw-Hill, 1969.
- [69.2] Nielsen, M.P.: Om Jernbetonskivers Styrke, Polyteknisk Forlag, 1969.
- [69.3] Chan, H.S.Y.: On Foulkes Mechanism in Portal Frame Design for Alternative Loads, Journ. Appl. Mech., Vol. 36, No. 1, pp. 73-75, 1969.
- [69.4] Jofriet, J.C.: The Finite Element Method in Bending-Selection, Evaluation and Applications of a Quadrilateral Plate Displacement Model, University of Waterloo, Department of Civil Engineering, Waterloo, Canada, 1969.

- [69.5] Pian, T.H.H. & Tong, P.: Rationalization in Deriving Element Stiffness Matrix by Assumed Stress Approach, Proc. of the Second Conference on Matrix Methods in Structural Mechanics, Air Force Flight Dynamics Laboratory, Wright-Patterson Air Force Base, Ohio, 1969.
- [69.6] IBM-manual: SYSPEM/360 Scientific Subroutine Package (PL/I), (360A - CM - 07X), Program Description and Operations Manual, 1969.
- [69.7] IBM-manual: Mathematical Programming System/360, (360A - CO - 14X), Application Description Manual, 1969.
- [69.8] McNeice, G.M.: An Elastic-plastic Finite Element Analysis for Plates with Edge-beams, Proc. Symp. on Appl. of Finite Element Meth. in Civ. Eng., Nashville, Tennessee, pp. 529-566, 1969.
- [70.1] Bræstrup, M.W.: Yield Line Theory and Limit Analysis of Plates and Slabs, Magazine of Concrete Research, Vol. 22, pp. 99-106, 1970.
- [70.2] Ranaweera, M.P. & Leckie, F.A.: Bound Methods in Limit Analysis, Proc. of Seminar on Finite Element Techniques in Structural Mechanics (Ed. Tottenham, H. & Brebbia, C.), University of Southampton, Southampton, 1970.
- [70.3] Allmann, D.J.: Triangular Finite Elements for Plate Bending Moments, Proc. of the Symposium on High Speed Computing of Elastic Structures, IUTAM, Liège, pp. 105-136, 1970.
- [70.4] Morley, C.T.: Optimum Reinforcement of Concrete Slab Elements against Combinations of Moments and Membrane Forces, Magazine of Concrete Research, Vol. 22, No. 72, pp. 155-162, 1970.
- [71.1] Pope, C.G. & Schmit, L.A.: Structural Design Applications of Mathematical Programming Technique, AGARDograph, No. 149, 1971.
- [71.2] Spunt, L.: Optimum Structural Design, Prentice Hall, Inc. 1971.
- [71.3] Cohn, M.Z., Parimi, S.R. & Ghosh, S.K.: On the Uniqueness of Plastic Optimal Design, Solid Mech. Div., University of Waterloo, Canada, Report No. 75, 1971.
- [71.4] Cohn, M.Z., Ghosh, S.K. & Parimi, S.R.: A Unified Approach to the Theory of Plastic Structures, Sol. Mech. Div., University of Waterloo, Canada, Report No. 78, 1971.
- [71.5] Lowe, P.G. & Melchers, R.E.: On the Theory of Optimal, Constant Thickness, Fibre-Reinforced Plates, Int. Journ. Mech. Sci., Vol. 14, pp. 311-324, 1971.
- [71.6] Nielsen, M.P.: Bestemmelse af armering i jernbetonskaller, Rapport 7104, Danmarks Ingeniørakademi, Bygningsafdelingen, Ålborg, 1971.

- [72.1] Morris, A.J.: Structural Optimization using Geometric Programming, Int. Journ. Solids, Structures, Vol. 8, p. 847, 1972.
- [72.2] Niordson, F.I. & Pedersen, P.: A Review of Optimal Structural Design, DCAAM, Report No. 31, Danmarks tekniske Højskole, 1972.
- [72.3] Pian, T.H.H. & Tong, P.: Basis of Finite Element Methods Continuum. Int. Journ. for Numm. Methods in Eng., Vol. 1, pp. 3-28, 1969.
- [72.4] Desai, E.S. & Abel, J.F.: Introduction to the Finite Element Methods, Van Nostrand Reinhold, 1972.
- [72.5] Anderheggen, E. & Knöpfell, H.: Finite Element Limit Analysis using Linear Programming, Int. Journ. Sol. Struc., Vol. 8, pp. 1413-1421, 1972.
- [72.6] Maier, G., Zavelan-Rossi, A. & Benedetti, D.: A Finite Element Approach to Optimal Design of Plastic Structures in Plane Stress, Int. Journ. for Numm. Meth. in Eng., Vol. 4, pp. 455-473, 1972.
- [72.7] Davies, J.M.: A New Formulation of the Plastic Design Problem for Plane Frames, Int. Journ. for Numm. Meth. in Eng., Vol. 5, pp. 185-192, 1972.
- [72.8] Bäcklund, J.: Membraneeffect i Armerade Betongplattor - en Litteraturoversikt, Chalmers Tekniska Högskola, Inst. f. Konstruktionsmekanik, Betongbyggnad, Rapport 72:1, p. 14, 1972.
- [72.9] Chan, H.S.Y.: The Collapse Load of Reinforced Concrete Plates, Int. Journ. for Numm. Meth. in Eng., Vol. 5, pp. 57-64, 1972.
- [73.1] Bäcklund, J.: Finite Element Analysis of Nonlinear Structures, Doctorafhandlingar vid Chalmers Tekniska Högskola, Göteborg, 1973.
- [73.2] Knöpfell, H.: Berechnung Starr-plastischen Platten Mittels Finiten Elementen, Diss. No. 5034, Erdgenossische Techn. Hochschule, Zürich, 1973.
- [73.3] Faccioli, E. & Vitellio, E.: A Finite Element, Linear Programming Method for the Limit Analysis of thin Plates, Int. Journ. Numm. Meth. in Eng., Vol. 5, pp. 311-325, 1973.
- [73.4] Robinson, J.: Integrated Theory of Finite Element Methods, John Wiley & Sons, London, 1973.
- [74.1] Holst, O.: Automatic Design of Plane Frames, Rapport No. R 53, Afdelingen for Bærende Konstruktioner, Danmarks tekniske Højskole, 1974.
- [74.2] Maier, G.: Piecewiselinearization of Yield Criteria and its Role in Structural Plasticity, Invited Paper, C.I.S.E.-Segrate, Milano, 1974.

- [74.3] Hillerborg, A.: Dimensionering av Armerade Betong-Plattor enligt Strömlinemetoden, Almqvist & Wiksell, Stockholm, 1974.
- [74.4] Morley, C.T.: A General Yield Criterion for Reinforced Concrete Slab Elements, Con. Magazine of Concrete Research, Vol. 26, dec. 1974.
- [74.5] Fox, E.N.: Limit Analysis for Plates: The Exact Solution for a Clamped Square Plate of Isotropic Homogeneous Material Obeying the Square Yield Criterion and Loaded by Uniform Pressure, Phil. Trans. Roy. Soc., Vol. 277A, pp. 121-155, 1974.
- [76.1] Nielsen, L.O.: Elementmetoden. Variationsprincipper og Elementtyper. 2. udd. F 50, Afdelingen for Bærende Konstruktioner, Danmarks tekniske Højskole, København, 1976.
- [76.2] Melchers, R.E.: Minimum Reinforcement of Nonuniform Plates, Journ. Eng. Mech. Div., ASCE, Vol. 102, No. EM6, pp. 943-955, 1976.
- [76.3] Rozwany, I.N. & Hill, R.D.: The Theory of Optimal Load Transmission by Flexure, Adv. in Appl. Mech., Vol. 16, pp. 184-308, 1976.
- [77.1] Morley, C.T.: Optimum Reinforcement of Concrete Slab Elements, Proc. Inst. Civ. Eng., Part 2, Vol. 63, pp. 441-454, 1977.
- [78.1] Bryder, K.L.: Optimeringsmetoder for 2-dimensionale Legemer af Idealt-plastisk Materiale, Lic.-afh., Afdelingen for Bærende Konstruktioner, Danmarks tekniske Højskole, København, Ikke publiceret.
- [78.2] Munro, I. & Da Fonseca, A.M.A.: Yield Line Method by Finite Elements and Linear Programming, The Structural Engineer, Vol. 56B, No. 2, pp. 37-44, 1978.

RAPPORTER (Reports)  
(1977 - )

- R 81. Resumeoversigt 1976. Summaries of papers 1976. 1977.
- R 82. MØLLMANN, H.: Static and dynamic analysis of plane cable structures. 1977.
- R 83. RIBERHOLT, H.: Bolte indlimet i limtræ. 1977.
- R 84. AGERSKOV, H. and J. BJØRNBÆK-HANSEN: Fatigue strength of welded connections in round bar steel structures. 1977.
- R 85. LAURSEN, M.E., M.P. NIELSEN and M. ROTKJØR: Stability analysis of beams and arches by energy methods. 1977.
- R 86. LAURSEN, M.E.: Derivation of symmetric integration formulas for triangles. 1977.
- R 87. LAURSEN, M.E.: Stability and vibration analysis of plane curved beams by an equilibrium finite element method. 1977.
- R 88. PEDERSEN, FLEMING BLIGAARD: Vibration analysis of viscoelastically damped sandwich structures. 1978.
- R 89. BRØNDUM-NIELSEN, TROELS: Epoxy resin repair of cracked concrete beams. 1978. \*)
- R 90. HESS, UWE, B.CHR. JENSEN, M.W. BRÆSTRUP, M.P. NIELSEN og FINN BACH: Gennemlokning af jernbetonplader. 1978.
- R 91. HANSEN, KARL ERIK, KAJ U. BRYDER og M.P. NIELSEN: Armeringsbestemmelse i jernbetonskaller. 1978.
- R 92. ASKEGAARD, V.: Stress and strain measurements in solid materials. 1978.
- R 93. SCHMIDT, HENRIK: Udbredelse af akustisk emission i beton. 1978.
- R 94. BYSKOV, ESBEN og STEEN KRENK: Konstruktionsstræs mekaniske styrke. 1978.
- R 95. Resumeoversigt 1977. Summaries of papers 1977. 1978.
- R 96. DYRBYE, CLÆS: Admittance-curves. ZILSTORFF, ANNE and CLÆS DYRBYE: Admittance of bars. 1978.
- R 97. DYRBYE, CLÆS: Dynamic systems with sinusoidal mode shapes. 1978.
- R 98. ANDRESEN, CLÆS: Bjælker og søjler med åbne, tyndvæggede tværnit. 1978.
- R 99. RIBERHOLT, H.: Einglejleimte Gewindestangen. 1978.
- R 100. PEDERSEN, C.: Opbøjlet længdearmering som forskydningsarmering. 1978.
- R 101. JENSEN, J.F., M.W. BRÆSTRUP, F. BACH og M.P. NIELSEN: Nogle plasticitetsteoretiske bjælkeløsninger. 1978.
- R 102. JENSEN, J.F., C. PEDERSEN, M.W. BRÆSTRUP, F. BACH og M.P. NIELSEN: Rapport over forskydningsforsøg med 6 spændbetonbjælker. 1978.
- R 103. JENSEN, J.F., V. JENSEN, H.H. CHRISTENSEN, F. BACH, M.W. BRÆSTRUP and M.P. NIELSEN: On the behaviour of cracked reinforced concrete beams in the elastic range. 1978.
- R 104. ANDERSEN, ERIK YDING: Konstruktionsovervågning med akustisk emission. Prøvebelastning af landevejsbro. 1979.
- R 105. FREDSSGAARD, SØREN SKYTTÉ: Ligevægts-elementer i de finte elementers metode. Formulering og beregningsgang. 1979.
- R 106. AGERSKOV, HENNING: Tests on high-strength bolted T-stub connections. 1979.
- R 107. KIRK, JENS: Direkte beregning af imperfekte skalkonstruktioner. 1979.
- R 108. Resumeoversigt 1978. Summaries of papers 1978. 1979.
- R 109. BRØNDUM-NIELSEN, TROELS: Stress analysis of concrete sections under service load. 1979.
- R 110. BRÆSTRUP, M.W.: Effect of main steel strength on the shear capacity of reinforced concrete beams with stirrups. 1979.
- R 111. BRINCKER, RUNE: Murede vægges tværbæreevne. En undersøgelse af murværks fysiske egenskaber. 1979.
- R 112. GIMSING, NIELS J.: Analytisk undersøgelse af materialforbrug for plane kabelsystemer med ensformig fordelt belastning. 1979.
- R 113. MADSEN, HENRIK OVERGAARD: Load models and load combinations. 1979.
- R 114. RIBERHOLT, H. and P. HAUGE MADSEN: Strength distribution of timber structures. Measured variation of the cross sectional strength of structural lumber. 1979.
- R 115. PEDERSEN, MAX ELGAARD: En generel beregningsmetode for betontværsnit. 1980.
- R 116. PEDERSEN, MAX ELGAARD: Kipstabilitet af armerede betonbjælker. 1980.
- R 117. BRYDER, KAJ U.: Optimeringsmetoder for 2-dimensionale legemer af ideal-plastisk materiale. 1980.
- R 118. DUKOW, EWTIM N.: Optimale Projekterung von vorgepannten Brückenträgern. 1980.
- R 119. PEDERSEN, HENNING: Optimering af jernbetonplader. 1980.
- R 120. BACH, FINN, M.P. NIELSEN and M.W. BRÆSTRUP: Shear tests on reinforced concrete T-beams. Series V, U, X, B and S. 1980.

\*) Udsolgt. Out of print.