



Afdelingen for Bærende Konstruktioner
Department of Structural Engineering
Danmarks Tekniske Højskole · Technical University of Denmark

Plane Revneudbredelsesproblemer i Lineært Viscoelastiske Materialer

Løsning af Plane Lineært Viscoelastiske Randværdi-
problemer med kendt Revneudbredelsesforløb

Rune Brincker

Serie R

No 131

1982

PLANE REVNEUDBREDELSESPROBLEMER
I LINEÆRT VISCOELASTISKE MATERIALER.

Løsning af plane lineært viscoelastiske
randværdiproblemer med kendt
revneudbredelsesforløb.

Rune Brincker

Forord

Denne rapport er den første af en serie på 3 rapporter om plane revneudbredelsesproblemer i lineært viscoelastiske materialer.

I rapporten gennemgås de begreber og redskaber, som er nødvendige for opbygning af en teori til beregning af spændings- og deformationstilstande for plane revneudbredelsesproblemer i lineært viscoelastiske materialer. Teorien forudsætter, at udbredelsesforløbet er kendt på forhånd. Grundlaget for en sådan teori består i det væsentlige af to hovedelementer, nemlig den lineært elastiske revnemekanik, og den lineære viscoelasticitetsteori. Disse grundelementer kombineres så ved hjælp af det vigtige korrespondensprincip til en teori, hvoraf spændings- og tøjningsfeltet i legemet kan bestemmes, og der angives løsninger for de asymptotiske felter omkring en revnespids.

Set fra et anvendelsessynspunkt er en teori, som forudsætter et fuldstændigt kendskab til udbredelsesforløbet, ikke særlig interessant. Det vil tværtimod ofte være sådan, at både revneudbredelsesforløb og spændings- og deformationstilstanden er ukendt, og at det primært er revneudbredelsesforløbet, man ønsker at bestemme. Set fra et brudmekanisk synspunkt er det udbredelsesforløbet, som har størst interesse, idet man ud fra dette kan afgøre, hvornår man vil betragte legemet som definitivt brudt og dermed ubrugeligt som bærende element.

En teori, som forudsætter kendskab til udbredelsesforløbet, er derfor kun et første, men nok så vigtigt, skridt på vejen til en fuldstændig teori, som på grundlag af legemets randbetingelser og begyndelsesbetingelser alene kan give både revneudbredelsesforløbet og legemets indre spændinger og deformationer.

En sådan fuldstændig teori er ikke umiddelbart inden for rækkevidde med de resultater, som er opnået i denne rapport. De resultater, som er opnået her, må suppleres med nogle antagelser. Dels en antagelse vedrørende revnespidsens kinematik, eller spændings- og deformationsforholdene omkring revnespidsen, en såkaldt revnemodel, og dels et udbredelseskriterium, som er en slags fysisk betingelse for revneudbredelse. Disse problemer, samt fremlæggelsen af en

fuldstændig teori, vil blive taget op i de to næste rapporter i serien.

Emnet revnemekanik for viscoelastiske materialer kan ikke betegnes som et egentligt nyt område indenfor revnemekanikken, idet emnet har været genstand for en vis interesse helt siden brudmekanikken som helhed begyndte at vinde udbredelse for 20-25 år siden. Emnet har blot været trængt i baggrunden af andre områder indenfor brudmekanikken, specielt brudteorier for metaller, hvor der tages hensyn til flydning, tøjningshærdning, etc.

De senere år, specielt de sidste 10 år, er interessen for emnet imidlertid steget ganske meget, antagelig p.g.a. en stigende anvendelse af plaststoffer, hvis brudmekaniske egenskaber ofte beskrives dårligt ved revneteorier, som ikke tager hensyn til materialets tidsafhængige egenskaber. Også indenfor træforskningen har der været en stigende interesse for brudmekaniske teorier, som kunne tage hensyn til træets krybning, og her igennem give en beskrivelse af træs reducerede styrke ved langtidslast. Noget tilsvarende kunne man tænke sig indenfor betonområdet.

Sluttelig kan man spørge, om det er nødvendigt eller rimeligt at skrive så meget og dog kun nå et så tilsyneladende lille stykke vej, som det er tilfældet her. Det er da også sandsynligt, at man bagefter kan efterrationalisere og sige, at dette eller hint ikke behøver at tages med i de grundlæggende overvejelser. Erfaringerne fra tidligere arbejder om emnet viser imidlertid, at det især er omkring de grundlæggende principper, at fejl og usikkerhed om gyldighed af løsninger o.s.v. opstår. Det er derfor min egen overbevisning, at det der er mest behov for på nuværende tidspunkt, er en omhyggelig undersøgelse og fremlægning af grundlaget for en teori til analyse af revneudbredelsesproblemer, og ikke så meget et løst funderet gæt på hvordan en sådan teori kan se ud - også selv om flere af de enkelte delelementer i fremstillingen er omtalt mere eller mindre fyldestgørende andre steder i litteraturen.

Når man skal anvende etablerede områder indenfor den teoretiske faststofmekanik til nye ting, vil der ofte, og det er netop tilfældet her, være forudsætninger, som ikke har været særlig vigtige i tidligere anvendelser, men som i den nye anvendelsessituation

spiller en afgørende rolle. Det er selvsagt vigtigt i et sådant tilfælde, at få disse forudsætninger understreget og sat ind i en helhed, og det er sigtet med denne rapport. Formålet har været at understrege de forudsætninger, som knytter sig til anvendelse af de klassiske teorier på revneudbredelsesproblemer for lineært viscoelastiske materialer, og få disse forudsætninger placeret i den helhed, som udgør grundlaget for løsning af sådanne problemer.

Arbejdet med det stof, som ligger til grund for rapporten, er udført ved Afdelingen for Bærende Konstruktioner, DTH, som et licentiatstudium med professor Bent Erik Pedersen som faglærer, hvem jeg gerne vil takke for et godt samarbejde og en god vejledning. Desuden vil jeg gerne rette en tak til lektor Svend Gravesen, som har bidraget med råd og vejledning i forbindelse med visse matematiske problemer. Endelig en tak til Bente Kjølhede Petersen m.fl. for det omhyggelige arbejde med maskinskrivningen af manuskriptet, og til Esther Martens, som har lavet rapportens tegninger.

Lyngby, april 1982

Rune Brincker

INDHOLD

KAPITEL 1

Grundlæggende begreber.	Side
1.1 Tøjninger og spændinger	1
1.2 Bevægelsesligninger og sammenhængsbetingelser	3
1.3 Randbetingelser for plane problemer	4
1.4 Områder, kurver og konturer i planen	7

KAPITEL 2

Lineær elasticitetsteori.

2.1 Fysisk betingelse for lineært elastisk materiale	15
2.2 Plane tilstande	16
2.3 Plane lineært elastiske randværdiproblemer	19
2.4 Løsningens afhængighed af de fysiske konstanter	21

KAPITEL 3

Lineært elastisk revnemekanik.

3.1 Løsning af revneproblemer	23
3.2 Forholdene omkring en revnespids	24
3.3 Revneudbredelseskriterier	27
3.4 Den lineære teoris begrænsninger	35

KAPITEL 4

Lineær viscoelasticitetsteori.

4.1 Fysisk betingelse for lineært viscoelastisk materiale	41
4.2 Lineært viscoelastisk randværdiproblem	43
4.3 Korrespondensprincippet og det klassiske bevis	45
4.4 Grahams bevis	49
4.5 Korrespondensprincippet's gyldighed ved anvendelse på revneudbredelsesproblemer	52

KAPITEL 5

Løsning af lineært viscoelastiske revneproblemer.

5.1 Stationære revneproblemer	56
5.2 Revneudbredelsesproblemer	60

5.3	Eksempel 1, spændingsrandværdiproblem	73
5.4	Eksempel 2, flytningsrandværdiproblem. Revneudbredelse i uendelig lang strimmel	75

APPENDIX A

	En vigtig sætning fra elasticitetsteorien	83
--	---	----

APPENDIX B

Formulering af en integralligning til løsning af et vilkårligt elastisk revneproblem.

B.1	Dislokationer	87
B.2	Formulering af integralligninger	92

APPENDIX C

Fysisk betingelse for lineært viscoelastisk materiale.

C.1	Sammenhæng mellem relaxationsfunktion og krybningsfunktion	96
C.2	Simple fysiske betingelser	97
C.3	Analogværdi og komplekst modul	101
C.4	Matrixrepræsentation af fysisk betingelse	104

APPENDIX D

	Deltafunktion og enhedsfunktion	110
--	---------------------------------	-----

APPENDIX E

Laplacetransformation.

E.1	Definition - transformation og inversion	111
E.2	Sætninger	111

	<u>RESUME</u>	113
--	---------------	-----

	<u>REFERENCER</u>	115
--	-------------------	-----

	<u>STIKORDSREGISTER</u>	120
--	-------------------------	-----

KAPITEL 1.

grundlæggende begreber.

1.1 Tøjninger og spændinger.

Vi betragter et legeme som i referencekonfigurationen er defineret over området Ω i det 3-dimensionale rum. Der er indlagt et kartesisk koordinatsystem, og stedvektoren til punkter i referencekonfigurationen er \underline{x}^0 . Lad \underline{x} betegne stedvektoren til det samme punkt i en deformeret tilstand. Bevægelsehistorien for et hvert punkt i legemet er da beskrevet ved

$$\underline{x}(t) = \underline{x}(\underline{x}^0, t) ; \underline{x}^0 \in \Omega , t \in]-\infty, \infty[\quad (1.1)$$

hvor t er tiden. Flytningsvektoren defineres da som

$$\underline{y}(t) = \underline{x}(t) - \underline{x}^0(t) \quad (1.2)$$

Benyttes tensornotation idet de latinske indices antager værdierne 1, 2, 3, fås ved differentation af (1.2) med hensyn til x_i^0

$$u_{i,j}(t) = x_{i,j}(t) - \delta_{ij} \quad (1.3)$$

hvor der er benyttet betegnelsen $u_{i,j} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j^0}$ og hvor δ_{ij} er Kronecker symbolet. Vi definerer størrelsen ε ved

$$\varepsilon = \sup_{t,i,j} \{ |u_{i,j}(t)| \} \quad (1.4)$$

hvor $\sup \{ \cdot \}$ angiver det mindste tal som er større end eller lig med et hvert element i mængden $\{ \cdot \}$. Vi siger at deformationen er infinitesimal til alle tider t , hvis størrelse $\varepsilon \ll 1$. Såfremt dette er tilfældet defineres den infinitesimale tøjningstensor $\underline{E}(t)$ med komponenterne $\varepsilon_{ij}(t)$ givet ved

$$\varepsilon_{ij}(t) = \frac{1}{2} \left(u_{i,j}(t) + u_{j,i}(t) \right) \quad (1.5)$$

Det kan relativt let indses, at den dobbelt indicerede størrelse ε_{ij} rent faktisk repræsenterer en tensor. Det ses umiddelbart at tensoren $\underline{\underline{E}}$ er symmetrisk, d.v.s. $\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ji}$.

Hvis der er tale om en infinitesimal deformation, hvilket vi i det følgende vil antage er tilfældet, er det ligegyldigt, om man refererer til den deformerede tilstand eller referencekonfigurationen. Vi vil derfor blot skrive f.eks. $\underline{\underline{E}} = \underline{\underline{E}}(\underline{x}, t)$.

Spændingsbegrebet indføres på følgende måde. Lad os tænke os, at vi lægger et glat snit i legemet, således at dette deles i to dellegemer. Lad os betragte det ene af de herved fremkomne dellegemer over området π , med den ved snittet frembragte nye overflade $\partial\pi$. Randområdet $\partial\pi$ er altså den del af den totale rand for området π for hvilket det gælder, at hvert $\underline{x} \in \partial\pi$ er et indre punkt i området Ω . Lad $\underline{x} \in \partial\pi$, og lad fladeudsnittet $\delta\pi(\underline{x})$ med arealet δA betegne en omegn af punktet \underline{x} på fladen $\partial\pi$.

Lad kraften \underline{P} være den resulterende ydre kraft virkende på overfladeudsnittet $\delta\pi(\underline{x})$ for det betragtede dellegeme over området π . Spændingen $\underline{g}(\underline{x})$ i punktet \underline{x} på randen $\partial\pi$ er da defineret ved

$$\underline{g}(\underline{x}) = \lim_{\delta A \rightarrow 0} \left(\frac{\underline{P}}{\delta A} \right) \quad (1.6)$$

Lad $\underline{n}(\underline{x})$ være den udadrettede normal til randen $\partial\pi$ i punktet \underline{x} . Cauchy's fundamentalsætning *) siger da, at der eksisterer et tensorsfelt $\underline{\underline{\Sigma}}(\underline{x})$ defineret for alle indre punkter $\underline{x} \in \Omega$, således at

$$\underline{g}(\underline{x}) = \underline{\underline{\Sigma}}(\underline{x}) \underline{n}(\underline{x}) \quad (1.7)$$

Tensoren $\underline{\underline{\Sigma}} = \underline{\underline{\Sigma}}(\underline{x}, t)$, som kaldes spændingstensoren, og som beskriver de indre kræfter i legemet er, som man vil forvente, og som det vises i næste afsnit, en symmetrisk tensor, d.v.s. at der for de kartesiske komponenter σ_{ij} gælder at $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$.

*) Se f.eks. Wang & Truesdell [15].

Spændingstensoren er defineret for randpunkter $\underline{x}' \in \partial\Omega$ på følgende måde

$$\underline{\Sigma}(\underline{x}') = \lim_{\underline{x} \rightarrow \underline{x}'} \underline{\Sigma}(\underline{x}) ; \underline{x} \in \Omega \quad (1.8)$$

En grundig omtale af tøjnings- og spændingsbegreberne som de er defineret her, samt en undersøgelse af tensorernes egenskaber, er at finde i f.eks. Sokolnikoff [11] eller Muskhelishvili [7].

1.2 Bevægelsesligninger og sammenhængsbetingelser.

Den Newtonske mekaniks bevægelsesligninger, impulssætningen og impulsmomentsætningen, må kræves opfyldt for et hvert dellegeme af det betragtede legeme over området Ω . Det kan vises, se f.eks. Sokolnikoff [11], § 15, at opfyldelse af impulsmomentsætningen er ensbetydende med feltligningen

$$\begin{aligned} \underline{\Sigma}^T(\underline{x}, t) &= \underline{\Sigma}(\underline{x}, t) \\ \Downarrow \\ \sigma_{ij}(\underline{x}, t) &= \sigma_{ji}(\underline{x}, t) , \underline{x} \in \Omega , t \in]-\infty, \infty[\end{aligned} \quad (1.9)$$

D.v.s. at spændingstensoren $\underline{\Sigma}$ er symmetrisk. Det kan desuden vises, se f.eks. Sokolnikoff [11] § 15, at opfyldelsen af impulssætningen er ensbetydende med feltligningerne *)

$$\operatorname{div} \underline{\Sigma}(\underline{x}, t) = \rho \frac{\partial^2}{\partial t^2} (\underline{u}(\underline{x}, t)) - \underline{F}(\underline{x}, t) \quad (1.10)$$

hvor ρ er legemets massetæthed og \underline{F} er en belastningsintensitet for belastningen på legemets indre punkter. Ligning (1.10) kan også skrives på komponentform

$$\sigma_{ij,j}(\underline{x}, t) = \rho \frac{\partial^2}{\partial t^2} (u_i(\underline{x}, t)) - F_i(\underline{x}, t) , \underline{x} \in \Omega , t \in]-\infty, \infty[\quad (1.11)$$

Er der tale om et quastatisk eller statisk problem, d.v.s.

*) vedr. definitionen af divergensen af en tensor, se Truesdell [14]

et problem hvor det for et hvert $\underline{x} \in \Omega$ og et hvert $t \in]-\infty, \infty[$ gælder at

$$\left| \frac{\rho \frac{\partial^2}{\partial t^2} (u_i(\underline{x}, t))}{\sigma_{ij,j}(\underline{x}, t)} \right| \ll 1 \quad (1.12)$$

så reduceres (1.10) og (1.11) til ligevægtsligningen

$$\left. \begin{aligned} \text{div } \underline{\Sigma}(\underline{x}, t) + \underline{F}(\underline{x}, t) &= \underline{0} \\ \text{eller} \\ \sigma_{ij,j}(\underline{x}, t) + F_i(\underline{x}, t) &= 0, \quad \underline{x} \in \Omega, t \in]-\infty, \infty[\end{aligned} \right\} \quad (1.13)$$

Sammenhængsbetingelserne eller kompatibilitetsbetingelserne, som de også kaldes, udtrykker ved betingelser til tøjningskomponenterne ϵ_{ij} , at flytningsfeltet skal være et kontinuert vektorfelt. Sammenhængsbetingelserne kan skrives, se f.eks. Sokolnikoff [11]

$$\epsilon_{ij,kl} + \epsilon_{kl,ij} - \epsilon_{ik,jl} - \epsilon_{jl,ik} = 0 \quad (1.14)$$

De herved givne, ialt 81 ligninger repræsenterer imidlertid kun 6 af hinanden uafhængige betingelsesligninger til tøjningsfeltet $\underline{\epsilon}$.

1.3 Randbetingelser for plane problemer.

På randen af det område over hvilket det betragtede legeme er defineret, stilles der nogle betingelser til feltstørrelserne \underline{y} og $\underline{\Sigma}$. Disse betingelser kaldes problemets randbetingelser. Lad os antage, at det betragtede legeme er defineret over et område Ω i planen. Vi vil da i det følgende gøre rede for hvilke randbetingelser vi vil tillade i et sådant tilfælde.

De randbetingelser, der kan komme på tale, kan deles op i tre forskellige typer, nemlig rene spændingsbetingelser, også kal-

det randbetingelser af 1. art, rene flytningsbetingelser, også kaldet randbetingelser af 2. art, og sidst en blanding af spændingsbetingelser og flytningsbetingelser, også kaldet blandede randbetingelser, eller randbetingelser af 3. art.

De rande, der afgrænser området Ω , deles op i et endeligt antal indbyrdes disjunkte randområder, således at de randbetingelser, der er defineret over hvert enkelt randområde enten er af 1. art, 2. art eller 3. art. Lad $\partial\Omega^{1k}$ betegne det k 'te randområde over hvilket et sæt randbetingelser R^{1k} af 1. art er defineret. Et sæt betingelser R^{1k} af 1. art kan skrives

$$R^{1k} : \underline{\underline{z}}(\underline{x}, t) \underline{\underline{n}}(\underline{x}) = \underline{\underline{z}}^k(\underline{x}, t) \quad , \quad \underline{x} \in \partial\Omega^{1k} \quad , \quad t \in]-\infty, \infty[\quad (1.15)$$

hvor $\underline{\underline{n}}(\underline{x})$ er den udadrettede enhedsnormal til randområdet $\partial\Omega^{1k}$, og $\underline{\underline{z}}^k(\underline{x}, t)$ er et foreskrevet belastningsfelt. Det foreskrevne belastningsfelt kan være både singulært og diskontinuert, blot vil vi forlange, at resultatanten af belastningerne over et vilkårligt delområde af $\partial\Omega^{1k}$ skal have en endelig størrelse.

Lad nu $\partial\Omega^{2k}$ betegne det k 'te randområde over hvilket et sæt randbetingelser R^{2k} af 2. art er defineret. Betingelserne R^{2k} kan skrives

$$R^{2k} : \underline{\underline{u}}(\underline{x}, t) = \underline{\underline{u}}^k(\underline{x}, t) \quad ; \quad \underline{x} \in \partial\Omega^{2k} \quad , \quad t \in]-\infty, \infty[\quad (1.16)$$

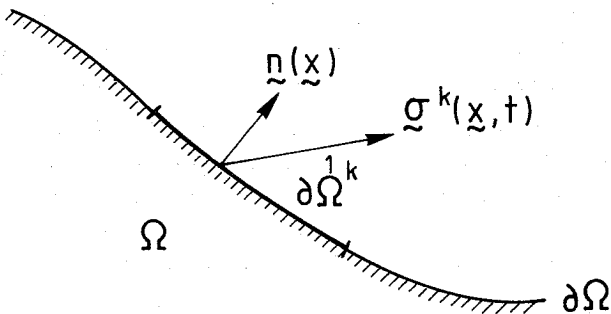
hvor $\underline{\underline{u}}^k(\underline{x}, t)$ er et foreskrevet flytningsfelt.

I dette tilfælde vil vi kræve, at det foreskrevne flytningsfelt $\underline{\underline{u}}^k(\underline{x}, t)$ er en begrænset og stykkevis kontinuert funktion i \underline{x} , $\underline{x} \in \partial\Omega^{2k}$.

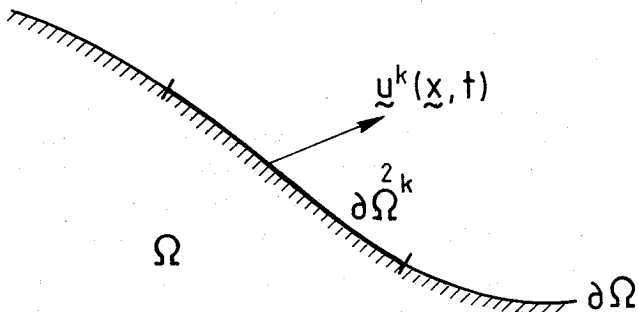
Lad endelig $\partial\Omega^{3k}$ betegne det k 'te randområde over hvilket et sæt blandede randbetingelser R^{3k} er defineret. Lad der endvidere være givet to stationære enhedsvektorfelter $\underline{\underline{u}}(\underline{x})$ og $\underline{\underline{v}}(\underline{x})$, som for et hvert $\underline{x} \in \partial\Omega^{3k}$ opfylder betingelsen *)

*) Normalt vil man formulere problemet så de to enhedsfelter er ortogonale.

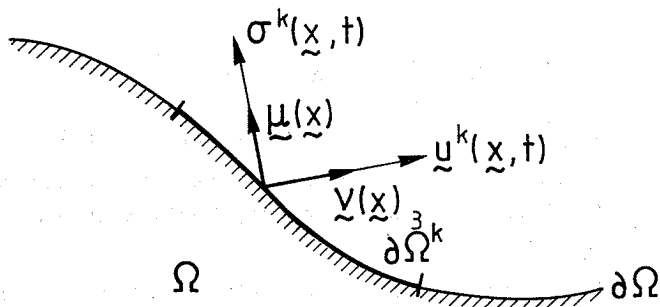
Figur 1.a
Randbetingelser
af 1. art.



Figur 1.b
Randbetingelser
af 2. art.



Figur 1.c
Randbetingelser
af 3. art.



Figur 1.1. De tre typer randbetingelser.

$$\mu(\underline{x}) \cdot \nu(\underline{x}) \neq 1 \quad (1.17)$$

Det generelle sæt blandede betingelser R^k kan da skrives

$$\begin{aligned} R^k : (\sum(\underline{x}, t) \underline{n}(\underline{x})) \cdot \mu(\underline{x}) &= \sigma^k(\underline{x}, t) \\ \underline{u}(\underline{x}, t) \cdot \nu(\underline{x}) &= \underline{u}^k(\underline{x}, t), \quad \underline{x} \in \partial\Omega^k, \quad t \in]-\infty, \infty[\end{aligned} \quad (1.18)$$

hvor $\underline{n}(\underline{x})$ er den udadrettede enhedsnormal til $\partial\Omega^k$, og $\sigma^k(\underline{x}, t)$ og $\underline{u}^k(\underline{x}, t)$ er henholdsvis et foreskrevet skalært belastningsfelt og flytningsfelt. Der stilles de samme krav til felterne $\sigma^k(\underline{x}, t)$ og $\underline{u}^k(\underline{x}, t)$ som til felterne for de rene tilfælde, henholdsvis 1. art og 2. art.

Det er vigtigt at understrege, at vi her må antage alle randområder $\partial\Omega^k$, $\partial\Omega^2$ og $\partial\Omega^3$ stationære, ligesom vi må antage enhedsfelterne $\underline{\mu}$ og $\underline{\nu}$ stationære. Det er imidlertid nødvendigt at gøre disse indskrænkninger hvis korrespondensprincippet, som det er formuleret i kapitel 5, skal benyttes som løsningsmetode.

For randområder af de tre typer $\partial\Omega^k$, $\partial\Omega^2$ og $\partial\Omega^3$ gælder, at et eller flere af dem, specielt kan være blot et enkelt punkt på randen af området Ω .

1.4 Områder, kurver og konturer i planen.

Et område Ω i planen beskrives ved de rande $\partial\Omega^i$, $i = 0, 1, \dots, N$, som afgrænser det. En rand er en lukket kurve (kontur), som beskrives ved den naturlige parameterfremstilling

$$\partial\Omega^i = \{\underline{x} | \underline{x} = \underline{\rho}^i(s)\} \quad (1.19)$$

hvor s er en buekoordinat som regnes positiv på følgende måde. Lad \underline{x}_0 være et punkt inden for konturen $\partial\Omega^i$, og lad θ betegne vinklen fra en fast retning i planen til vektoren $\underline{x} - \underline{x}_0$ målt i planens positive omløbsretning. Et gennemløb langs konturen i dennes positive gennemløbsretning svarer da til en tilvækst i vinklen θ på 2π .

Vi kan ligeledes være interesserede i at tale om ikke lukkede kurver K^1 i planen; også disse er beskrevet ved dens naturlige parameterfremstilling

$$K^1 = \{ \underline{x} \mid \underline{x} = \underline{x}^1(s) \} \quad (1.20)$$

hvor s også her er en buekoordinat. s definerer en positiv gennemløbsretning for kurven.

Ved omegnen $D_r(\underline{x})$ om punktet \underline{x} vil vi forstå det cirkulære område afgrænset af en cirkel med radius r centreret i punktet \underline{x} . En hver tilstrækkelig lille omegn D_r af et punkt \underline{x} på en kurve, vil af kurven blive delt i to åbne områder. Det område, som ligger til venstre for kurven når denne gennemløbes i sin positive gennemløbsretning, vil vi kalde venstreomegnen om \underline{x} og betegne $D^+(\underline{x})$, det andet område vil vi kalde højreomegnen om \underline{x} og betegne $D^-(\underline{x})$.

En kontur $\partial\Omega$, som har den egenskab at det for et hvert $\underline{x} \in \partial\Omega$ gælder at

$$D^+(\underline{x}) \subset \Omega \quad (1.21)$$

siges at være en ydre kontur for området Ω . Et område kan kun have én ydre kontur. Den ydre kontur betegnes som regel $\partial\Omega^0$ eller blot $\partial\Omega$.

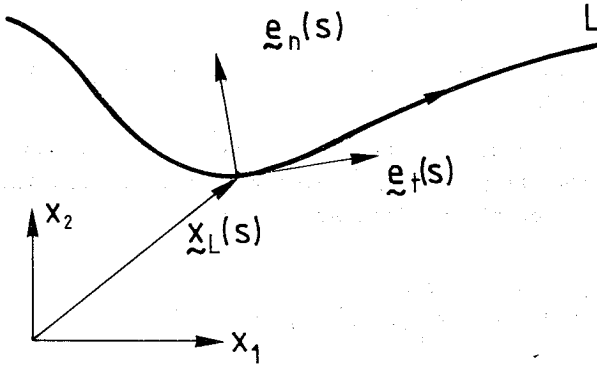
En kontur $\partial\Omega$, som har den egenskab, at det for et hvert $\underline{x} \in \partial\Omega$ gælder at

$$D^-(\underline{x}) \subset \Omega \quad (1.22)$$

siges at være en indre kontur for området Ω . Et område kan have vilkårligt mange indre konturer. De indre konturer betegnes som regel $\partial\Omega^i$, $i = 1, 2, \dots, N$, hvor N er antallet af indre konturer.

Der betragtes nu en vilkårlig åben eller lukket kurve L i planen. Kurven er givet ved sin naturlige parameterfremstilling $\underline{x}_L(s)$. Den positive enhedstangentvektor er da

$$\tilde{e}_t(s) = \frac{d \tilde{x}_L}{ds} \quad (1.23)$$



Figur 1.2. Enhedstangent og enhedsnormal.

Den positive enhedsnormalvektor $\tilde{e}_n(s)$ defineres som tværvektoren til $\tilde{e}_t(s)$, se figur 1.2, altså

$$\tilde{e}_n(s) = \hat{\Delta} \tilde{e}_t(s) \quad (1.24)$$

Lad os nu betragte et punkt \tilde{x}_0 på kurven L svarende til parameterværdien s_0 . Vi definerer da følgende grænseværdier

$$\tilde{e}_t^-(s_0) = \lim_{s \rightarrow s_0^-} \tilde{e}_t(s) ; s < s_0 \quad (1.25)$$

og
$$\tilde{e}_t^+(s_0) = \lim_{s \rightarrow s_0^+} \tilde{e}_t(s) ; s > s_0$$

såfremt

$$\begin{aligned} & \tilde{e}_t^-(s_0) \neq \tilde{e}_t^+(s_0) \\ \Leftrightarrow & \tilde{e}_t^-(s_0) \cdot \tilde{e}_t^+(s_0) \neq 1 \end{aligned}$$

så siges kurven L at have et knæk i punktet \underline{x}_0 .

Lad os betragte et område Ω i planen. Arealet af området vil vi betegne

$$A\{\Omega\} = \int_{\Omega} dx_1 dx_2 \quad (1.26)$$

Lad os endvidere betragte en vilkårlig kontur $\partial\Omega^i$, $i = 0, 1, \dots, N$ for området Ω .

Lad os antage, at konturen $\partial\Omega^i$ har et knæk i punktet $\underline{x}_0 \in \partial\Omega^i$ svarende til parameterværdien s_0 . Såfremt knækket på $\partial\Omega^i$ i $\underline{x}_0 \in \partial\Omega^i$ er af en sådan art, at der gælder at

$$\lim_{r \rightarrow 0} \left\{ \frac{A\{\Omega \cap D_r(\underline{x}_0)\}}{A\{D_r(\underline{x}_0) \cap (\Omega \cap D_r(\underline{x}_0))\}} \right\} > 1 \quad (1.27)$$

så siges området Ω at have en kærv på randen $\partial\Omega^i$ i punktet \underline{x}_0 . En kærv er altså løst formuleret, et i området Ω indadgående knæk på randen $\partial\Omega^i$. I modsat fald, d.v.s. hvis (1.27) ikke er opfyldt, siges området Ω at have en udadgående spids på randen $\partial\Omega^i$ i punktet \underline{x}_0 .

En revnespids er en kærv med et knæk på 180° svarende til at

$$\underline{e}_t^-(s_0) \cdot \underline{e}_t^+(s_0) = -1 \quad (1.28)$$

eller til at venstresiden i (1.27) ikke har nogen endelig grænseværdi.

Såfremt der er en revnespids i området Ω på den ydre rand $\partial\Omega$, siges området at have en overfladerevnespids eller ydre revnespids. Hvis der er en revnespids i området Ω på den indre kontur $\partial\Omega^i$, $i = 1, 2, \dots, N$ siges området at have en indre revnespids.

Et område kan på en enkelt ydre eller indre kontur have enten ingen, en enkelt eller vilkårligt mange revnespidser.

Lad os antage, at området Ω har en revnespids i et punkt på den

ydre eller indre kontur $\partial\Omega^i$ svarende til parameterværdien s_0 , som er et indre punkt i parameterintervallet I for $\partial\Omega^i$.

Lad os endvidere antage at der eksisterer et intervalt $I_{s_0} \subset I$ defineret som det største symmetriske interval om s_0 hvor det for et hvert $s \in I_{s_0}$, $s < s_0$ gælder at der eksisterer et $s' \in I_{s_0}$, $s' > s_0$ således at

$$\rho^i(s') = \rho^i(s) \quad (1.29)$$

Hvis dette er tilfældet, altså hvis intervallet I_{s_0} eksisterer, siges området Ω at have en revne R på konturen $\partial\Omega^i$. Ved revnen R forstås kurven

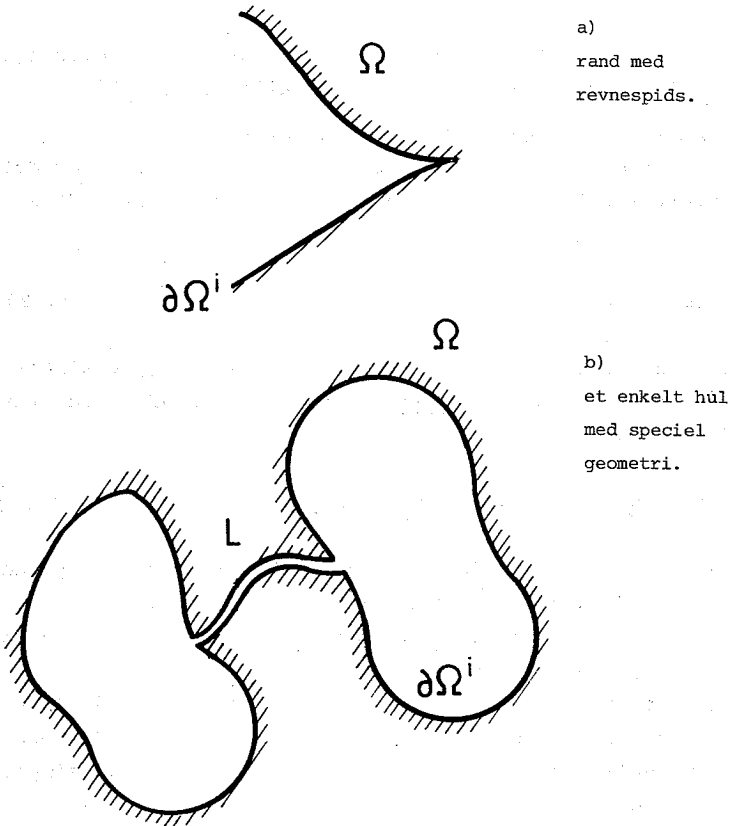
$$R = \{x | x = \rho^i(s) ; s \in I_{s_0}, s \leq s_0\} \quad (1.30)$$

Lad dernu være to revnespidser i to forskellige punkter på en ydre eller indre kontur $\partial\Omega$ svarende til parameterværdierne s_{01} og s_{02} og lad de hertil svarende ovenfor omtalte intervaller $I_{s_{01}}$ og $I_{s_{02}}$ eksistere. Hvis $I_{s_{01}} \cup I_{s_{02}}$ er identisk med parameterintervallet for konturen $\partial\Omega^i$, så siges området Ω at have en simpel revne R på konturen $\partial\Omega^i$. Lad R_1 og R_2 være de til intervallerne $I_{s_{01}}$ og $I_{s_{02}}$ svarende revner, den simple revne R defineres da ved

$$R = R_1 \cup R_2 \quad (1.31)$$

En revne ligger altså altid, som det fremgår af ovenstående, oven i en indre eller ydre rand $\partial\Omega^i$ for området Ω , og det skal bemærkes, at der skelnes mellem selve revnen, givet ved parameterfremstillingen for kurven R og den indre eller ydre rand $\partial\Omega^i$ på hvilken revnen ligger.

Ovenstående definition på hvad vi vil forstå ved en revne, kan godt afvige fra hvad man andre steder definerer. Det skal således bemærkes, at der i området Ω på konturen $\partial\Omega^i$ godt kan være en revnespids uden at der på den samme kontur i henhold til vores definition er tale om nogen revne, se figur 1.3, tilfælde a); ligeledes kan der være tilfælde hvor der kan forekom-



Figur 1.3. Specielle geometrier.

me flytningsdiskontinuiteter langs en kurve L i området Ω , uden at dette falder inden for vores definition af hvad vi vil forstå ved en revne, se figur 1.3, tilfælde b).

Hidtil har vi undladt at tale om muligheden for at randene $\partial\Omega^i$ forandres i tiden t . Referencekonfigurationen svarer normalt til $t = 0$ og betegnes $\partial\Omega^i$, $i = 0, 1, \dots, N$.

Betragt nu en revne R givet ved sin parameterfremstilling $\underline{r}(s)$, $s \in [s_{01}; s_{02}]$. En revne opfattes altid som en del af en kurve K givet ved den samme parameterligning $\underline{r}(s)$, men med et større

definitionsinterval $s \in [s_{01}^*; s_{02}^*]$, altså

$$[s_{01}; s_{02}] \subset [s_{01}^*; s_{02}^*] \quad (1.32)$$

hvor endepunkterne s_{01}^* og s_{02}^* er valgt således at

$$\underline{r}(s_{0\alpha}^*) \in \bigcup_{i=0}^N \partial\Omega^i, \quad \alpha = 1, 2 \quad (1.33)$$

Kurven K 's endepunkter ligger altså begge på en af referencekonfigurationens konturer.

Den ene af endepunkterne for parameterintervallet $[s_{01}; s_{02}]$, lad os sige s_{02} , svarer til en revnespids på en kontur $\partial\Omega^i$ for området Ω . Vi siger at der er tale om udbredelse af revnen R ud fra revnespidsen på konturen $\partial\Omega^i$ langs kurven K såfremt $\partial\Omega^i$ forandres i tiden t på en sådan måde, at

$$v = \frac{d s_{02}}{dt} > 0 \quad (1.34)$$

Stedvektoren $\underline{r}(s_{02}(t))$ beskriver bevægelsen af den betragtede revnespids. Revnespidens hastighed er

$$\begin{aligned} \underline{v}(t) &= \frac{d \underline{r}(s_{02}(t))}{dt} \\ &= \underline{e}_t(s_{02}) v \end{aligned} \quad (1.35)$$

Hvis der til et tidspunkt t om størrelsen v - revnens fart - gælder at

$$v = 0 \quad (1.36)$$

siger vi at revnen er stationær og stabil.

Hvis der gælder at

$$v \in] 0 ; v_{\max}[\quad (1.37)$$

siger vi at revnen udbreder sig stabilt, hvorimod vi vil sige at udbredelsen er ustabil såfremt

$$v \geq v_{\max} \quad (1.38)$$

hvor v_{\max} er en ikke nærmere specificeret maximalt tilladelig fart.

Hvis revnebevægelsen til et givet tidspunkt t^* medfører at $s_{O_2}(t^*) = s_{O_2}^*$, siges den betragtede revnespids at være blevet elimineret til tidspunktet $t = t^*$.

Man bemærker i øvrigt, at elimination af en revnespids altid medfører enten at to konturer smelter sammen til en, og at antallet af konturer således reduceres med én, eller også at området Ω deles i to helt adskilte områder.

Såfremt det sidste er tilfældet taler vi om et fuldstændigt brud, i modsat fald taler vi om et ufuldstændigt brud.

KAPITEL 2.

Lineær elasticitetsteori.

2.1 Fysisk betingelse for lineært elastisk materiale.

Den fysiske betingelse for lineært elastisk materiale beskrives matematisk ved en simpel lineær sammenhæng mellem spændingstensoren $\underline{\underline{\Sigma}}$ og tøjningstensoren $\underline{\underline{E}}$, altså

$$\underline{\underline{\Sigma}} = \underline{\underline{C}} \underline{\underline{E}} \quad (2.1)$$

hvor $\underline{\underline{C}}$ er elasticitetstensoren. På komponentform fås

$$\sigma_{ij} = c_{ijkl} \epsilon_{kl} \quad (2.2)$$

Lad os antage, at der er tale om homogent og isotropt materiale. Tensoren $\underline{\underline{C}}$ er da isotrop, og dens representation kan derfor beskrives ved kun to af hinanden uafhængige konstanter. $\underline{\underline{C}}$ er desuden i dette tilfælde uafhængig af stedet. Den fysiske betingelse kan da skrives

$$\sigma_{ij} = 2\mu \epsilon_{ij} + \lambda \delta_{ij} \epsilon_{kk} \quad (2.3)$$

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2\mu} \sigma_{ij} - \frac{\lambda}{2\mu(3\lambda+2\mu)} \delta_{ij} \sigma_{kk}$$

hvor λ og μ er Lamé konstanterne. Konstanten μ betegnes også forskydningsmodulen. Ud over konstanterne λ og μ er det desuden almindeligt at definere Poissons forhold ν , Youngs modul (elasticitetskoefficienten) E og kompressionsmodulen κ givet ved

$$\nu = \frac{\lambda}{2(\lambda+\mu)} \quad , \quad E = \frac{\mu(3\lambda+2\mu)}{\lambda+\mu} \quad (2.4)$$

$$\kappa = \frac{E}{3(1-2\nu)}$$

De meste almindelige representationer af den fysiske betingelse for isotropt og homogent lineært elastisk materiale er gi-

vet ved (2.3), samt følgende representationer (2.4) og (2.5)

$$\begin{aligned}\sigma_{ij} &= \frac{E}{1+\nu} \left(\epsilon_{ij} + \frac{\nu}{1-2\nu} \delta_{ij} \epsilon_{kk} \right) \\ \epsilon_{ij} &= \frac{1+\nu}{E} \sigma_{ij} - \frac{\nu}{E} \delta_{ij} \sigma_{kk}\end{aligned}\tag{2.4}$$

eller

$$\begin{aligned}\sigma_{ij} &= 2\mu \epsilon_{ij} + \left(\kappa - \frac{2}{3} \mu \right) \delta_{ij} \epsilon_{kk} \\ \epsilon_{ij} &= \frac{1}{2\mu} \sigma_{ij} - \frac{\kappa - \frac{2}{3} \mu}{6\mu\kappa} \delta_{ij} \sigma_{kk}\end{aligned}\tag{2.5}$$

2.2 Plane tilstande.

Ved en plan tilstand forstås en tilstand, som kan beskrives ved en plan teori, altså en teori i kun to af hinanden uafhængige stedkoordinater. Vi vil kun benytte os af kartesiske koordinatsystemer, og de to stedkoordinater, lad det være x_1 og x_2 , fastlægger da punkterne i en plan.

I det følgende antager græske indicis værdierne 1,2. Et legeme siges at være i en plan deformationstilstand eller plan tøjningstilstand over området Ω i x_1x_2 -planen, hvis tilstanden kan beskrives fuldstændigt ved

$$\begin{aligned}u_\alpha &= u_\alpha(\underline{x}) \\ u_3(\underline{x}) &= 0 ; \underline{x} \in \Omega\end{aligned}\tag{2.6}$$

Af definitionen (1.5) følger da at tøjningstensoren $\underline{\underline{E}}$ har representationen

$$\{\varepsilon_{ij}\} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & 0 \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.7)$$

og af den fysiske betingelse f.eks. (2.3) ses at spændingstensoren $\underline{\Sigma}$ har representationen

$$\{\sigma_{ij}\} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & 0 \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{33} \end{pmatrix} \quad (2.8)$$

Af (2.7) og (2.8) ses da at den fysiske betingelse for plan deformationstilstand kan skrives

$$\begin{aligned} \sigma_{\alpha\beta} &= 2\mu \varepsilon_{\alpha\beta} + \lambda \delta_{\alpha\beta} \varepsilon_{\gamma\gamma} \\ \sigma_{33} &= \lambda \varepsilon_{\gamma\gamma} ; \sigma_{13} = \sigma_{23} = 0 \end{aligned} \quad (2.9)$$

Det bemærkes, at (2.6) medfører, at alle spændings- og tøjningskomponenter er uafhængige af x_3 . Kontraktionen af (2.9) giver

$$\sigma_{\gamma\gamma} = 2(\mu + \lambda) \varepsilon_{\gamma\gamma} \quad (2.10)$$

hvoraf fås

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_{\alpha\beta} &= \frac{1}{2\mu} \sigma_{\alpha\beta} - \frac{\lambda}{4\mu(\mu + \lambda)} \delta_{\alpha\beta} \sigma_{\gamma\gamma} \\ \text{og } \varepsilon_{33} &= \frac{\lambda}{2(\mu + \lambda)} \sigma_{\gamma\gamma} \end{aligned} \right\} \quad (2.11)$$

Et legeme siges at være i en plan spændingstilstand over området Ω i x_1, x_2 -planen, hvis det for alle $\underline{x} \in \Omega$ gælder at spændingstensoren har representationen

$$\{\sigma_{ij}\} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & 0 \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.12)$$

og hvor komponenterne $\sigma_{\alpha\beta}$ er uafhængige af x_3 . Af den fysiske betingelse ses da, at tøjningstensoren i dette tilfælde har repræsentationen

$$\{\epsilon_{ij}\} = \begin{Bmatrix} \epsilon_{11} & \epsilon_{12} & 0 \\ \epsilon_{21} & \epsilon_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_{33} \end{Bmatrix} \quad (2.13)$$

Komponenterne $\epsilon_{\alpha\beta}$ og ϵ_{33} er uafhængige af x_3 . Af (2.12) og (2.13) ses, at den fysiske betingelse for plan spændingstilstand kan skrives

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_{\alpha\beta} &= \frac{1}{2\mu} \sigma_{\alpha\beta} - \frac{\lambda}{2\mu(3\lambda+2\mu)} \delta_{\alpha\beta} \sigma_{\gamma\gamma} \\ \epsilon_{33} &= -\frac{\lambda}{2\mu(3\lambda+2\mu)} \sigma_{\gamma\gamma} ; \epsilon_{13} = \epsilon_{23} = 0 \end{aligned} \right\} \quad (2.14)$$

Kontraktionen af (2.14) giver

$$\epsilon_{\gamma\gamma} = \frac{\lambda+2\mu}{2\mu(3\lambda+2\mu)} \sigma_{\gamma\gamma} \quad (2.15)$$

hvoraf fås

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{\alpha\beta} &= 2\mu \epsilon_{\alpha\beta} + \frac{2\lambda\mu}{\lambda+2\mu} \delta_{\alpha\beta} \epsilon_{\gamma\gamma} \\ \epsilon_{33} &= -\frac{\lambda}{\lambda+2\mu} \epsilon_{\gamma\gamma} \end{aligned} \right\} \quad (2.16)$$

Af ovenstående ses det da, at man for begge tilfælde, både plan tøjningstilstand og plan spændingstilstand, kan skrive den fysiske betingelse på formen

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{\alpha\beta} &= 2\mu \epsilon_{\alpha\beta} + \bar{\lambda} \delta_{\alpha\beta} \epsilon_{\gamma\gamma} \\ \epsilon_{\alpha\beta} &= \frac{1}{2\mu} \sigma_{\alpha\beta} - \frac{\bar{\lambda}}{4\mu(\mu+\bar{\lambda})} \sigma_{\gamma\gamma} \end{aligned} \right\} \quad (2.17)$$

hvor det for plan deformationstilstand gælder

$$\{\varepsilon_{ij}\} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & 0 \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.7)$$

og af den fysiske betingelse f.eks. (2.3) ses at spændingstensoren Σ har representationen

$$\{\sigma_{ij}\} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & 0 \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{33} \end{pmatrix} \quad (2.8)$$

Af (2.7) og (2.8) ses da at den fysiske betingelse for plan deformationstilstand kan skrives

$$\begin{aligned} \sigma_{\alpha\beta} &= 2\mu \varepsilon_{\alpha\beta} + \lambda \delta_{\alpha\beta} \varepsilon_{\gamma\gamma} \\ \sigma_{33} &= \lambda \varepsilon_{\gamma\gamma} ; \sigma_{13} = \sigma_{23} = 0 \end{aligned} \quad (2.9)$$

Det bemærkes, at (2.6) medfører, at alle spændings- og tøjningskomponenter er uafhængige af x_3 . Kontraktionen af (2.9) giver

$$\sigma_{\gamma\gamma} = 2(\mu + \lambda) \varepsilon_{\gamma\gamma} \quad (2.10)$$

hvoraf fås

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_{\alpha\beta} &= \frac{1}{2\mu} \sigma_{\alpha\beta} - \frac{\lambda}{4\mu(\mu + \lambda)} \delta_{\alpha\beta} \sigma_{\gamma\gamma} \\ \text{og} \quad \sigma_{33} &= \frac{\lambda}{2(\mu + \lambda)} \sigma_{\gamma\gamma} \end{aligned} \right\} \quad (2.11)$$

Et legeme siges at være i en plan spændingstilstand over området Ω i x_1, x_2 -planen, hvis det for alle $\underline{x} \in \Omega$ gælder at spændingstensoren har representationen

$$\{\sigma_{ij}\} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & 0 \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.12)$$

og hvor komponenterne $\sigma_{\alpha\beta}$ er uafhængige af x_3 . Af den fysiske betingelse ses da, at tøjningstensoren i dette tilfælde har repræsentationen

$$\{\epsilon_{ij}\} = \begin{Bmatrix} \epsilon_{11} & \epsilon_{12} & 0 \\ \epsilon_{21} & \epsilon_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_{33} \end{Bmatrix} \quad (2.13)$$

Komponenterne $\epsilon_{\alpha\beta}$ og ϵ_{33} er uafhængige af x_3 . Af (2.12) og (2.13) ses, at den fysiske betingelse for plan spændingstilstand kan skrives

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_{\alpha\beta} &= \frac{1}{2\mu} \sigma_{\alpha\beta} - \frac{\lambda}{2\mu(3\lambda+2\mu)} \delta_{\alpha\beta} \sigma_{\gamma\gamma} \\ \epsilon_{33} &= -\frac{\lambda}{2\mu(3\lambda+2\mu)} \sigma_{\gamma\gamma} ; \epsilon_{13} = \epsilon_{23} = 0 \end{aligned} \right\} \quad (2.14)$$

Kontraktionen af (2.14) giver

$$\epsilon_{\gamma\gamma} = \frac{\lambda+2\mu}{2\mu(3\lambda+2\mu)} \sigma_{\gamma\gamma} \quad (2.15)$$

hvoraf fås

$$\begin{aligned} \sigma_{\alpha\beta} &= 2\mu \epsilon_{\alpha\beta} + \frac{2\lambda\mu}{\lambda+2\mu} \delta_{\alpha\beta} \epsilon_{\gamma\gamma} \\ \epsilon_{33} &= -\frac{\lambda}{\lambda+2\mu} \epsilon_{\gamma\gamma} \end{aligned} \quad (2.16)$$

Af ovenstående ses det da, at man for begge tilfælde, både plan tøjningstilstand og plan spændingstilstand, kan skrive den fysiske betingelse på formen

$$\begin{aligned} \sigma_{\alpha\beta} &= 2\mu \epsilon_{\alpha\beta} + \bar{\lambda} \delta_{\alpha\beta} \epsilon_{\gamma\gamma} \\ \epsilon_{\alpha\beta} &= \frac{1}{2\mu} \sigma_{\alpha\beta} - \frac{\bar{\lambda}}{4\mu(\mu+\bar{\lambda})} \sigma_{\gamma\gamma} \end{aligned} \quad (2.17)$$

hvor det for plan deformationstilstand gælder

$$\bar{\lambda} = \lambda \quad (2.18)$$

$$\text{og } \sigma_{33} = \frac{\lambda}{2(\mu+\lambda)} \sigma_{\gamma\gamma}$$

og hvor det for plan spændingstilstand gælder at

$$\bar{\lambda} = \frac{2\lambda\mu}{\lambda+2\mu} \quad (2.19)$$

$$\text{og } \epsilon_{33} = -\frac{\lambda}{\lambda+2\mu} \epsilon_{\gamma\gamma}$$

Vi har nu set hvordan den ene af feltligningerne, nemlig den fysiske betingelse, formuleres for de to plane tilfælde. Også de øvrige feltligninger, nemlig ligevægtsbetingelserne (1.13) og sammenhængsbetingelserne (1.14) skal modificeres ved overgangen til en plan teori. Det indses imidlertid let, at ligevægtsligningerne for begge plane tilfælde kan skrives

$$\sigma_{\alpha\beta,\beta} + F_{\alpha} = 0 \quad (2.20)$$

hvor det må forlanges at volumenkræfterne F_{α} er uafhængige af x_3 , samt at $F_3 = 0$. Ligeledes indses det let, at den eneste ikke trivielle sammenhængsbetingelse for begge plane tilfælde er

$$\epsilon_{11,22} + \epsilon_{22,11} - 2\epsilon_{12,12} = 0$$

En nærmere omtale af de plane tilstande, samt den fysiske baggrund for indførelsen af disse begreber, er givet i f.eks. Sokolnikoff, [11].

2.3 Plane lineært elastiske randværdiproblemer.

Betragt et elastisk legeme, som er i en plan tilstand over området Ω i x_1x_2 -planen.

*) det betragtede område kan være et vilkårligt område af den i afsnit 1.3 omtalte type.

Ved et lineært elastisk randværdiproblem over området Ω forstås et problem der består i at bestemme spændingsfeltet $\underline{\Sigma}$ og tøjningsfeltet $\underline{\underline{E}}$, samt flytningsfeltet \underline{u} , for visse på forhånd givne randbetingelser, og volumenkræfter.

Som tidligere nævnt, vil vi se bort fra dynamiske effekter, desuden vil vi se bort fra temperatureffekter. Vi betragter dermed hvad man betegner som et plant isotermt lineært elastostatisk randværdiproblem. Problemets feltligninger er da givet ved (2.17), (2.20) og (2.21), altså

$$\sigma_{\alpha\beta} = 2\mu \epsilon_{\alpha\beta} + \bar{\lambda} \delta_{\alpha\beta} \epsilon_{\gamma\gamma} \quad (2.22)$$

$$\sigma_{\alpha\beta,\beta} + F_{\alpha} = 0 \quad (2.23)$$

$$\epsilon_{11,22} + \epsilon_{22,11} - 2\epsilon_{12,12} = 0 \quad (2.24.a)$$

Hvis Ω er et multisammenhængende område, er (2.24.a) imidlertid ikke tilstrækkeligt til at sikre entydighed af flytningerne. Der kommer i dette tilfælde for hvert hul i området Ω en betingelse af formen

$$\oint_{\Gamma} d\underline{u} = \underline{0} \quad (2.24.b)$$

hvor Γ er en lukket kurve som omslutter det betragtede hul.

Problemets randbetingelser antages at være af formen

$$\begin{aligned} R: & \quad R^1 \wedge R^2 \wedge \dots \wedge R^L \wedge \\ & \quad \wedge R^1 \wedge R^2 \wedge \dots \wedge R^M \wedge \\ & \quad \wedge R^1 \wedge R^2 \wedge \dots \wedge R^N \end{aligned} \quad (2.25)$$

hvor delbetingelserne R^k , R^k og R^k er givet ved henholdsvis (1.15), (1.16) og (1.18).

Hvis randbetingelserne R kun indeholder betingelser af formen R^k siges der at være tale om et randværdiproblem af 1. art, eller et rent spændingsrandværdiproblem. Hvis randbetingelserne R kun indeholder betingelser af formen R^k , samt homogene spæn-

dingsbetingelser, siges der at være tale om et randværdiproblem af 2. art, eller et rent flytningsrandværdiproblem. I alle andre tilfælde er der tale om et blandet randværdiproblem.

Det kan vises, at et elastisk randværdiproblem af ovennævnte type altid har en løsning, og at denne løsning er entydigt bestemt ved (2.22), (2.23), (2.24) og (2.25). Der henvises til elasticitetsteoriens eksistens- og entydighedsbevis, se f.eks. Sokolnikoff [11].

2.4 Løsningens afhængighed af de fysiske konstanter.

Lad os tænke os, at vi har bestemt løsningen $\underline{\Sigma}(\underline{x}, t)$, $\underline{E}(\underline{x}, t)$, $\underline{u}(\underline{x}, t)$ til et randværdiproblem af den ovenfor nævnte type. Løsningen vil da ud over at være en funktion af tid og sted også afhænge af problemets parametre og dermed generelt af de fysiske konstanter, d.v.s.

$$\underline{\Sigma}(\underline{x}, t) = \underline{\Sigma}(\mu, \lambda, \underline{x}, t)$$

$$\underline{E}(\underline{x}, t) = \underline{E}(\mu, \lambda, \underline{x}, t) \quad (2.26)$$

$$\underline{u}(\underline{x}, t) = \underline{u}(\mu, \lambda, \underline{x}, t)$$

Man kan naturligvis også forestille sig afhængigheden af de fysiske konstanter udtrykt ved f.eks. E og ν , $\underline{\Sigma}(\underline{x}, t) = \underline{\Sigma}(E, \nu, \underline{x}, t)$ eller ved f.eks. μ og κ , altså $\underline{\Sigma}(\underline{x}, t) = \underline{\Sigma}(\mu, \kappa, \underline{x}, t)$.

Den lineærelastiske løsnings afhængighed af de fysiske konstanter spiller en afgørende rolle ved anvendelse af korrespondensprincippet til løsning af lineært viscoelastiske randværdiproblemer. Specielt interessant - i forbindelse med anvendelse af korrespondensprincippet - er det tilfælde hvor en feltstørrelse er fuldstændig uafhængig af de fysiske konstanter. I denne forbindelse skal der gøres opmærksom på en vigtig sætning fra elasticitetsteorien. Lad der være givet et elastisk randværdiproblem af den i forrige afsnit omtalte type over det multisammenhængende område Ω i planen. Der gælder da følgende sætning:

Hvis der er tale om et rent spændingsrandværdiproblem, hvor belastningerne på hver af de indre konturer hver for sig udgør et ligevægtssystem, så vil spændingstensoren Σ ikke afhænge af de fysiske konstanter.

Denne sætning vil senere komme til at spille en afgørende rolle ved anvendelsen af korrespondensprincippet på lineært viscoelastiske revneudbredelsesproblemer.

Sætningen er bevist i Muskhelishvili [7], § 44. Det skal i øvrigt bemærkes, at man ikke behøver forlange at belastningerne på hver af de indre konturer udgør et ligevægtssystem, det er tilstrækkeligt at forlange at resultanten er lig med nulvektoren. Et resulterende moment kan altså godt tillades.

Muskhelishvilis bevis er resultatet af grundige undersøgelser af visse fundamentale funktioners struktur, og er således ikke et særligt direkte bevis af sætningen. Ved hjælp af en integral-ligningsformulering kan man imidlertid lave et noget mere direkte og overskueligt bevis. Et sådant er givet i appendix A.

KAPITEL 3.

Lineært elastisk revnemekanik.

3.1 Løsning af revneproblemer.

Ved et revneproblem forstås et randværdiproblem over et område med én eller flere revnespidser. Normalt vil man betegne problemet som løst, hvis blot løsningens asymptotiske egenskaber i omegnene af områdets revnespidser er bestemt.

De matematiske metoder til løsning af revneproblemer må siges at være særdeles veludviklede, en god oversigt over disse metoder er angivet i Sih [10]. De mest effektive og generelle metoder er utvivlsomt dem som er baseret på løsning af singulære integralligninger. Princippet er, at der for hver revne i et område kan formuleres en integralligning af formen

$$a f(x) + b \int_{-1}^1 \frac{f(t) dt}{t-x} + \int_{-1}^1 k(t,x) f(t) dt = g(x), \quad -1 < x < 1 \quad (3.1)$$

hvor $g(x)$ og $k(t,x)$ er kendte funktioner. Funktionen $f(\cdot)$, som bestemmes af ligningen, karakteriserer løsningernes opførsel omkring revnen, og revneproblemet kan derfor normalt betragtes som løst når funktionen $f(\cdot)$ er bestemt.

Der er udviklet særdeles stærke metoder til løsning af singulære integralligninger af formen (3.1). Der henvises til Sih [10] og Krenk [29] og [30]. Der er tale om numeriske metoder, men vel at mærke metoder som angiver løsningen $f(\cdot)$ på analytisk form, d.v.s. som et tilnærmet udtryk

$$f(x) = f(\mu, \kappa, x) \quad (3.2)$$

hvoraf løsningens afhængighed af de elastiske konstanter er givet på lukket form. Dette er ofte en stor fordel, som vi skal se senere, med hensyn til anvendelse af løsningen på det tilsvarende viscoelastiske revneproblem. En vigtig egenskab

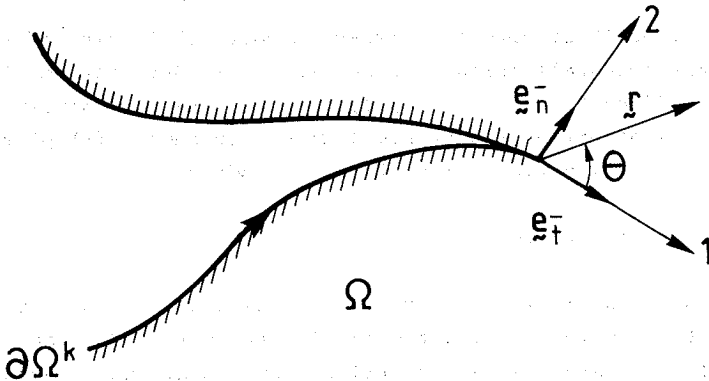
ved denne metode er at den fungerer også selv om funktionerne $g(\cdot)$ og $k(\cdot, \cdot)$ ikke er givet på lukket form.

De i litteraturen angivne eksempler på anvendelse af singulære integralligninger til løsning af revneproblemer, er imidlertid praktisk talt alle karakteriseret ved at nå frem til ligningen (3.1) på måder som forudsætter en relativt speciel problemstilling, f.eks. symmetriske eller antimetriske forhold, eller lignende.

Vil man anvende en integraligningsmetode til løsning af et lineært elastisk revneproblem, vil det største problem i denne forbindelse ofte være at få revneproblemet formuleret som et integralligningsproblem. Der er derfor i appendix B angivet en metode ved hjælp af hvilken et (næsten) vilkårligt revneproblem kan formuleres som et integralligningsproblem af typen (3.1).

3.2 Forholdene omkring en revnespids.

Set fra et revnemekanisk synspunkt er det udelukkende løsningsfeltens asymptotiske egenskaber i omegnene af det betragtede områdes revnespidser, der har interesse.



Figur 3.1. Lokale koordinater (r, θ)

Lad os betragte et område Ω som på den indre eller ydre kontur $\partial\Omega^k$, $k = 0, 1, \dots, N$. har en revnespids i punktet $\underline{x}' \in \partial\Omega^k$. Lad os indlægge et lokalt koordinatsystem med begyndelsespunkt i \underline{x}' og x_1 -aksen i retning efter tangentvektoren $\underline{e}_t^-(\underline{x}')$ og x_2 -aksen i retning efter normalvektoren $\underline{e}_n^-(\underline{x}') = \hat{\underline{e}}_t^-(\underline{x}')$, se figur 3.1. Det kan vises, se f.eks. Liebowitz [6], at det første led i en asymptotisk rækkeudvikling af de kartesiske komponenter af spændingstensoren $\underline{\Sigma}$ og flytningsvektoren \underline{y} efter det lokale x_1, x_2 koordinatsystem altid har formen

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{11} &= \frac{1}{\sqrt{2r}} \left\{ k_1 \cos(\theta/2) [1 - \sin(\theta/2) \sin(3\theta/2)] + \right. \\ &\quad \left. - k_2 \sin(\theta/2) [1 + \cos(\theta/2) \cos(3\theta/2)] \right\} \\ \sigma_{22} &= \frac{1}{\sqrt{2r}} \left\{ k_1 \cos(\theta/2) [1 + \sin(\theta/2) \sin(3\theta/2)] + \right. \\ &\quad \left. + k_2 \sin(\theta/2) \cos(\theta/2) \cos(3\theta/2) \right\} \\ \sigma_{12} &= \frac{1}{\sqrt{2r}} \left\{ k_1 \sin(\theta/2) \cos(\theta/2) \cos(3\theta/2) + \right. \\ &\quad \left. + k_2 \cos(\theta/2) [1 - \sin(\theta/2) \sin(3\theta/2)] \right\} \end{aligned} \right\} (3.3)$$

og

$$\left. \begin{aligned} u_1 &= \frac{1}{2\mu} \sqrt{2r} \left\{ k_1 \cos(\theta/2) \left(\frac{\alpha-1}{2} + \sin^2(\theta/2) \right) + \right. \\ &\quad \left. + k_2 \sin(\theta/2) \left(\frac{\alpha+1}{2} + \cos^2(\theta/2) \right) \right\} + u_1' \\ u_2 &= \frac{1}{2\mu} \sqrt{2r} \left\{ k_1 \sin(\theta/2) \left(\frac{\alpha+1}{2} - \cos^2(\theta/2) \right) + \right. \\ &\quad \left. + k_2 \cos(\theta/2) \left(-\frac{\alpha-1}{2} + \sin^2(\theta/2) \right) \right\} + u_2' \end{aligned} \right\} (3.4)$$

hvor r er længden af den lokale stedvektor \underline{r} til det betragtede punkt, og θ er vinkelen fra x_1 -aksen til \underline{r} . Konstanten α afhænger af de elastiske konstanter

$$\alpha = \frac{\lambda+3\mu}{\lambda+\mu} \quad (3.5)$$

hvor λ erstattes med $\bar{\lambda} = \frac{2\mu\lambda}{\lambda+2\mu}$ for plan spændingstilstand, og $\underline{u}' = (u_1', u_2')$ angiver flytningen af punktet \underline{x}' .

Spændingsfeltet omkring en revnespids i et lineært elastisk medium ses altså at være karakteriseret ved at alle komponenterne går mod uendelig ligesom $r^{-\frac{1}{2}}$ når $r \rightarrow 0$. Da man således ikke kan tale om spændingerne i selve revnespidsen, karakteriseres spændingstilstanden i revnespidsen i stedet for ved de to faktorer k_1 og k_2 . Den funktionelle afhængighed er jo fuldstændig fastlagt på forhånd, og feltstørrelserne omkring revnespidsen kendes derfor, hvis blot disse konstanter er kendte. Konstanterne k_1 og k_2 beskriver singularitetens styrke eller intensitet ved den betragtede revnespids, og kaldes derfor for revnespidsen spændingsintensitetsfaktorer.

Konstanten k_1 beskriver den symmetriske del af spændings- og flytningsfelt, også betegnet mode 1, og konstanten k_2 beskriver den antimetriske del af spændings- og flytningsfelt, også betegnet mode 2.

Spændingerne σ_{22} og σ_{12} langs x_1 -aksen, $x_1 > 0 \Rightarrow \theta = 0$, findes af (3.3) til

$$\sigma_{22} = \frac{k_1}{\sqrt{2r}} \quad (3.6)$$

$$\sigma_{12} = \frac{k_2}{\sqrt{2r}}$$

hvoraf ses, at intensitetsfaktorerne kan bestemmes af

$$k_1 = \lim_{r \rightarrow 0} \sqrt{2r} \sigma_{22}(\theta=0, r) \quad (3.7)$$

$$k_2 = \lim_{r \rightarrow 0} \sqrt{2r} \sigma_{12}(\theta=0, r)$$

Den asymptotiske deformation af $\partial\Omega^k$ for $s > s'$ findes af (3.4) for $\theta = \pi$ til

$$\begin{aligned} u_1^k &= k_2 \frac{\alpha+1}{4\mu} \sqrt{2r} + u_1' \\ u_2^k &= k_1 \frac{\alpha+1}{4\mu} \sqrt{2r} + u_2' \end{aligned} \quad (3.8)$$

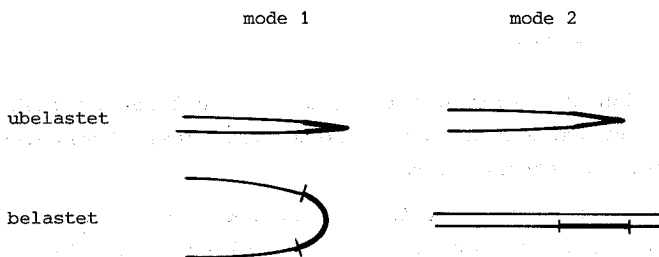
hvor $\underline{u}' = (u_1', u_2')$ er flytningen af \underline{x}' .

Af (3.8) ses, at spændingsintensitetsfaktorerne også kan findes af

$$k_1 = \frac{4\mu}{\alpha+1} \lim_{r \rightarrow 0} \left\{ \sqrt{2r} \frac{d}{dr} (u_2^k - u_2^i) \right\} \quad (3.9)$$

$$k_2 = \frac{4\mu}{\alpha+1} \lim_{r \rightarrow 0} \left\{ \sqrt{2r} \frac{d}{dr} (u_1^k - u_1^i) \right\}$$

Af udtrykket (3.8) ses det endvidere, at der sker voldsomme deformationer af materialet omkring revnespidsen. Det ses, som det er anskueliggjort på figur 3.2, at den oprindelige 180°'s kærve på $\partial\Omega^k$ i den udeformerede tilstand bliver "lukket op", således, at den til $\partial\Omega^k$ svarende kurve i den deformerede tilstand er glat omkring det til revnespidsen svarende punkt.



Figur 3.2. Flytningstilstande ved en revnespids.

Med hensyn til en nærmere analyse af forholdene omkring en revnespids henvises der til Irwin [24] og Williams [33].

Spændingsintensitetsfaktorer for en mængde lineært elastiske revneproblemer kan findes i håndbøger, f.eks. Sih [9] eller Tada [13].

3.3 Revneudbredelseskriterier.

Ved et revneudbredelseskriterium forstås en fysisk betingelse

for revneudbredelse. Revneudbredelseskriteriet beskriver hvilke tilstande der for materialet omkring en revnespids giver anledning til forskellige former for brud. Det er således klart, at et udbredelseskriterium i sin formulering både må indeholde tilstandsparametre og materialeparametre.

Lad os betragte et rent mode-1 tilfælde, d.v.s. en revnespids ved hvilken det for spændingsintensitetsfaktorerne k_1 og k_2 gælder at $k_1 \neq 0$ og $k_2 = 0$. I dette tilfælde er alle feltstørrelser asymptotiske egenskaber omkring revnespiden fuldstændigt beskrevet ved spændingsintensitetsfaktoren k_1 . Da påvirkningen af materialet i en omegn af den betragtede revnespids alene er bestemt af feltstørrelsernes asymptotiske egenskaber, og da materialepåvirkningen tiltager med voksende k_1 , er det klart, at revneudbredelseskriteriet for et lineært elastisk mode-1 tilfælde kan skrives

$$k_1 \geq k_{1c} \quad (3.10)$$

hvor den øvre grænse for k_1 , angivet ved den kritiske værdi k_{1c} , er bestemt af materialets egenskaber. Størrelsen k_{1c} er derfor en materialeparameter.

I det generelle tilfælde hvor både $k_1 \neq 0$ og $k_2 \neq 0$, vil revneudbredelseskriteriet dele k_1, k_2 planen i to disjunkte områder Δ_s og Δ_c . Området Δ_s er et sikkert område forstået på den måde, at et hvert punkt $(k_1, k_2) \in \Delta_s$ svarer til en sikker tilstand, d.v.s. en tilstand som ikke giver anledning til revneudbredelse, medens området Δ_c er et kritisk område hvor det modsatte er tilfældet. Det kritiske område Δ_c er en lukket punktmængde. Randkurven $\partial\Delta_c$, som afgrænser det kritiske område Δ_c , er altså hvad man i almindelighed forstår ved en generaliseret brudflade. Det er almindeligt at antage, at brudfladens form ikke afhænger af materialets egenskaber^{*)}. Hvis dette antages at være tilfældet, kan revneudbredelseskriteriet i det generelle tilfælde skrives

*) Der betragtes kun lineært elastiske materialer.

$$F(k_1, k_2) \geq F_C \quad (3.11)$$

hvor den kritiske størrelse F_C er en materialeparameter. Et generelt udbredelseskriterium af formen (3.11) blev foreslået af Sih, Paris og Erdogan [31] i 1962.

Lad os nu betragte et legeme som et isoleret thermodynamisk system, med tøjningsenergien E_ϵ , den kinetiske energi E_k , og de ydre kræfters potentiale E_p . Systemets totale energi er da

$$E = E_\epsilon + E_k + E_p + E_Q \quad (3.12)$$

hvor E_Q er summen af de energier, som ikke er indeholdt i de øvrige led, f.eks. overfladeenergi og varmeenergi.

Lad os nu antage, at legemet har en revnespids på den ydre eller indre kontur, og at der sker udbredelse af en revne ud fra denne revnespids langs en kurve K . Revnespidsens position på kurven K er beskrevet ved parameteren s^*). Antages problemet at være quasistatisk, kan energibalanceligningen skrives

$$\frac{\partial E_\epsilon}{\partial s} + \frac{\partial E_p}{\partial s} + \frac{\partial E_Q}{\partial s} = 0 \quad (3.13)$$

eller

$$G_K = \frac{\partial E_Q}{\partial s} \quad (3.14)$$

hvor

$$G_K = - \frac{\partial}{\partial s} (E_\epsilon + E_p)$$

Størrelsen G_K angiver energiomsætningen eller dissipationen pr. udbredelsesenhed ved den betragtede revneudbredelsesproces.

*) Parameteren s er en aldrig aftagende funktion af tiden t , jvnf. afsnit 1.4.

G_K betegnes derfor energimomsætningshastigheden *) for revneudbredelse langs kurven K.

Det mest kendte og mest velunderbyggede revneudbredelseskriterium er uden tvivl Griffith's udbredelseskriterium som blev formuleret af ham selv i [22] i 1921 for perfekt sprøde materialer **, og senere generaliseret af Orowan [37] og Irwin [25] til også at gælde for ikke perfekt sprøde materialer.

Griffith's udbredelseskriterium kan formuleres som følger. Lad udbredelseskurven K være givet, og lad revnespidsen befinde sig i positionen s_0 på kurven K. Revnen vil da udbrede sig ud fra positionen s_0 langs kurven K hvis og kun hvis

$$G_K(s_0) \geq G_C \quad (3.15)$$

eller formuleret i ord. Der vil ske udbredelse fra positionen s_0 langs kurven K hvis og kun hvis energimomsætningshastigheden er større end eller lig med en kritisk værdi. Den kritiske værdi G_C er en materialeparameter. Hvis udbredelseskurven K er glat, kan det let vises, se f.eks. Gravesen [3], at

$$G_K(s_0) = \frac{\pi}{8} \frac{\alpha+1}{\mu} (k_1^2 + k_2^2) \quad (3.16)$$

hvor k_α er spændingsintensitetsfaktorerne for revnespidsen i

*) I engelsksproget litteratur benyttes betegnelserne "the crack extension force" (p.g.a. dimensionen kraft) og "the energy release rate". Den sidste betegnelse er nok den der dækker det begrebsmæssige indhold af G_K bedst.

***) Griffith antog oprindeligt, at al den omsatte energi blev til overflade energi. En sådan antagelse er kun korrekt for materialer man i dag betegner som perfekt sprøde materialer.

positionen s_0 på kurven K , og hvor

$$\frac{\alpha+1}{8\mu} = \begin{cases} \frac{1-\nu^2}{E} & \text{for plane def.tilst.} \\ \frac{1}{E} & \text{for plane spænd.tilst.} \end{cases} \quad (3.17)$$

Griffith's udbredelseskriterium er altså et kriterium af formen (3.11). Af (3.10) og (3.16) ses, at Griffith's kriterium kan gives den enkle form

$$k_1^2 + k_2^2 \geq k_{1c}^2 \quad (3.18)$$

Hvis udbredelseskurven K ikke er glat, hvad der ofte i praksis kan være tilfældet, så er forholdene langt mere komplicerede. Problemet er behandlet nærmere i det følgende.

Man er ved løsning af et revneudbredelsesproblem normalt stedt i den situation, at udbredelseskurven K er ukendt. Det vil sige, at man ikke blot har brug for metoder til bestemmelse af om revneudbredelse overhovedet vil finde sted, men også metoder til bestemmelse af kurven K langs hvilken dette eventuelt vil ske.

I litteraturen er omtalt 2 totale kriterier d.v.s. kriterier som giver svar på begge dele, og 2 delvise kriterier, som kun bestemmer udbredelseskurven K .

Det ene af de to totale kriterier er Griffith's generaliserede udbredelseskriterium eller som det også benævnes, princippet om maximal energiomsætningshastighed, og det andet er Sih's S-kriterium eller som det også kaldes princippet om minimal energitæthed.

De to delvise kriterier til bestemmelse af banekurven K er dels princippet om maximale spændinger, og princippet om lokal symmetri.

Lad os nu fjerne antagelsen om at udbredelseskurven K er glat. Lad K have et muligt knæk svarende til parameterværdien s_0 , og lad revnespidsens position være s_0^- . Hvis K har et knæk i s_0 er opgaven nu at bestemme dette knæk karakteriseret ved vink-

len β fra $e_t^-(s_0)$ til $e_t^+(s_0)$. Se ligning (1.25) og figur 3.3.

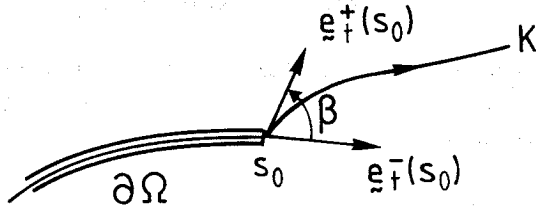


Fig. 3.3. Et knæk på udbredelseskurven K i punktet svarende til $s = s_0$.

Griffith's udbredelseskriterium benyttes her på følgende måde. Bestem energiomsætningshastigheden

$$G_K^+ = \lim_{s \rightarrow s_0} G_K(s), \quad s > s_0 \quad (3.19)$$

for alle β , $-\pi < \beta < \pi$. G_K^+ afhænger af β , samt af intensitetsfaktorerne k_1^- og k_2^- for revnespidserne i positionen s_0^- (umiddelbart før knækket), altså

$$G_K^+ = G(k_1^-, k_2^-, \beta) \quad (3.20)$$

Udbredelseskriteriet har i dette tilfælde formen

$$\sup_{\theta} G(k_1^-, k_2^-, \theta) \geq G_c \quad (3.21)$$

og udbredelsesretningen givet ved vinklen β findes af ligningen

$$G(k_1^-, k_2^-, \beta) = \sup_{\theta} G(k_1^-, k_2^-, \theta) \quad (3.22)$$

Udtrykt i ord kan Griffith's kriterium formuleres på følgende

måde. Hvis der eksisterer en vinkel θ , $-\pi < \theta < \pi$, for hvilken $G(k_1^-, k_2^-, \theta)$ er større end eller lig med en kritisk værdi G_C , så vil der ske revneudbredelse, og udbredelsesretningen er givet ved den værdi af β for hvilken $G(k_1^-, k_2^-, \beta)$ antager sin maksimale værdi.

De matematiske og fysiske vanskeligheder i forbindelse med anvendelsen af Griffith's kriterium på problemer med revneudbredelse langs en ikke glat kurve K , er imidlertid store. Emnet er faktisk lidt ømtåligt, idet en del arbejder herom beskyldes for at være fejlbehæftede. Den bedste og grundigste undersøgelse af problemet er nok foretaget af Wu i hans tre artikler [34], [35] og [36].

Spændingsintensitetsfaktorerne k_1^+ og k_2^+ for revnespiden i positionen s_0^+ (umiddelbart efter knækket) må være funktioner af k_1^- , k_2^- og β , altså

$$k_\gamma^+ = k_\gamma^+(k_1^-, k_2^-, \beta), \quad \gamma = 1, 2 \quad (3.23)$$

Nogle af Wu's vigtigste resultater er, at han af sine numeriske undersøgelser mener at kunne konkludere at

$$G_k^+ = \frac{\pi}{8} \frac{\alpha+1}{\mu} \left\{ \left(k_1^+\right)^2 + \left(k_2^+\right)^2 \right\} \quad (3.24)$$

og at den maksimale værdi af energiomsætningshastigheden G_K^+ antages for en værdi af β hvor

$$k_2^+(k_1^-, k_2^-, \beta) = 0 \quad (3.25)$$

Hvis ligning (3.24) gælder, hvad der imidlertid ikke er ført noget egentligt matematisk bevis for, så er Griffith's kriterium anvendt i det generelle tilfælde også et kriterium af formen (3.11).

Medens Griffith's kriterium bygger på visse almindeligt accepterede thermodynamiske principper, er Sih's S-kriterium [32] mere postulatpræget. Til gengæld er det en hel del nemmere at anvende.

Lad os nu igen betragte revnespidsen i s_0^- , altså umiddelbart før et knæk på udbredelseskurven. Sih beregner tøjningsenergitætheden w omkring revnespidsen, og viser, at der asymptotisk gælder

$$w = \frac{S(k_1^-, k_2^-, \theta)}{r} \quad (3.26)$$

hvor r , θ er sædvanlige polære koordinater. Størrelsen S kaldes energitæthedsfaktoren, og det viser sig at den kan skrives som en kvadratisk form i k_1^- og k_2^- , altså

$$S(k_1^-, k_2^-, \theta) = a_{11}(k_1^-)^2 + 2a_{12}k_1^-k_2^- + a_{22}(k_2^-)^2 \quad (3.27)$$

Koefficienterne $a_{\alpha\beta}$ er kendte funktioner af θ og de elastiske konstanter.

Sih's S -kriterium siger da, at revneudbredelse vil finde sted hvis og kun hvis der eksisterer en værdi af θ for hvilken S antager en stationær værdi samtidig med et lokal minimum således at

$$S(k_1^-, k_2^-, \theta) \geq S_c \quad (3.28)$$

hvor S_c antages at være en materialeparameter. Revneudbredelsesretningen givet ved vinklen β findes af ligningen

$$\frac{\partial S}{\partial \theta} = 0 \quad (3.29)$$

En stor fordel ved Sih's kriterium er, at ligningen (3.29) er langt lettere at løse end den tilsvarende ligning (3.22) for Griffith's kriterium; noget tilsvarende gælder for betingelsen (3.28) sammenlignet med (3.21).

De to delvise kriterier udtaler sig kun om hvilken udbredelseskurve revnen vil følge hvis den udbreder sig, men ikke om en sådan udbredelse virkelig vil finde sted. De kan derfor ikke benyttes alene, men må suppleres med en eller anden form for udbredelseskriterium.

Lad de polære spændingskomponenter for den asymptotiske løsning omkring revnespiden være σ_{rr} , $\sigma_{\theta\theta}$ og $\sigma_{r\theta}$. Princippet om maximale spændinger, introduceret af Erdogan og Sih [17], siger da, at en eventuel udbredelse vil ske i den retning for hvilken størrelsen $\sqrt{r} \sigma_{\theta\theta}$ antager sin maksimale værdi. Udbredelsesretningen givet ved vinklen β bestemmes altså af

$$\sqrt{r} \sigma_{\theta\theta}(k_1^-, k_2^-, \beta) = \sup_{\theta} \sqrt{r} \sigma_{\theta\theta}(k_1^-, k_2^-, \theta) \quad (3.30)$$

Princippet om lokal symmetri sådan som det er formuleret af Gol'dstein og Salganik [19] siger, at udbredelseskurven skal bestemmes sådan, at der for enhver position af revnespiden på udbredelseskurven er tale om en ren mode-1 tilstand. Udbredelsesretningen givet ved vinklen β bestemmes altså af

$$k_2^+(k_1^-, k_2^-, \beta) = 0 \quad (3.31)$$

Hvis Wu's konklusion angivet i (3.25) er korrekt, så er Griffith's kriterium og princippet om lokal symmetri ensbetydende med hensyn til bestemmelse af udbredelseskurver.

Der har været udført en del undersøgelser med henblik på sammenligning mellem resultaterne fra de forskellige teorier. Disse viser alle samstemmende relativt små indbyrdes afvigelser mellem resultaterne fra de forskellige kriterier, og det kan derfor konkluderes, at det i langt de fleste tilfælde, set fra et praktisk synspunkt, er ligegyldigt hvilket kriterium man vælger. Blot skal det nævnes, at Sih's S-kriterium til forskel fra de andre kriterier involverer de elastiske konstanter på en måde som er i strid med den grundlæggende antagelse om brudfladens formuafhængighed af materialet. Hvorvidt det er rimeligt at antage det ene eller det andet må endnu betragtes som et uafklaret spørgsmål.

3.4 Den lineære teoris begrænsninger.

Det er klart, at en lineær teori har sine begrænsninger, og

at man i hvert enkelt tilfælde må vurdere hvorvidt det er rimeligt at benytte en sådan teori på det foreliggende problem.

På den anden side er det også klart, at der ikke er nogen grund til at "forfine" eller "forbedre" en teori med mindre der opnås konkrete fordele herved, såsom forenklinger med hensyn til teoriens anvendelse, eller forøgelse af kvaliteten af løsningerne på de problemer man ønsker at undersøge med teorien.

Det er imidlertid almindeligt indenfor revnemeknikken at benytte sig af modificerede teorier også i tilfælde hvor dette slet ikke er nødvendigt. Grunden er nok, at det generer manges intuition at skulle arbejde med elasticitetsteoriens singulære løsninger, og man introducerer derfor forskellige revnemodeler^{*)} som man mener ligger tættere på virkeligheden.

Der er nok heller ingen tvivl om at de forskellige revnemodeler i mange tilfælde er mere realistiske end den lineærelastiske løsning, og man ved indførelse af dem har bidraget væsentligt til en mere dybtgående forståelse af revnemeknikken. Desuden muliggør deres indførelse behandling af problemer, som ligger uden for den lineære revnemekaniks rammer, samt en mulighed for at vurdere om anvendelsen af en lineær teori i en given situation er rimelig. Den ikke lineære revnemekanik og dens modeller er udførligt omtalt i Hutchinson [4].

Det synspunkt der imidlertid skal argumenteres for her er, at det vil være en ufornuftig disposition at trækkes med den ikke lineære revnemekaniks tunge formalisme, hvis den eneste begrundelse herfor reelt er, at den lineærelastiske løsning er i strid med ens intuition. Den eneste rimelige begrundelse for at benytte den ikke lineære revnemekanik må være, at den lineære teori giver dårligere resultater end man kan acceptere.

Vi vil her beslutte, at begrænse os til udelukkende at behandle problemer hvor en lineær teori kan anvendes, idet det viser sig at være forbundet med store matematiske fordele at arbejde

*) Ved en revnemodel forstås normalt en eller anden antagelse om spændingsfordelingen i et område (flydezonen) lige omkring revnespidsen.

med de singulære spændings- og tøjningsfelter.

Den lineære teori kan bruges, hvis det område omkring revnespid- sen hvor afvigelser fra den lineært elastiske løsning bliver mærkbar (området betegnes frontzonen eller flydezonen) har en udstrækning, som er passende lille sammenlignet med alle andre karakteristiske geometrika for legemet, f.eks. revnelængden, af- standen fra revnespiden til den nærmeste rand, o.lign.

Flydezonens udstrækning Δa for en single-mode tilstand kan for lineær-ideal-plastisk materiale og for små værdier af Δa sammen- lignet med revnelængden vurderes af, se Olhoff [38]

$$\Delta a = \frac{\pi}{8} \left(\frac{k}{\sigma_c} \right)^2 \quad (3.32)$$

hvor k er tilstandens spændingsintensitetsfaktor, og σ_c er ma- terialets flydespænding for den pågældende påvirkning for prøve- legemer af samme størrelsesorden som flydezonens udstrækning.

Vi vil til slut gøre os nogle overvejelser over den lineære teoris singulære løsninger, og om de nødvendigvis er så urime- lige som mange mener.

Den lineære teoris singulære tøjningsfelter må siges at være i stærk strid med den grundlæggende antagelse om infinitesimale tøjninger, se afsnit 1.1. Man kunne derfor forestille sig, at anvendelsen af en lineær elasticitetsteori for store tøjninger ville give løsninger som ikke var singulære. Dette viser sig blot ikke at være tilfældet. Tværtimod fremgår det af Knowles og Sternbergs analyser, [27] og [28], af de elastostatiske fel- ter omkring en revnespids ved hjælp af store deformationers teori, at løsningerne også her bliver singulære, endda på nøj- agtig samme måde som den klassiske teoris løsninger. Noget til- svarende gør sig gældende ved anvendelse af momentspændingsteo- ri eller mikropolar elasticitetsteori, se Atkinson og Lepping- ton [16]. Disse mere avancerede teoriers løsningers asymptotiske egenskaber er ikke kvalitativt forskellige fra den klassiske elasticitetsteoris løsninger.

Forsøg med gummi, se f.eks. Knauss [26] viser desuden en meget smuk overensstemmelse mellem målinger og den klassiske teoris

løsning for flytningsfeltet omkring en revnespids.

Måske kan det konkluderes, at den klassiske elasticitetsteoris løsninger, selv om de er singulære ved revnespidsen, måske slet ikke er så urealistiske endda.

Nogle forkaster muligvis den klassiske teoris resultater fordi de mener at de makroskopiske brudkriterier, se B. Paul [6] , også må kunne anvendes på materialet omkring en revnespids, og de opfatter måske de specielle kriterier, som man bruger på revneproblemer, som et bevis på at teorien bygger på et urealistisk grundlag. Den naturlige følgekonsklusion heraf er derfor, at de singulære løsninger må være en abstraktion, som er fundamentalt i strid med virkeligheden.

Man skal være lidt forsigtig med sådanne slutninger. Vi vil afslutte overvejelserne omkring rimeligheden af den klassiske teoris løsninger med at påvise, at de makroskopiske brudkriterier er endog særdeles nært beslægtede med Griffith's kriterium sådan som det er formuleret i ligning (3.18), selv om det ikke ser sådan ud ved første øjekast.

Vi vil tage udgangspunkt i von Mises flydebetingelse for plan spændingstilstand, som kan skrives

$$\sigma_{11}^2 + \sigma_{22}^2 - \sigma_{11}\sigma_{22} + \sigma_{12}^2 \geq \sigma_c^2 \quad (3.33)$$

hvor σ_c er materialets flydespænding. Spændingsbegrebet , som det er indført i afsnit 1.1, er et matematisk begreb, som bygger på opfattelsen af et legeme som et kontinuum, jvnf. definitionen af spændingsbegrebet i ligningerne (1.6) og (1.7). Det fremgår her, at forudsætningen for at kunne tale om "spændingerne i et punkt" er knyttet til antagelsen om det meningsfulde i at tale om vilkårligt små arealelementer på overfladen af et legeme. Da et hvert materiale imidlertid på et eller andet niveau er rumligt diskretiseret, d.v.s. sammensat af "byggesten" med en vis karakteristisk størrelse karakteriseret ved en vis længde, lad os sige δ , er det klart, at man i virkeligheden i fysiske overvejelser ikke burde bruge de matematiske spændinger $\underline{\Sigma}$, men i stedet nogle fysisk tolkelige spændinger $\langle \underline{\Sigma} \rangle$,

som er den rumlige middelværdi af de matematiske spændinger $\underline{\Sigma}$ over et vist volumen hvis udstrækning er karakteriseret ved størrelsen δ . Vi vil antage, at δ er forsvindende lille sammenlignet med alle andre geometrika for legemet. I dette tilfælde vil felterne $\underline{\Sigma}$ og $\langle \underline{\Sigma} \rangle$ kun vise mærkbare indbyrdes afvigelser omkring punkter hvorde matematiske spændinger $\underline{\Sigma}$ er singulære. Omkring en revnespids hvor spændingsfeltet er singulært ligesom $r^{-\frac{1}{2}}$ forekommer det derfor umiddelbart rimeligt at definere den fysiske tolkelige spændingstensor $\langle \underline{\Sigma} \rangle$ med komponenterne $\langle \sigma_{\alpha\beta} \rangle = \langle \sigma_{\alpha\beta} \rangle (r, \theta)$ ved

$$\langle \sigma_{\alpha\beta} \rangle (r, \theta) = \frac{1}{\delta} \int_r^{r+\delta} \sigma_{\alpha\beta}(x, \theta) dx \quad (3.34)$$

hvor $\sigma_{\alpha\beta}(r, \theta)$ er den klassiske teoris løsning givet ved ligning (3.3).

Lad os nu betragte en revne, og lad os antage, at der kan ske udbredelse af denne langs en glat kurve ud fra den betragtede position. Vi vil nu formulere et udbredelseskriterium ved at indsætte de midlede spændinger $\langle \sigma_{\alpha\beta} \rangle$ i von Mises flydebetingelse. De komponenter som skal indsættes i von Mises flydebetingelse er $\langle \sigma_{\alpha\beta} \rangle (r, \theta)$ for $r = \theta = 0$. Disse findes ved indsættelse af (3.3) i (3.34) til

$$\begin{aligned} \langle \sigma_{11} \rangle &= \frac{2}{\delta} k_1 \\ \langle \sigma_{22} \rangle &= \frac{2}{\delta} k_1 \\ \langle \sigma_{12} \rangle &= \frac{2}{\delta} k_2 \end{aligned} \quad (3.35)$$

Indsættes (3.35) nu i (3.33) fås direkte udbredelseskriteriet

$$k_1^2 + k_2^2 \geq \delta \frac{\sigma_c^2}{2}$$

hvilket ses at være et udtryk af samme form som Griffith's udbredelseskriterium som det er formuleret i ligning (3.18).

Det ses altså, at et makroskopisk brudkriterium som von Mises flydebetingelse - rigtigt fortolket vel at mærke - udmarkert

kan benyttes som udbredelseskriterium for et lineærelastisk revneproblem. Det herved formulerede kriterium må endda siges at være i smukkeste overensstemmelse med revnemekanikkens specielle kriterier.

KAPITEL 4.

Lineær viscoelasticitetsteori.

^

4.1 Fysisk betingelse for lineært viscoelastisk materiale.

Betragt et legeme over området Ω i det tredimensionale rum, og lad spændingshistorien og tøjningshistorien for det faste materielle punkt $\underline{x} \in \Omega$ være henholdsvis $\underline{\Sigma}(\underline{x}, t)$ og $\underline{E}(\underline{x}, t)$. Det betragtede legeme siges at være lineært viscoelastisk såfremt der for fastholdt temperatur eksisterer en lineær transformation \mathcal{C} , som transformerer tøjningshistorien $\underline{E}(\underline{x}, t)$ over i spændingshistorien $\underline{\Sigma}(\underline{x}, t)$, d.v.s.

$$\underline{\Sigma}(\underline{x}, t) = \mathcal{C} \underline{E}(\underline{x}, t) \quad (4.1)$$

Om historierne $\underline{\Sigma}(\underline{x}, t)$ og $\underline{E}(\underline{x}, t)$ vil vi i øvrigt antage, at de er tilladelige, hvilket vil sige, at de opfylder betingelsen $\underline{\Sigma}(\underline{x}, t) = \underline{E}(\underline{x}, t) = \underline{0}$ for alle $t < 0$.

Vi vil nu indføre følgende lineære transformation. Lad funktionerne $\varphi(t)$ og $\psi(t)$ være tilladelige. Stieltjesfoldningen \mathcal{A} med kernen $A(\cdot)$ er da defineret ved

$$\begin{aligned} \mathcal{A}\varphi(t) &= \psi(t) \\ &= \int_{0-}^t A(t-\tau) \frac{d\varphi(\tau)}{d\tau} d\tau \end{aligned} \quad (4.2)$$

hvor kernen $A(t)$ er en tilladelig funktion af t som desuden er kontinuert og begrænset i intervallet $t \in] 0 ; \in [$. Der vil som oftest være en diskontinuitet i $t = 0$ således at grænseværdien $\lim_{t \rightarrow 0} A(t)$, $t > 0$ er forskellig fra nul. I disse tilfælde sætter vi

$$A(0) = \lim_{t \rightarrow 0} A(t), \quad t > 0 \quad (4.3)$$

Lad de kartesiske komponenter for spændingstensoren og tøjnings-

tensoren være henholdsvis $\sigma_{ij}(\underline{x}, t)$ og $\epsilon_{ij}(\underline{x}, t)$. Det kan da vises, se Christensen [1] eller Gurtin & Sternberg [23], at representationen af den fysiske betingelse (4.1) altid kan skrives

$$\sigma_{ij}(\underline{x}, t) = \mathcal{R}_{ijkl} \epsilon_{kl}(\underline{x}, t) \quad (4.4)$$

hvor \mathcal{R}_{ijkl} er en Stieltjesfoldning med kernen $R_{ijkl}(\cdot)$. Funktionerne $R_{ijkl}(\cdot)$ karakteriserer materialet, og kaldes materialets relaxationsfunktioner.

Lad os nu antage, at der er tale om homogent og isotropt materiale. Den lineære transformation \mathcal{C} er da isotrop, og dens representation kan da beskrives ved kun to af hinanden uafhængige Stieltjesfoldninger. Transformationen \mathcal{C} er desuden i dette tilfælde uafhængig af stedet. Den fysiske betingelse kan da skrives, se Christensen [1]

$$\sigma_{ij}(\underline{x}, t) = \mathcal{R}_1 \epsilon_{ij}(\underline{x}, t) + \frac{1}{3}(\mathcal{R}_2 - \mathcal{R}_1) \delta_{ij} \epsilon_{kk}(\underline{x}, t) \quad (4.5)$$

hvor \mathcal{R}_1 og \mathcal{R}_2 er Stieltjesfoldninger med kernerne henholdsvis $R_1(\cdot)$ og $R_2(\cdot)$. Ligning (4.5) er den fysiske betingelse for lineært viscoelastisk materiale på relaxationsform. Den tilsvarende ligning

$$\epsilon_{ij}(\underline{x}, t) = \mathcal{K}_1 \sigma_{ij}(\underline{x}, t) + \frac{1}{3}(\mathcal{K}_2 - \mathcal{K}_1) \delta_{ij} \sigma_{kk}(\underline{x}, t) \quad (4.6)$$

er den fysiske betingelse på krybningsform. \mathcal{K}_1 og \mathcal{K}_2 er Stieltjesfoldninger med kernerne henholdsvis $K_1(\cdot)$ og $K_2(\cdot)$. Funktionerne $K_1(\cdot)$ og $K_2(\cdot)$ kaldes materialets krybningsfunktioner, og karakteriserer ligesom relaxationsfunktionerne $R_1(\cdot)$ og $R_2(\cdot)$ materialet. Funktionerne $R_1(\cdot)$ og $K_1(\cdot)$ karakteriserer som det ses materialets opførsel overfor en ren forskydningspåvirkning, og funktionerne $R_2(\cdot)$ og $K_2(\cdot)$ karakteriserer materialets opførsel overfor ren kompression ($\sigma_{11} = \sigma_{22} = \sigma_{33}$). Sammenhængen mellem en relaxationsfunktion $R(\cdot)$ og den hertil svarende krybningsfunktion $K(\cdot)$ er omtalt i afsnit 6.1 appendix C.

Man skelner normalt mellem vædske og faste stoffer. Ved en vædske forstås et isotropt materiale for hvilket

$$\lim_{t \rightarrow \infty} R_1(t) = 0 \quad (4.7)$$

Hvis der derimod gælder

$$\lim_{t \rightarrow \infty} R_1(t) \neq 0 \quad (4.8)$$

taler man om et isotropt faststof. Vi vil i det følgende udelukkende betragte isotrope faststoffer.

Relaxationsfunktionerne $R_1(t)$ og $R_2(t)$ er altid stadigt aftagende og krybningsfunktionerne $K_1(t)$ og $K_2(t)$ altid stadigt voksende for alle $t \in] 0 ; \infty [$.

Med hensyn til en mere detaljeret omtale af den fysiske betingelse henvises der til appendix C, samt til Christensen [1] , Flügge [2] og Nielsen [8] .

4.2 Lineært viscoelastisk randværdiproblem.

Betragt et lineært viscoelastisk legeme over området Ω^* i det tredimensionale rum. Legemet kan eventuelt være i en plan tilstand.

Ved et lineært viscoelastisk randværdiproblem over området Ω forstås et problem der består i at bestemme spændingsfeltet $\underline{\Sigma} = \underline{\Sigma}(\underline{x}, t)$, $\underline{x} \in \Omega$ og tøjningsfeltet $\underline{E} = \underline{E}(\underline{x}, t)$, samt flytningsfeltet $\underline{y} = \underline{y}(\underline{x}, t)$, $\underline{x} \in \Omega$, for visse på forhånd givne randbetingelser på randen $\partial\Omega$.

Vi ser bort fra dynamiske effekter og temperatureffekter. Problemet feltligninger er da givet ved (1.5) , (1.9) , (1.13) , samt (4.5)

*) Området Ω kan være et vilkårligt enkelt- eller multिसammenhængende område.

$$\left. \begin{aligned}
 \epsilon_{ij}(\underline{x}, t) &= \frac{1}{2}(u_{i,j}(\underline{x}, t) + u_{j,i}(\underline{x}, t)) \\
 \sigma_{ij}(\underline{x}, t) &= \sigma_{ij}(\underline{x}, t) , \sigma_{ij,j}(\underline{x}, t) + F_i(\underline{x}, t) = 0 \\
 \sigma_{ij}(\underline{x}, t) &= \mathcal{R}_1 \epsilon_{ij}(\underline{x}, t) + \frac{1}{3}(\mathcal{R}_2 - \mathcal{R}_1) \delta_{ij} \epsilon_{kk}(\underline{x}, t)
 \end{aligned} \right\} (4.9)$$

hvor flytningsfeltet $u(\underline{x}, t)$ er kontinuert i \underline{x} , $\underline{x} \in \Omega$

Problemets randbetingelser antages at være af formen

$$\begin{aligned}
 R: \quad & \overset{1}{R} \wedge \overset{2}{R} \wedge \dots \wedge \overset{1}{R} \\
 & \wedge \overset{2}{R} \wedge \overset{2}{R} \wedge \dots \wedge \overset{2}{R} \\
 & \wedge \overset{3}{R} \wedge \overset{3}{R} \wedge \dots \wedge \overset{3}{R}
 \end{aligned} \quad (4.10)$$

hvor delbetingelserne $\overset{1}{R}^k$, $\overset{2}{R}^k$ og $\overset{3}{R}^k$ er givet ved henholdsvis (1.15) , (1.16) og (1.18).

Hvis randbetingelserne R kun indeholder betingelser af formen $\overset{1}{R}^k$ siges der at være tale om et randværdiproblem af 1. art, eller et rent spændingsrandværdiproblem. Hvis randbetingelserne R kun indeholder betingelser af formen $\overset{2}{R}^k$, samt homogene spændingsbetingelser siges der at være tale om et randværdiproblem af 2. art, eller et rent flytningsrandværdiproblem. I alle andre tilfælde er der tale om et blandet randværdiproblem.

Randværdiproblemet betegnes tilladeligt hvis alle de i randbetingelserne indgående tidsfunktioner er tilladelige i tid, d.v.s. alle er identisk nul for alle $t < 0$.

Det kan vises, at et lineært viscoelastisk randværdiproblem af ovennævnte type altid har en løsning, og det kan desuden vises at såfremt

$$\lim_{t \rightarrow 0} R_1(t) > 0 ; t > 0 \quad (4.11)$$

$$\text{og } \lim_{t \rightarrow 0} R_2(t) > 0 ; t > 0$$

så er denne løsning entydigt bestemt ved feltligningerne (4.9) og randbetingelserne (4.10).

Vi vil i det følgende hovedsagelig betragte plane randværdiproblemer over et område Ω i hvilket der foregår revneudbredelse ud fra en indre eller ydre kontur $\partial\Omega$. Et sådant randværdiproblem kaldes et plant revneudbredelsesproblem. Området Ω og konturen $\partial\Omega$ er i et sådant tilfælde foranderlige i tid, d.v.s. $\Omega = \Omega(t)$ og $\partial\Omega = \partial\Omega(t)$.

Da $\partial\Omega$ er foranderlig i tid på grund af revneudbredelsen giver dette nogle specielle problemer med hensyn til randbetingelserne på $\partial\Omega$. Vi vil imidlertid i sådanne tilfælde antage, at kun de randområder på hvilke der befinder sig revnespidser i bevægelse, er foranderlige i tid, og at deres foranderlighed alene skyldes revneudbredelsen.

Da vi endvidere generelt vil antage, at der i en endelig afstand fra en revnespids på randområdet $\partial\Omega^k$ udelukkende er tale om rene spændingsbetingelser, hvad enten revnespidserne er i bevægelse eller ej, så ses heraf, at hvis den betragtede revnespids er i bevægelse således at $\partial\Omega^k = \partial\Omega^k(t)$, så er randbetingelsen på randområdet $\partial\Omega^k(t) \setminus \partial\Omega^k(0)$ en ren spændingsbetingelse.

4.3 Korrespondensprincippet og det klassiske bevis.

De mest generelle og hyppigst benyttede metoder til løsning af lineært viscoelastiske randværdiproblemer er uden tvivl de løsningsmetoder, som er baseret på korrespondensprincippet. Det man her udnytter er, at der i mange tilfælde kan etableres en simpel sammenhæng (korrespondens) mellem et lineært viscoelastisk randværdiproblem, og et hertil svarende lineært elastisk randværdiproblem. Vi vil formulere korrespondensprincippet på følgende måde.

Givet et lineært viscoelastisk randværdiproblem hvortil løsningen

$$\begin{aligned}\tilde{\Sigma} &= \tilde{\Sigma}(\tilde{x}, t) \\ \tilde{E} &= \tilde{E}(\tilde{x}, t) \\ \tilde{u} &= \tilde{u}(\tilde{x}, t)\end{aligned}\tag{4.12}$$

søges. Vi konstruerer nu et lineært elastisk randværdiproblem ud fra det givne lineært viscoelastiske randværdiproblem. Dette gøres ved at erstatte den fysiske betingelse for lineært viscoelastisk materiale

$$\sigma_{ij}(\underline{x}, t) = \mathcal{R}_1 \varepsilon_{ij}(\underline{x}, t) + \frac{1}{3}(\mathcal{R}_2 - \mathcal{R}_1) \delta_{ij} \varepsilon_{kk}(\underline{x}, t) \quad (4.13)$$

med den fysiske betingelse for lineært elastisk materiale

$$\sigma_{ij}(\underline{x}, t) = 2\mu \varepsilon_{ij}(\underline{x}, t) + \frac{1}{3}(3\kappa - 2\mu) \delta_{ij} \varepsilon_{kk}(\underline{x}, t) \quad (4.14)$$

Alle øvrige feltligninger og alle randbetingelser er uændrede. Løsningen til det herved konstruerede elastiske randværdiproblem betegnes $\underline{\Sigma}^e$, \underline{E}^e , \underline{u}^e og kaldes den til den viscoelastiske løsning $\underline{\Sigma}$, \underline{E} , \underline{u} svarende (korresponderende) elastiske løsning. Den elastiske løsning er en funktion af tid og sted, samt af de elastiske konstanter μ og κ , d.v.s.

$$\begin{aligned} \underline{\Sigma}^e &= \underline{\Sigma}(2\mu, 3\kappa, \underline{x}, t) \\ \underline{E}^e &= \underline{E}(2\mu, 3\kappa, \underline{x}, t) \\ \underline{u}^e &= \underline{u}(2\mu, 3\kappa, \underline{x}, t) \end{aligned} \quad (4.15)$$

Korrespondensprincippet siger da, at hvis den elastiske løsning $\underline{\Sigma}^e$, \underline{E}^e , \underline{u}^e er løsningen for det faste materielle punkt \underline{x}^* , så bestemmes den viscoelastiske løsning $\underline{\Sigma}$, \underline{E} , \underline{u} i \underline{x} af

*) Dette er en nødvendig og meget vigtig forudsætning for anvendelse af korrespondensprincippet. Forudsætningen er en følge af den fysiske betingelse for lineært viscoelastisk materiale (4.12) kun gælder for et fast materielt punkt.

$$\underline{\Sigma}(\underline{x}, t) = \mathcal{L}_{p \rightarrow t}^{-1} \underline{\Sigma}^{e*}(pR_1^*(p), pR_2^*(p), \underline{x}, p)$$

$$\underline{E}(\underline{x}, t) = \mathcal{L}_{p \rightarrow t}^{-1} \underline{E}^{e*}(pR_1^*(p), pR_2^*(p), \underline{x}, p) \quad (4.16)$$

$$\underline{u}(\underline{x}, t) = \mathcal{L}_{p \rightarrow t}^{-1} \underline{u}^{e*}(pR_1^*(p), pR_2^*(p), \underline{x}, p)$$

hvor $\underline{\Sigma}^{e*}(2\mu, 3\kappa, \underline{x}, p) = \mathcal{L}_{t \rightarrow p} \underline{\Sigma}^e(2\mu, 3\kappa, \underline{x}, t)$, o.s.v., og hvor $R_1^*(p)$ og $R_2^*(p)$ betegner de laplacetransformede relaxationsfunktioner. $\mathcal{L}_{t \rightarrow p}$ og $\mathcal{L}_{p \rightarrow t}^{-1}$ betegner laplacetransformationen og den inverse laplacetransformation, se nærmere herom i appendix E.

Med hensyn til en meget dybtgående omtale af det lineært viscoelastiske randværdiproblem og korrespondensprincippet som løsningsmetode henvises der til Sternbergs oversigtsartikel [39]. Sternbergs fremstilling omfatter også ikke isotherme randværdiproblemer.

Det klassiske bevis for korrespondensprincippet er overordentligt simpelt. Hvis det lineært viscoelastiske randværdiproblem kan laplacetransformeres, d.v.s. hvis alle feltligninger og randbetingelser kan laplacetransformeres, så ses det let ved anvendelse af laplacetransformationsteoriens differentiationsregel og foldningsregel, se appendix E, at løsningen til det laplacetransformerede lineært viscoelastiske randværdiproblem kan bestemmes af løsningen til det hertil svarende laplacetransformerede lineært elastiske randværdiproblem ved ombytning af 2μ med $pR_1^*(p)$ og 3κ med $pR_2^*(p)$. Korrespondensprincippet, som det er formuleret i (4.16) fremkommer da umiddelbart ved invers laplacetransformation af den laplacetransformerede viscoelastiske løsning,

Svagheden ved det klassiske bevis er, at det ikke sjældent sker, at forudsætningen om at det viscoelastiske randværdiproblem kan laplacetransformeres, ikke kan opfyldes. Dette er f.eks. tilfældet for viscoelastiske randværdiproblemer med revneudbredelse,

eller problemer med foranderlige randområder*) .

Hvis alle randbetingelser skal kunne laplacetransformeres, så kræver dette, at det for en hver randstørrelse (flytningskomponent, eller kraftkomponent) gælder, at hvis denne randstørrelse er foreskrevet i randbetingelserne i det faste materielle punkt $\underline{x}' \in \partial\Omega$ til tidspunktet t' , så skal denne randstørrelse være foreskrevet i randbetingelserne i \underline{x}' til alle tider $t > 0$. Dette er klart ikke opfyldt for problemer med foranderlige randområder og for revneudbredelsesproblemer.

Det er almindeligt heraf at slutte, at korrespondensprincippet ikke kan benyttes i disse tilfælde. Dette behøver jo ikke at være rigtigt. Gyldighed af metode og bevis for metode er to forskellige ting, og selv om beviset, under visse forudsætninger, ikke længere er gyldigt, kan metoden godt være det.

Det viser sig rent faktisk at være korrekt at anvende korrespondensprincippet som løsningsmetode også på revneudbredelsesproblemer og på visse problemer med foranderlige randområder. Dette vil fremgå af de følgende to afsnit, hvor nogle specielle beviser herfor skal omtales.

Det er naturligvis først og fremmest spørgsmålet om det korrekte i anvendelsen af korrespondensprincippet på revneudbredelsesproblemer, som har interesse i denne sammenhæng, men da de grundlæggende idéer til beviset herfor er hentet i Grahams bevis [21] for korrespondensprincippets gyldighed som løsningsmetode for problemer med foranderlige randområder, skal dette bevis først omtales. Det må i øvrigt varmt anbefales læseren at stifte nærmere bekendtskab med Grahams artikel [21].

*) Der hentydes her til problemer hvor et randområde med én type randbetingelser udbreder sig ind over et tilgrænsende område med en anden type betingelser.

4.4 Grahams bevis.

Grahams bevis [21] skal ikke omtales i detaljer, men de grundlæggende idéer skal anskueliggøres gennem et konkret eksempel.

Vi vil betragte et lineært viscoelastisk randværdiproblem, hvor alle randområder er konstante i tid bortset fra de to til hinanden tilgrænsende områder $\partial\Omega_1$ og $\partial\Omega_2$. Disse antages at være foranderlige på en sådan måde at foreningsområdet $\partial\Omega_1 \cup \partial\Omega_2$ er konstant i tid, og således, at det for alle t_1, t_2 hvor $t_1 < t_2$ gælder at

$$\partial\Omega_1(t_1) \subset \partial\Omega_1(t_2) \quad (4.17)$$

Randområdet $\partial\Omega_1$ og randområdet $\partial\Omega_2$ siges i dette tilfælde at være henholdsvis monotont voksende og monotont aftagende i tid. Normalbelastningen på $\partial\Omega_1$ og normalflytningen på $\partial\Omega_2$ antages at være givet i randbetingelserne

$$\begin{aligned} (\underline{\Sigma}(\underline{x}, t) \underline{n}(\underline{x})) \underline{n}(\underline{x}) &= \sigma^0(\underline{x}, t), \quad \underline{x} \in \partial\Omega_1(t) \\ \underline{u}(\underline{x}, t) \underline{n}(\underline{x}) &= u^0(\underline{x}, t), \quad \underline{x} \in \partial\Omega_2(t) \end{aligned} \quad (4.18)$$

hvor $\underline{n}(\underline{x})$ er enhedsnormalen i \underline{x} og σ^0 og u^0 er henholdsvis et foreskrevet belastningsfelt og foreskrevet flytningsfelt. Resten af randbetingelserne på $\partial\Omega_1$ og $\partial\Omega_2$ antages at være af ens type.

Lad den lineært viscoelastiske løsning og den hertil svarende lineært elastiske løsning være henholdsvis $\underline{\Sigma}$, \underline{E} , \underline{u} og $\underline{\Sigma}^e$, \underline{E}^e og \underline{u}^e . Grahams bevis forløber nu som følger.

Vi definerer først et lineært viscoelastisk randværdiproblem ud fra det oprindeligt givne ved i stedet for (4.18) at antage betingelsen^{*)}

*) Den elastiske løsning $\underline{\Sigma}^e$, \underline{E}^e , \underline{u}^e afhænger af de elastiske konstanter som angivet i (4.15).

$$(\underline{\Sigma}'(\underline{x}, t) \underline{n}(\underline{x})) \underline{n}(\underline{x}) = \sigma^0(\underline{x}, t), \quad \underline{x} \in \partial\Omega_1(t) \quad (4.19)$$

$$(\underline{\Sigma}'(\underline{x}, t) \underline{n}(\underline{x})) \underline{n}(\underline{x}) = \mathcal{L}_{p \rightarrow t}^{-1} \left(\underline{\Sigma}^{e*}(\underline{pR}_1^*(p), \underline{pR}_2^*(p), \underline{x}, p) \underline{n}(\underline{x}) \right) \underline{n}(\underline{x}), \\ \underline{x} \in \partial\Omega_2(t)$$

Løsningen hertil betegnes $\underline{\Sigma}'$, \underline{E}' , \underline{u}' . Alle randområderne for det herved definerede lineært viscoelastiske randværdiproblem er da konstante i tid, og korrespondensprincippet kan da umiddelbart anvendes.

Løsningen er

$$\begin{aligned} \underline{\Sigma}'(\underline{x}, t) &= \mathcal{L}_{p \rightarrow t}^{-1} \underline{\Sigma}^{e*}(\underline{pR}_1^*(p), \underline{pR}_2^*(p), \underline{x}, p) \\ \underline{E}'(\underline{x}, t) &= \mathcal{L}_{p \rightarrow t}^{-1} \underline{E}^{e*}(\underline{pR}_1^*(p), \underline{pR}_2^*(p), \underline{x}, p) \\ \underline{u}'(\underline{x}, t) &= \mathcal{L}_{p \rightarrow t}^{-1} \underline{u}^{e*}(\underline{pR}_1^*(p), \underline{pR}_2^*(p), \underline{x}, p) \end{aligned} \quad (4.20)$$

Det er nu vist, at anvendelsen af (4.16) i det mindste betegner en løsning til et lineært viscoelastisk randværdiproblem. I visse tilfælde er det let at indse, at løsningen $\underline{\Sigma}'$, \underline{E}' , \underline{u}' også opfylder randbetingelsen (4.18), og dermed betegner løsningen til det oprindeligt givne randværdiproblem.

Lad os antage, at flytningsbetingelsen i (4.18) er homogen, d.v.s. at der for alle $\underline{x} \in \partial\Omega_2(t)$, $t \geq 0$ gælder at

$$\underline{u}^0(\underline{x}, t) = 0 \quad (4.21)$$

Lad τ betegne et tilfældigt fast tidspunkt i intervallet $]0; \infty[$. Der gælder da, at hvis $t < \tau$, så er

$$\underline{u}^e(2\mu, 3\kappa, \underline{x}, t) \underline{n}(\underline{x}) = 0 \quad (4.22)$$

for alle $\underline{x} \in \partial\Omega_2(\tau)$. I følge (4.20) fås da at den laplacetrans-

formerede $\underline{u}'^*(\underline{x}, p) = \mathcal{L}_{t,p} \underline{u}'(\underline{x}, t)$ opfylder *)

$$\begin{aligned} \underline{u}'^*(\underline{x}, p) \underline{n}(\underline{x}) &= \int_{0-}^{\infty} \underline{u}^e(pR_1^*(p), pR_2^*(p), \underline{x}, t) \underline{n}(\underline{x}) e^{-pt} dt \\ &= \int_{\tau-}^{\infty} \underline{u}^e(pR_1^*(p), pR_2^*(p), \underline{x}, t) \underline{n}(\underline{x}) e^{-pt} dt, \end{aligned} \quad (4.23)$$

$\underline{x} \in \partial\Omega_2(\tau)$

og ved substitutionen $\rho = t - \tau$

$$\begin{aligned} \underline{u}'^*(\underline{x}, p) \underline{n}(\underline{x}) &= e^{-p\tau} \int_{0-}^{\infty} \underline{u}^e(pR_1^*(p), pR_2^*(p), \underline{x}, \rho + \tau) \underline{n}(\underline{x}) e^{-p\rho} d\rho \\ &= e^{-p\tau} \phi_{\tau}^*(\underline{x}, p), \quad \underline{x} \in \partial\Omega_2(\tau) \end{aligned} \quad (4.24)$$

hvor funktionen $\phi_{\tau}(\underline{x}, t)$ er defineret ved **)

$$\phi_{\tau}(\underline{x}, t) = \mathcal{L}^{-1} \int_{0-}^{\infty} \underline{u}^e(pR_1^*(p), pR_2^*(p), \underline{x}, \rho + \tau) \underline{n}(\underline{x}) e^{-p\rho} d\rho \quad (4.25)$$

Af (4.24) fås da umiddelbart ved anvendelse af forskydningssætningen, se ligning (E.10), appendix E

$$\underline{u}'(\underline{x}, t) \underline{n}(\underline{x}) = \Delta(t - \tau) \phi_{\tau}(\underline{x}, t - \tau), \quad \underline{x} \in \partial\Omega_2(\tau) \quad (4.26)$$

*) Graham antager selv i sit bevis, at den elastiske løsning kan skrives som et produkt af to faktorer hvor den ene afhænger af de elastiske konstanter alene, og den anden afhænger af tid og sted alene. Denne antagelse er som det ses ikke nødvendig.

**) Funktionen $\underline{u}^e(2\mu, 3\kappa, \underline{x}, p + \tau)$ kan opfattes som flytningen langs $\partial\Omega_2$ for det elastiske randverdi-problem som fremkommer ved tidsforskydningen $t' = t - \tau$. Funktionen $\phi_{\tau}^*(\underline{x}, p)$ kan derfor inverteres.

Men heraf ses jo, at det for alle $\underline{x} \in \partial\Omega_2(\tau)$ gælder, at hvis $t < \tau$, så er $\underline{y}'(\underline{x}, t)\underline{p}(\underline{x}) = 0$. Dette er ensbetydende med, at løsningen $\underline{\xi}'$, \underline{E}' , \underline{y}' opfylder randbetingelsen (4.18), og at den dermed betegner løsningen til det oprindeligt givne randværdiproblem.

Det er hermed vist, at korrespondensprincippet (4.16) kan benyttes som løsningsmetode på visse randværdiproblemer med foranderlige randområder. De vigtigste antagelser i beviset herfor er antagelsen om monoton udbredelse (4.17), og antagelsen om homogen betingelse (4.21) på det randområde som er aftagende,

4.5 Korrespondensprincippet gyldighed ved anvendelse på revneudbredelsesproblemer.

Vi vil nu vise, at korrespondensprincippet kan benyttes som løsningsmetode på lineært viscoelastiske revneudbredelsesproblemer.

Vi vil betragte et plant^{*)} revneudbredelsesproblem over området $\Omega = \Omega(t)$ med den uforanderlige ydre kontur $\partial\Omega^Y$, og den indre kontur $\partial\Omega^i = \partial\Omega^i(t)$ ud fra hvilken der foregår revneudbredelse langs kurven K .

Randbetingelserne er

$$R^Y, \underline{x} \in \partial\Omega^Y \tag{4.27}$$

$$R^i(t), \underline{x} \in \partial\Omega^i(t)$$

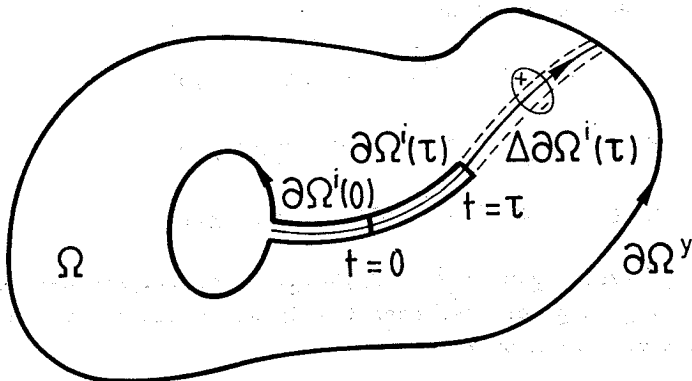
hvor betingelserne R^Y på $\partial\Omega^Y$ og $R^i(0)$ på $\partial\Omega^i(0)$ kan være vilkårlige, medens betingelserne på randområdet $\partial\Omega^i(t) \sim \partial\Omega^i(0)$ er rene spændingsbetingelser. Randområdet $\partial\Omega^i$ er stadigt voksende.

Løsningen til det herved definerede lineært viscoelastiske randværdiproblem betegnes $\underline{\xi}$, \underline{E} , \underline{y} og den tilsvarende elastiske løs-

*) Beviset kan uden synderlige vanskeligheder generaliseres til 3 dimensioner.

ning betegnes $\underline{\Sigma}^e$, \underline{E}^e , \underline{u}^e . Vi definerer randområdet

$$\Delta\partial\Omega^i(t) = \partial\Omega^i(\infty) \setminus \partial\Omega^i(t) \quad (4.28)$$



Figur 4.1. Plant revneudbredelsesproblem.

Det lineært viscoelastiske randværdiproblem givet ved (4.27) over $\Omega(t)$ er da ensbetydende med følgende lineært viscoelastiske randværdiproblem over $\Omega(\infty)$

$$\begin{aligned} R^y &, \quad \underline{x} \in \partial\Omega^y \\ R^i(t) &, \quad \underline{x} \in \partial\Omega^i(t) \\ \Delta\underline{u} &= \underline{0}, \quad \underline{x} \in \Delta\partial\Omega^i(t) \end{aligned} \quad (4.29)$$

hvor flytningsdifferensen $\Delta\underline{u}$ er defineret på følgende måde. Et hvert punkt $\underline{x} \in \Delta\partial\Omega^i(t)$ ligger på udbredelseskurven K . Lad $D^+(\underline{x})$ og $D^-(\underline{x})$ betegne venstreomegnen henholdsvis højreomegnen af \underline{x} med hensyn til K . Flytningsdifferensen $\Delta\underline{u}$ er da defineret ved

$$\begin{aligned} \Delta\underline{u}(\underline{x}, t) &= \underline{u}^+(\underline{x}, t) - \underline{u}^-(\underline{x}, t) \\ \text{hvor } \underline{u}^+(\underline{x}, t) &= \lim_{\underline{x}' \rightarrow \underline{x}} \underline{u}(\underline{x}', t), \quad \underline{x}' \in D^+(\underline{x}), \quad \underline{x} \in K \\ \underline{u}^-(\underline{x}, t) &= \lim_{\underline{x}' \rightarrow \underline{x}} \underline{u}(\underline{x}', t), \quad \underline{x}' \in D^-(\underline{x}), \quad \underline{x} \in K \end{aligned} \quad (4.30)$$

Ved denne omformulering ses det, at et revneudbredelsesproblem altid kan opfattes som et problem med foranderlige randområder hvor et område med spændingsbetingelser udbreder sig monotont ind over et område med homogene flytningsbetingelser.

Beviset forløbet nu helt analogt til Grahams bevis i forrige afsnit. Bestemmer vi størrelserne

$$\begin{aligned}\underline{\Sigma}'(\underline{x}, t) &= \mathcal{L}_{p \rightarrow t}^{-1} \underline{\Sigma}^{e*}(pR_1^*(p), pR_2^*(p), \underline{x}, p) \\ \underline{E}'(\underline{x}, t) &= \mathcal{L}_{p \rightarrow t}^{-1} \underline{E}^{e*}(pR_1^*(p), pR_2^*(p), \underline{x}, p) \\ \underline{u}'(\underline{x}, t) &= \mathcal{L}_{p \rightarrow t}^{-1} \underline{u}^{e*}(pR_1^*(p), pR_2^*(p), \underline{x}, p)\end{aligned}\quad (4.31)$$

hvor $\underline{\Sigma}^{e*}(2\mu, 3\kappa, \underline{x}, p) = \mathcal{L}_{t \rightarrow p}^{-1} \underline{\Sigma}^e(2\mu, 3\kappa, \underline{x}, t)$, o.s.v., ses det let*) , at $\underline{\Sigma}'$, \underline{E}' , \underline{u}' er løsningen til følgende lineært viscoelastisk randværdiproblem over $\Omega(\infty)$

$$\begin{aligned}R^Y &, \quad \underline{x} \in \partial\Omega^Y \\ R^i(t) &, \quad \underline{x} \in \partial\Omega^i(t)\end{aligned}\quad (4.32)$$

$$\underline{\Sigma}'(\underline{x}, t) \underline{n}(\underline{x}) = \mathcal{L}_{p \rightarrow t}^{-1} \underline{\Sigma}^{e*}(pR_1^*, pR_2^*, \underline{x}, p) \underline{n}(\underline{x}) \quad , \quad \underline{x} \in \Delta\partial\Omega^i(t)$$

Vi skal da blot vise, at (4.32) er ensbetydende med (4.29), hvilket vil sige, at vi skal vise at

$$\Delta \underline{u}'(\underline{x}, t) = \underline{0} \quad , \quad \text{alle } \underline{x} \in \Delta\partial\Omega^i(t) \quad (4.33)$$

Beviset forløber helt analogt til den tilsvarende udledning i Grahams bevis omtalt i forrige afsnit. Lad τ være et tilfældigt fast tidspunkt større end nul. Da det for alle $\underline{x} \in \Delta\partial\Omega^i(\tau)$ for den elastiske løsning gælder at

$$\Delta \underline{u}^e(2\mu, 3\kappa, \underline{x}, t) = \underline{0} \quad (4.34)$$

*) (4.32) er et stationært problem

hvis $t < \tau$, fås at der for den laplacetransformerede af $\Delta u'$ gælder

$$\begin{aligned} \Delta u'^*(\underline{x}, p) &= \int_0^{\infty} \Delta u^e(pR_1^*, pR_2^*, \underline{x}, t) e^{-pt} dt \\ &= \int_{\tau-}^{\infty} \Delta u^e(pR_1^*, pR_2^*, \underline{x}, t) e^{-pt} dt \\ &= e^{-p\tau} \int_0^{\infty} \Delta u^e(pR_1^*, pR_2^*, \underline{x}, \rho + \tau) e^{-p\rho} d\rho \quad (4.35) \\ &= e^{-p\tau} \phi_{\tau}^*(\underline{x}, p) \quad , \quad \underline{x} \in \Delta\partial\Omega^i(\tau) \end{aligned}$$

og dermed

$$\Delta u'(\underline{x}, t) = \Delta(t - \tau) \phi_{\tau}(\underline{x}, t - \tau) \quad , \quad \underline{x} \in \Delta\partial\Omega^i(\tau) \quad (4.36)$$

Men heraf ses, at det for alle $\underline{x} \in \Delta\partial\Omega^i(\tau)$ gælder at $\Delta u'(\underline{x}, t) = 0$ hvis $t < \tau$, hvilket direkte medfører at (4.33) er opfyldt.

Det er hermed bevist, at korrespondensprincippet, som det er formuleret i (4.16), kan benyttes som løsningsmetode for lineært viscoelastiske revneudbredelsesproblemer.

Anvendelsen af korrespondensprincippet på sådanne randværdiproblemer, samt nogle af de vanskeligheder der kan opstå i forbindelse hermed, er omtalt nærmere i kapitel 5.

KAPITEL 5.

Løsning af lineært viscoelastiske revneproblemer.

5.1 Stationære revneproblemer.

Lad os betragte et geometrisk stationært revneproblem over området Ω i planen. Alle forekommende revnespidser er da knyttet til faste materielle punkter i det betragtede legeme for alle tider $t > 0$.

Vi vil nu undersøge løsningens asymptotiske egenskaber ved en sådan stationær revnespids. Vi benytter et lokalt koordinatsystem og polære koordinater som vist på figur 3.1. Af ligningerne (3.3) ses, at det for den elastiske løsning asymptotisk gælder at

$$\sigma_{\alpha\beta}^e = \frac{k_Y^e}{\sqrt{2r}} f_{\alpha\beta\gamma} \quad , \quad \alpha, \beta, \gamma = 1, 2 \quad (5.1)$$

hvor faktorerne $f_{\alpha\beta\gamma}$ er funktioner af vinkelen θ alene, og hvor spændingsintensitetsfaktorerne er funktioner af de elastiske konstanter og af tiden t alene, altså

$$\sigma_{\alpha\beta}^e(2\mu, 3\kappa, r, \theta, t) = \frac{k_Y^e(2\mu, 3\kappa, t)}{\sqrt{2r}} f_{\alpha\beta\gamma}(\theta) \quad (5.2)$$

Af korrespondensprincippet (ligningerne 4.16) fås da, at der for den lineært viscoelastiske løsning asymptotisk gælder at

$$\sigma_{\alpha\beta}(r, \theta, t) = \frac{k_Y(t)}{\sqrt{2r}} f_{\alpha\beta\gamma}(\theta) \quad (5.3)$$

$$\text{hvor } k_Y(t) = \mathcal{L}^{-1} k_Y^{e*}(pR_1^*(p), pR_2^*(p), p) \quad (5.4)$$

Det ses altså, at spændingsfeltet omkring en revnespids i et lineært viscoelastisk legeme, ligesom i det elastiske tilfælde, er beskrevet fuldstændigt ved de to spændingsintensitetsfaktorer k_1 og k_2 . Hvis de elastiske spændingsintensitetsfaktorer

$k_Y^e = k_Y^e(2\mu, 3\kappa, t)$ er kendt, bestemmes de viscoelastiske spændingsintensitetsfaktorer på simpel måde af (5.4)

Beskrivelsen af en lineært viscoelastisk løsnings asymptotiske egenskaber omkring en revnespids afviger imidlertid på afgørende punkter fra beskrivelsen af den tilsvarende elastiske løsnings asymptotiske egenskaber.

I det elastiske tilfælde har man en énentydig sammenhæng mellem spændinger og tøjninger til et hvert givet tidspunkt t . Dette medfører, at de elastiske spændingsintensitetsfaktorer til tidspunktet t ikke alene fastlægger spændingsfeltet til dette tidspunkt, men også flytningsfeltet og tøjningsfeltet.

I det viscoelastiske tilfælde stiller sagen sig noget anderledes, idet der på grund af den konstitutive lignings funktionalform slet ikke er nogen sammenhæng mellem spændingsfeltet $\underline{\Sigma}(\underline{x}, t')$ og tøjningsfeltet $\underline{E}(\underline{x}, t')$ for et givet fast tidspunkt $t = t'$. Heraf følger umiddelbart, at de viscoelastiske spændingsintensitetsfaktorer til et givet tidspunkt $t = t'$ kun beskriver spændingsfeltets, men ikke flytningsfeltets og tøjningsfeltets asymptotiske egenskaber.

Af disse overvejelser sluttes umiddelbart, at den viscoelastiske løsnings asymptotiske egenskaber omkring en revnespids ikke kan beskrives ved kun to parametre som i det elastiske tilfælde. Der må flere parametre til.

Lad os betragte flytningerne^{*)} omkring en revnespids i et lineært viscoelastisk materiale. Af ligning (3.4) ses det, at den elastiske løsnings flytninger asymptotisk kan skrives

*) Relativt i forhold til revnespiden

$$u_1^e = \sqrt{2r} \left\{ k_1 \frac{\alpha+1}{4\mu} \cos(\theta/2) - \frac{k_1}{2\mu} \cos^3(\theta/2) + \right. \\ \left. + k_2 \frac{\alpha+1}{4\mu} \sin(\theta/2) + \frac{k_2}{2\mu} \sin(\theta/2) \cos^2(\theta/2) \right\} \quad (5.5)$$

$$u_2^e = \sqrt{2r} \left\{ k_1 \frac{\alpha+1}{4\mu} \sin(\theta/2) - \frac{k_1}{2\mu} \sin(\theta/2) \cos^2(\theta/2) + \right. \\ \left. - k_2 \frac{\alpha+1}{4\mu} \cos(\theta/2) + \frac{k_2}{2\mu} \cos(\theta/2) [1+\sin^2(\theta/2)] \right\}$$

$$\text{hvor } \frac{\alpha+1}{4\mu} = \begin{cases} \frac{3\kappa+4\mu}{2\mu(3\kappa+\mu)} = 2 \frac{(1-\nu^2)}{E} & \text{for plane tøjn.tilst.} \\ 2 \frac{3\kappa+\mu}{9\kappa\mu} = \frac{2}{E} & \text{for plane spænd.tilst.} \end{cases} \quad (5.6)$$

Definerer vi faktorerne

$$d_Y^e(2\mu, 3\kappa, t) = \frac{\alpha+1}{4\mu} k_Y^e(2\mu, 3\kappa, t) \quad (5.7)$$

$$c_Y^e(2\mu, 3\kappa, t) = \frac{1}{2\mu} k_Y^e(2\mu, 3\kappa, t), \quad Y = 1, 2$$

Så fås let ved anvendelse af korrespondensprincippet (ligning 4.16), at der for den lineært viscoelastiske løsning gælder at

$$u_1 = \sqrt{2r} \left\{ d_1(t) \cos(\theta/2) + d_2(t) \sin(\theta/2) + \right. \\ \left. - c_1(t) \cos^3(\theta/2) + c_2(t) \sin(\theta/2) \cos^2(\theta/2) \right\} \quad (5.8)$$

$$u_2 = \sqrt{2r} \left\{ d_1(t) \sin(\theta/2) - d_2(t) \cos(\theta/2) + \right. \\ \left. - c_1(t) \sin(\theta/2) \cos^2(\theta/2) + c_2(t) \cos(\theta/2) [1+\sin^2(\theta/2)] \right\}$$

hvor faktorerne $d_Y(t)$ og $c_Y(t)$ bestemmes af

$$d_Y(t) = \mathcal{L}^{-1}_{p \rightarrow t} d_Y^{e*}(pR_1^*(p), pR_2^*(p), p) \quad (5.9)$$

$$c_Y(t) = \mathcal{L}^{-1}_{p \rightarrow t} c_Y^{e*}(pR_1^*(p), pR_2^*(p), p), \quad \gamma = 1, 2$$

Tilsvarende kan det ved anvendelse af (5.1) og den fysiske betingelse for elastisk materiale, samt ved anvendelse af korrespondensprincippet vises, at det for den viscoelastiske løsning gælder at tøjningsfeltet omkring en revnespids asymptotisk kan skrives

$$\epsilon_{\alpha\beta}(r, \theta, t) = \frac{c_Y(t)}{\sqrt{2r}} f_{\alpha\beta\gamma}(\theta) + \frac{1}{2} \frac{d_Y(t) - c_Y(t)}{\sqrt{2r}} f_{\lambda\lambda\gamma} \quad (5.10)$$

Af ligningerne (3.3) ses det let at

$$f_{\lambda\lambda 1} = 2 \cos \theta / 2 \quad (5.11)$$

$$f_{\lambda\lambda 2} = - \sin \theta / 2$$

Den viscoelastiske løsnings asymptotiske egenskaber er da givet ved ligningerne (5.3), (5.8) og (5.10). Disse udtryk gælder alle både for plan tøjningstilstand og plan spændingstilstand.

Det ses altså af det ovenstående, at forholdene omkring en revnespids i et viscoelastisk materiale i det generelle tilfælde nødvendigvis må beskrives ved 6 parametre, og ikke kun ved 2 parametre som i det elastiske tilfælde. De 6 revnespidsparametre kan, som det ses, passende vælges til at være spændingsintensitetsfaktorerne k_1 og k_2 og faktorerne d_1 , d_2 og c_1 , c_2 , som vi vil kalde revnespidsens deformationsfaktorer.

Af ligningerne (5.8) ses let, at flytningerne af revneranden ($\theta = \pi$) asymptotisk kan skrives

$$u_1(r, t) = d_2(t) \sqrt{2r} \quad (5.12)$$

$$u_2(r, t) = d_1(t) \sqrt{2r}$$

For spændings- henholdsvis tøjningsfelt findes for $\theta = 0$

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{11}(r,t) = \sigma_{22}(r,t) &= \frac{k_1(t)}{\sqrt{2r}} \\ \sigma_{12}(r,t) &= \frac{k_2(t)}{\sqrt{2r}} \end{aligned} \right\} (5.13)$$

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_{11}(r,t) = \varepsilon_{22}(r,t) &= \frac{d_1(t) - c_1(t)}{\sqrt{2r}} \\ \varepsilon_{12}(r,t) &= \frac{c_2(t)}{\sqrt{2r}} \end{aligned} \right\} (5.14)$$

5.2 Revneudbredelsesproblemer.

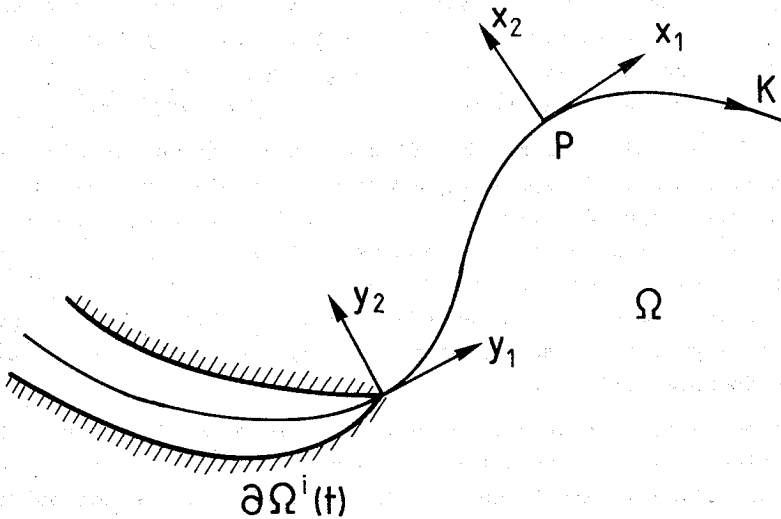
Ved løsning af et lineært viscoelastisk revneudbredelsesproblem over området Ω forstås normalt en bestemmelse af løsningens asymptotiske egenskaber omkring samtlige revnespidser på området Ω 's rande.

Vi vil i det følgende se nærmere på hvorledes løsningens asymptotiske egenskaber kan bestemmes omkring en revnespids som er i bevægelse. Det vil sige, at vi vil udlede en metode til bestemmelse af de 6 revnespidsparametre til et vilkårligt tidspunkt $t > 0$ når udbredelsehistorien af den til revnespidsen knyttede revne er givet på forhånd.

For simpelhedens skyld vil vi antage at området Ω kun har den ydre kontur $\partial\Omega^Y$ og én enkelt indre kontur $\partial\Omega^I$. Det antages desuden at der sker udbredelse af en revne R ud fra den indre kontur $\partial\Omega^I$ langs kurven K , og at denne udbredelse er kendt.

Den indre kontur afhænger da på en kendt måde af tiden, d.v.s. $\partial\Omega^I = \partial\Omega^I(t)$.

Vi vil altså nu bestemme revnespidens spændingsintensitetsfaktorer og deformationsfaktorer for et vilkårligt fast tidspunkt $t = t'$. Revnespiden befinder sig til dette tidspunkt i punktet P .



Figur 5.1. Revneudbredelse langs kurven K.

Der indlægges som vist på figur 5.1 et medfølgende $y_1 y_2$ -koordinatsystem i revnespidsen, samt et fast $x_1 x_2$ -koordinatsystem i P. Begge koordinatsystemer har deres 1-retning orienteret parallel med tangenten til K i systemets begyndelsespunkt.

I forrige kapitel blev det vist, at korrespondensprincippet kan benyttes som metode til løsning af et revneudbredelsesproblem som det her betragtede. Det viser sig imidlertid at være en relativ vanskelig opgave at skulle løse et sådant problem ved anvendelse af korrespondensprincippet. Korrespondensprincippet er en løsningsmetode som normalt er meget enkel ^{*)} at bruge, men i

*) Der kan naturligvis altid opstå praktiske problemer i forbindelse med den inverse laplacetransformation, men det er mere de principielle problemer, der her tænkes på.

dette tilfælde hvor løsningen ønskes bestemt for et punkt som er i bevægelse (revnespidsen), og da problemet involverer operationerregning og regning med singulariteter og samspil mellem disse på en ikke helt simpel måde, bliver anvendelsen af korrespondensprincippet noget mere kompliceret end sædvanligt.

En fatal fejl begår man blandt andet hvis man ved anvendelse af korrespondensprincippet bestemmer en viscoelastisk revnespidsparameter med udgangspunkt i den elastiske løsning for den pågældende parameter for et fast punkt i det medfølgende y_1, y_2 -koordinatsystem. Herved øves der nemlig voldsomt på kravet om at den elastiske løsning, som benyttes ved anvendelse af korrespondensprincippet, skal være løsningen for et fast materialt punkt, se fodnoten side 46.

Vi betragter derfor det faste materielle punkt P på kurven K i hvilket revnespidsen befinder sig til tidspunktet $t = t'$, og tager udgangspunkt i den elastiske løsning for omegnen om dette punkt.

Selv om man betragter det faste materielle punkt P, er der imidlertid stadig store muligheder for at begå fejl hvis man ikke gør sig sine overvejelser på en tilstrækkelig overskuelig måde. I det følgende er der angivet en måde at nå til problemets løsning på, som måske kan forekomme en smule omstændelig, men hvor overvejelserne til gengæld er delt op i så passende små skridt, at fejl let kan undgås.

Problemets randbetingelser er

$$\begin{aligned} R^Y, \quad \underline{x} \in \partial\Omega^Y \\ R^i, \quad \underline{x} \in \partial\Omega^i(t) \end{aligned} \quad (5.15)$$

hvor R^Y og R^i er vilkårlige betingelser af de i kapitel 1 afsnit 3 omtalte typer.

Det første problem vi vil løse er at bestemme en spændingsintensitetsfaktor for den betragtede revnespids til tidspunktet $t = t'$.

Lad os antage, at det lineært viscoelastiske randværdiproblem over Ω med randbetingelsen (5.15) er løst, og at vi dermed kender løsningen $\underline{\Sigma}(\underline{x}, t)$, $\underline{E}(\underline{x}, t)$ og $u(\underline{x}, t)$ i hele Ω . Denne løsning afhænger således både af revneudbredelsesforløbet, de ydre belastninger, samt af det lineært viscoelastiske materiales fysiske egenskaber.

Vi vil nu betragte et andet, men med det første meget tæt beslægtet problem. Betragt det geometrisk stationære randværdiproblem over $\Omega = \Omega(t')$ med den ydre rand $\partial\Omega^Y$ og den indre rand $\partial\Omega^i(t')$ med randbetingelserne

$$R^Y, \underline{x} \in \partial\Omega^Y \quad (5.16.a)$$

$$R^i, \underline{x} \in \partial\Omega^i(t) \quad (5.16.b)$$

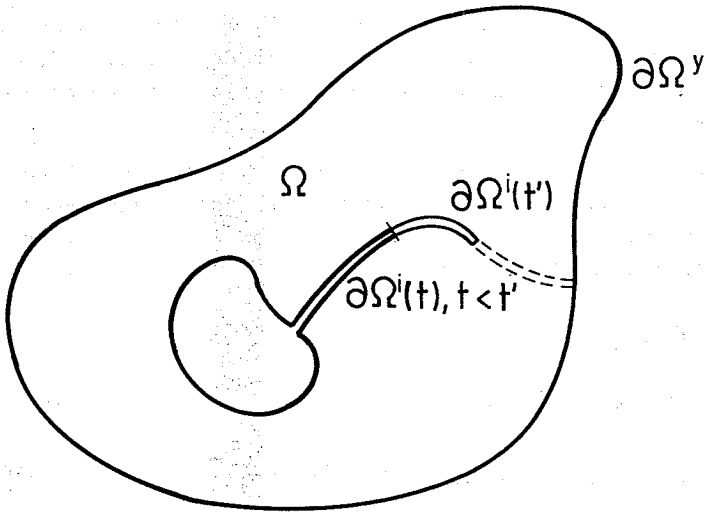
$$\underline{\Sigma}'(\underline{x}, t)\underline{n} = \underline{\Sigma}(\underline{x}, t)\underline{n}, \underline{x} \in \partial\Omega^i(t') \setminus \partial\Omega^i(t) \quad (5.16.c)$$

hvor

$$\partial\Omega^i(t) = \begin{cases} \partial\Omega^i(t) & \text{for } t < t' \\ \partial\Omega^i(t') & \text{for } t \geq t' \end{cases} \quad (5.17)$$

og hvor $\underline{\Sigma}(\underline{x}, t)$ betegner spændingsløsningen til det oprindelige udbredelsesproblem. Løsningen til det herved definerede randværdiproblem, se figur 5.2, betegnes $\underline{\Sigma}'(\underline{x}, t)$, $\underline{E}'(\underline{x}, t)$, $u'(\underline{x}, t)$.

Det fremgår umiddelbart af (5.15), (5.16) og (5.17), at løsningen $\underline{\Sigma}$, \underline{E} , u til det oprindelige problem og løsningen $\underline{\Sigma}'$, \underline{E}' , u' til det afledte problem er identiske for $0 \leq t \leq t'$. Det afledte problem kan opfattes som et revneudbredelsesproblem, hvor revnen R udbreder sig langs kurven K i overensstemmelse med den for det oprindelige problem givne udbredeshistorie i tidsrummet $t \in [0; t']$, for derefter til tidspunktet $t = t'$ at gå i stå i punktet P , og være stationær for alle $t > t'$.



Figur 5.2. Afledt randværdiproblem.

Det afledte problem er derfor lige så velegnet som det oprindelige problem med hensyn til besvarelsen af spørgsmålet om hvilken værdi en given revnespidsparameter har til tidspunktet $t = t'$. Desuden giver løsning af det sidste problem os svaret på hvordan den pågældende revnespidsparameter udvikles i tiden $t > t'$, såfremt revnen til tiden $t = t'$ går i stå i punktet P. Denne viden skal senere vise sig at kunne blive nyttiggjort.

Idet det afledte problem betragtes fås nu følgende. Spændingsintensitetsfaktoren k for revnespidsen i punktet P kan skrives

$$k(t) = k^y(t) + k^i(t) \quad (5.18)$$

hvor $k^y(t)$ angiver bidraget til $k(t)$ fra randbetingelserne på den ydre rand alene, altså løsningen til problemet med randbetingelserne (5.16.a), samt

$$\Sigma'(\underline{x}, t)\underline{n} = 0; \underline{x} \in \partial\Omega^i(t') \quad (5.19)$$

Tilsvarende angiver $k^i(t)$ bidraget til $k(t)$ fra randbetingelserne på den indre rand alene, altså løsningen til problemet med randbetingelserne (5.16.b) og (5.16.c), samt

$$\underline{\Sigma}'(\underline{x}, t) \underline{n} = \underline{0} ; \underline{x} \in \partial\Omega^Y \quad (5.20)$$

Hver af bidragene $k^Y(t)$ og $k^i(t)$ findes nu ved anvendelse af korrespondensprincippet. Den elastiske løsning for bidraget $k^Y(t)$ antages i første omgang at kunne skrives *)

$$k^{Ye}(t) = a^{ky}(2\mu, 3\kappa) b^{ky}(t) \quad (5.21)$$

hvor faktoren $a^{ky}(2\mu, 3\kappa)$ angiver afhængigheden af de elastiske konstanter μ og κ , og faktoren $b^{ky}(t)$ angiver tidsafhængigheden **) introduceret af randbetingelserne (5.16.a). Den laplacetransformerede er da

$$k^{Y*}(p) = a^{ky}(pR_1^*(p), pR_2^*(p)) b^{ky*}(p) \quad (5.22)$$

Vi definerer

$$A^{ky*}(p) = \frac{1}{p} a^{ky}(pR_1^*(p), pR_2^*(p)) \quad (5.23)$$

hvilket medfører

$$k^{Y*}(p) = A^{ky*}(p) \cdot p \cdot b^{ky*}(p) \quad (5.24)$$

Anvendelse af laplacetransformationsteoriens differentiationsregel og foldningsregel, se (E.4) og (E.5) appendix E, giver

*) Den elastiske løsning vil meget ofte, men ikke altid kunne skrives på denne form. Det generelle tilfælde omtales senere.

**) Faktorerne a^{ky} og b^{ky} vil normalt også afhænge af tidsparameteren t' , dette får ingen indflydelse på overvejelserne.

da

$$\begin{aligned}
 k^y(t) &= \int_{0-}^t A^{ky}(t-\theta) \frac{db^{ky}(\theta)}{d\theta} d\theta \\
 &= \mathcal{A}^{ky} b^{ky}(t)
 \end{aligned}
 \tag{5.25}$$

hvor \mathcal{A}^{ky} er en Stieltjesfoldning med kernen $A^{ky}(\cdot)$

Bidraget $k^i(t)$ er noget vanskeligere at bestemme. Vi vil skrive

$$k^i(t) = k^{io}(t) + k^{i1}(t) \tag{5.26}$$

hvor k^{io} er bidraget fra randbetingelserne (5.16.c) alene, og k^{i1} er bidraget fra randbetingelserne (5.16.b) alene. Med "alene" menes som tidligere, at de øvrige randområder er spændingsfrie. Af den måde det sidste randværdiproblem givet ved (5.16) er afledt af det første (givet ved (5.15)) på, kan det umiddelbart sluttet, at der for den elastiske løsning gælder

$$k^{ioe}(t) = 0 \quad \text{for } t' \leq t < \infty \tag{5.27}$$

Vi kommer nu til et afgørende punkt i vore overvejelser. Bidraget k^{ioe} er bidraget til intensitetsfaktoren fra de spændinger (den viscoelastiske løsning for det oprindelig problem) som er påført den del af konturen $\partial\Omega^1(t')$ som til tidspunktet t endnu ikke er blevet en del af området $\partial\Omega^1(t)$. Bidraget er altså en spændingsstørrelse afledt af løsningen på et randværdiproblem over $\Omega(t')$ hvor den ydre rand er fri, medens den indre rand er belastet af et ligevægtssystem af kræfter. På dette problem kan vi altså benytte den i kapitel 2 afsnit 4 omtalte sætning hvoraf det fremgår, at den elastiske løsning for et sådant problem er uafhængig af de elastiske konstanter. Når dette er tilfældet, vil den elastiske og den viscoelastiske løsning være identiske. Vi kan derfor slutte at

$$k^{io}(t) = 0 \quad \text{for } t' \leq t < \infty \tag{5.28}$$

Ligning (5.28) er nøglen til en let vej til løsningen på et ellers vanskeligt problem.

Om intensitetsfaktoren $k(t)$ kan vi slutte at

$$k(t) = 0 \quad \text{for } 0 \leq t < t' \quad (5.29)$$

Således at vi ved anvendelse af (5.18) og (5.26) får at

$$k^Y(t) + k^{i0}(t) + k^{i1}(t) = 0, \quad 0 \leq t < t' \quad (5.30)$$

$$\Downarrow$$

$$k^{i0}(t) = - \left(k^Y(t) + k^{i1}(t) \right), \quad 0 \leq t < t'$$

Vi har allerede et udtryk (ligning (5.25)) for bidraget $k^Y(t)$. Ganske analogt til hvorledes dette blev bestemt finder vi

$$k^{i1}(t) = \mathcal{A}^{ki} b^{ki}(t) \quad (5.31)$$

Af ligningerne (5.28) og (5.30) fås nu et udtryk for bidraget $k^{i0}(t)$ gældende for hele tidsintervallet $0 \leq t < \infty$. Bidraget skrives

$$k^{i0}(t) = - (1 - \Delta(t-t')) \left(k^Y(t) + k^{i1}(t) \right) \quad (5.32)$$

hvor $\Delta(\cdot)$ er Heavisides enhedsfunktion. Det endelige resultat - intensitetsfaktoren $k(t)$ - bestemmes da af ligningerne (5.18), (5.26) og (5.32) til

$$k(t) = k^Y(t) + k^{i0}(t) + k^{i1}(t)$$

$$= \Delta(t-t') \left(k^Y(t) + k^{i1}(t) \right) \quad (5.33)$$

Indsættes udtrykkene for bidragene $k^Y(t)$ og $k^{i1}(t)$ fra ligningerne (5.25) og (5.31) fås

$$k(t) = \Delta(t-t') \left(\mathcal{A}^{ky} b^{ky}(t) + \mathcal{A}^{ki} b^{ki}(t) \right) \quad (5.34)$$

En fejl man meget let kan komme til at begå når man gennemfører

disse overvejelser er, at man på en eller anden måde får anbragt Heavisidefaktoren $\Delta(t-t')$ på den forkerte side af operatorene, således at et led i stedet for at have formen

$$\Delta(t-t') \mathcal{A} b(t) \quad (5.35)$$

så fejlagtigt får formen

$$\mathcal{A} \Delta(t-t') b(t) \quad (5.36)$$

Det er klart, at formen (5.36) fører til helt andre resultater end (5.35). Det kan blandt andet let ved anvendelse af laplace-transformationsteoriens grænseværdisætninger vises at

$$\lim_{t \rightarrow t'} \mathcal{A} \Delta(t-t') b(t) = a(R_1(0+), R_2(0+)) b(t') \quad (5.37)$$

jvnf. definitionerne (5.22) og (5.23). Det vil altså sige, at et fejlagtigt resultat af formen (5.36) fører til den forkerte konklusion, at spændingsintensitetsfaktorerne for et lineært viscoelastisk revneudbredelsesproblem altid vil være de samme som intensitetsfaktorerne for det tilsvarende elastiske problem, blot med de elastiske konstanter 2μ og 3κ erstattet af relaxationsfunktionernes begyndelsesværdier $R_1(0+)$ henholdsvis $R_2(0+)$. Den korrekte løsning for intensitetsfaktoren $k(t)$, $0 \leq t < \infty$, er imidlertid givet ved (5.34) for det tilfælde, at de elastiske løsninger for bidragene k^Y og k^{i1} kan skrives på formen (5.21), og for det tilfælde, at revnespidsen stopper i punktet P til $t = t'$. Intensitetsfaktoren til $t = t'$ er da

$$k(t') = \lim_{t \rightarrow t'} \left\{ \mathcal{A}^{ky} b^{ky}(t) + \mathcal{A}^{ki} b^{ki}(t) \right\}, \quad t > t' \quad (5.38)$$

Nu kan bidragene k^Y og k^{i1} imidlertid ikke altid skrives på formen (5.21). De generelle udtryk er

$$k^{Ye}(2\mu, 3\kappa, t) = \int_0^1 a_{n\alpha}^{ky}(2\mu, 3\kappa, \xi) b_{n\alpha}^{ky}(t, \xi) d\xi \quad (5.39)$$

$$k^{i1e}(2\mu, 3\kappa, t) = \int_0^1 a_{m\alpha}^{ki}(2\mu, 3\kappa, \xi) b_{m\alpha}^{ki}(t, \xi) d\xi \quad (5.40)$$

sum over n, m og α , $n = 1, 2, \dots, N$, $m = 1, 2, \dots, M$, $\alpha = 1, 2$. Størrelsen $a_{n\alpha}^{ky}$ betegner Greens funktion for belastningen $b_{n\alpha}^{ky}$ på det n 'te delområde af den ydre rand, tilsvarende for $a_{m\alpha}^{ki}$.

Udtrykket (5.33) gælder også i det generelle tilfælde, og de til (5.34) og (5.38) svarende generelle udtryk bliver da

$$k(t) = \Delta(t-t') \left(\int_0^1 \mathcal{A}_{n\alpha}^{ky}(\xi) b_{n\alpha}^{ky}(t, \xi) d\xi + \int_0^1 \mathcal{A}_{m\alpha}^{ki}(\xi) b_{m\alpha}^{ki}(t, \xi) d\xi \right) \quad (5.41)$$

henholdsvis

$$k(t') = \lim_{t \rightarrow t'} \left\{ \int_0^1 \mathcal{A}_{n\alpha}^{ky}(\xi) b_{n\alpha}^{ky}(t, \xi) d\xi + \int_0^1 \mathcal{A}_{m\alpha}^{ki}(\xi) b_{m\alpha}^{ki}(t, \xi) d\xi \right\}, \quad t > t' \quad (5.42)$$

hvor $\mathcal{A}_{n\alpha}^{ky}(\xi)$ og $\mathcal{A}_{m\alpha}^{ki}(\xi)$ er Stieltjesfoldninger med kernerne $A_{n\alpha}^{ky}(t, \xi)$ henholdsvis $A_{m\alpha}^{ki}(t, \xi)$, hvor de laplacetransformerede er definerede ved

$$\begin{aligned} A_{n\alpha}^{ky*}(p, \xi) &= \frac{1}{p} a_{n\alpha}^{ky}(pR_1^*(p), pR_2^*(p), \xi) \\ A_{m\alpha}^{ki*}(p, \xi) &= \frac{1}{p} a_{m\alpha}^{ki}(pR_1^*(p), pR_2^*(p), \xi) \end{aligned} \quad (5.43)$$

Problemet er nu løst for så vidt det drejer sig om bestemmelse af en spændingsintensitetsfaktor.

Hermed er den største del af problemet med hensyn til bestemmelse af den viscoelastiske løsnings asymptotiske egenskaber omkring revnespidsen til tiden $t = t'$ løst.

En deformationsfaktor d bestemmes da på følgende måde. Mellem deformationsfaktoren d og den til d svarende spændingsintensitetsfaktor k gælder jo

$$d^e = a^d(2\mu, 3\kappa) k^e(2\mu, 3\kappa, t) \quad (5.44)$$

jvnf. ligningerne (5.7). Anvendelse af korrespondensprincippet giver da

$$d^*(p) = a^d(pR_1^*(p), pR_2^*(p)) k^*(p) \quad (5.45)$$

og dermed

$$d(t) = \mathcal{A}^d k(t) \quad (5.46)$$

hvor \mathcal{A}^d er en Stieltjesfoldning med kernen $A^d(t)$ defineret ved

$$A^{d*}(p) = \frac{1}{p} a^d(pR_1^*(p), pR_2^*(p)) \quad (5.47)$$

Løsningen (5.46) angiver deformationsfaktoren d hvis revnen går i stå i P til tiden $t = t'$. Deformationsfaktoren d til tiden $t = t'$ findes derfor af

$$d(t') = \lim_{t \rightarrow t'} \mathcal{A}^d k(t), \quad t > t' \quad (5.48)$$

En deformationsfaktor c findes på helt tilsvarende måde. Problemet er hermed endeligt løst. Lad os resumere de vigtigste resultater fra dette afsnit.

Hvis bidragene k^{ye} og k^{i1e} til den elastiske spændingsintensitetsfaktor k^e fra betingelserne på den ydre henholdsvis den indre rand kan skrives

$$\begin{aligned} k^{ye} &= a^{ky}(2\mu, 3\kappa) b^{ky}(t) \\ k^{i1e} &= a^{ki}(2\mu, 3\kappa) b^{ki}(t) \end{aligned} \quad (5.49)$$

så bestemmes intensitetsfaktoren k til tidspunktet $t = t'$ af

$$k(t') = \lim_{t \rightarrow t'} \left\{ \mathcal{A}^{ky} b^{ky}(t) + \mathcal{A}^{ki} b^{ki}(t) \right\}, \quad t > t' \quad (5.50)$$

og såfremt revnen går i stå i punktet P til $t = t'$, så bestemmes intensitetsfaktoren k for punktet P af

$$k(t) = \Delta(t-t') \left(\mathcal{A}^{ky} b^{ky}(t) + \mathcal{A}^{ki} b^{ki}(t) \right) \quad (5.51)$$

hvor Stieltjesfoldningerne \mathcal{A}^{ky} og \mathcal{A}^{ki} har kernerne $A^{ky}(t)$ og $A^{ki}(t)$ defineret ved

$$A^{ky*}(p) = \frac{1}{p} a^{ky}(pR_1^*(p), pR_2^*(p)) \quad (5.52)$$

$$A^{ki*}(p) = \frac{1}{p} a^{ki}(pR_1^*(p), pR_2^*(p))$$

I det generelle tilfælde hvor bidragene k^{ye} og k^{ie} skrives

$$k^{ye} = \int_0^1 a_{n\alpha}^{ky}(2\mu, 3\kappa, \xi) b_{n\alpha}^{ky}(t, \xi) d\xi \quad (5.53)$$

$$k^{ie} = \int_0^1 a_{m\alpha}^{ki}(2\mu, 3\kappa, \xi) b_{m\alpha}^{ki}(t, \xi) d\xi$$

hvor der er sum over n, m og α , $n = 1, 2, \dots, N$, $m = 1, 2, \dots, M$, $\alpha = 1, 2$, og hvor $a_{n\alpha}^{ky}$ betegner Greens funktion for belastningen $b_{n\alpha}^{ky}$ på det n'te delområde af den ydre rand og tilsvarende for $a_{m\alpha}^{ki}$, fås de til (5.50) og (5.51) svarende udtryk

$$k(t') = \lim_{t \rightarrow t'} \left\{ \int_0^1 \mathcal{A}_{n\alpha}^{ky}(\xi) b_{n\alpha}^{ky}(t, \xi) d\xi + \int_0^1 \mathcal{A}_{m\alpha}^{ki}(\xi) b_{m\alpha}^{ki}(t, \xi) d\xi \right\}, t > t' \quad (5.54)$$

$$k(t) = \Delta(t-t') \left(\int_0^1 \mathcal{A}_{n\alpha}^{ky}(\xi) b_{n\alpha}^{ky}(t, \xi) d\xi + \int_0^1 \mathcal{A}_{m\alpha}^{ki}(\xi) b_{m\alpha}^{ki}(t, \xi) d\xi \right) \quad (5.55)$$

hvor Stieltjesfoldningerne $\mathcal{A}_{n\alpha}^{ky}(\xi)$ og $\mathcal{A}_{m\alpha}^{ki}(\xi)$ har kernerne $A_{n\alpha}^{ky}(t, \xi)$ henholdsvis $A_{m\alpha}^{ki}(t, \xi)$ defineret ved

$$\begin{aligned} A_{n\alpha}^{ky*}(p, \xi) &= \frac{1}{p} a_{n\alpha}^{ky}(pR_1^*(p), pR_2^*(p), \xi) \\ A_{m\alpha}^{ki*}(p, \xi) &= \frac{1}{p} a_{m\alpha}^{ki}(pR_1^*(p), pR_2^*(p), \xi) \end{aligned} \quad (5.56)$$

De til k svarende deformationsfaktorer c og d til tiden $t = t'$ findes af

$$\begin{aligned} c(t') &= \lim_{t \rightarrow t'} \mathcal{A}^c k(t), \quad t > t' \\ d(t') &= \lim_{t \rightarrow t'} \mathcal{A}^d k(t), \quad t > t' \end{aligned} \quad (5.57)$$

og hvis revnen går i stå til tiden $t = t'$ findes

$$\begin{aligned} c(t) &= \mathcal{A}^c k(t) \\ d(t) &= \mathcal{A}^d k(t) \end{aligned} \quad (5.58)$$

hvor Stieltjesfoldningerne \mathcal{A}^c og \mathcal{A}^d har kernerne $A^c(t)$ og $A^d(t)$ definerede ved

$$\begin{aligned} A^{c*}(p) &= \frac{1}{p} a^c(pR_1^*(p), pR_2^*(p)) \\ A^{d*}(p) &= \frac{1}{p} a^d(pR_1^*(p), pR_2^*(p)) \end{aligned} \quad (5.59)$$

hvor funktionerne $a^c(2\mu, 3\kappa)$ og $a^d(2\mu, 3\kappa)$ er definerede ved

$$\begin{aligned} c^e &= a^c(2\mu, 3\kappa) k^e \\ d^e &= a^d(2\mu, 3\kappa) k^e \end{aligned} \quad (5.60)$$

og i øvrigt bestemmes af ligningerne (5.6) og (5.7).

Der bør nok til slut erindres om, at de her omtalte løsninger er baseret på betragtning af det tidligere omtalte afledte geometriske stationære problem, således at f.eks. bidragene k^{ye} og k^{ile} er bidragene til den elæstiske intensitetsfaktor for revnespidsen i P , svarende til den position revnespidsen i det op-

rindelige revneudbredelsesproblem har til tiden $t = t'$, fra randbetingelserne R^Y , $\underline{x} \in \partial\Omega^Y$ henholdsvis R^i , $\underline{x} \in \partial\Omega^i(t)$ alene, se ligning (5.16).

Som et vigtigt resultat af de i dette afsnit foretagne overvejelser ses det, at revnespidsparametrene ikke på nogen måde afhænger eksplicit af hastigheden af revnespidsen. Dette er nok for de fleste et overraskende resultat.

Den indsigtfulde læser vil måske endog være en smule skuffet over dette, idet han måske havde håbet at der kunne etableres en simpel sammenhæng mellem revnespidsparametre og udbredelseshastighed, hvorved vejen til en forklaring af langsomme (quasi-stationære) revneudbredelsesfænomener i lineært viscoelastiske materialer umiddelbart synes at være banet.

Ovenfor omtalte resultat er imidlertid ikke noget dårligt udgangspunkt for opstilling af en teori til forklaring af de langsomme revneudbredelsesfænomener. Sammenhængen mellem revnespidsens hastighed og dens tilstandsparametre k_Y , c_Y og d_Y etableres ved opstilling af en revneudbredelsesmodel*) for revneudbredelse i lineært viscoelastiske materialer, og i denne forbindelse viser det sig tværtimod at være en fordel at kunne basere sine overvejelser på ovenfor omtalte meget simple resultat.

Som afslutning på denne rapport, skal der i de følgende afsnit gives et par eksempler på bestemmelse af revnespidsparametre for nogle specifikke revneudbredelsesproblemer.

5.3. Eksempel 1, spændingsrandværdiproblem.

Vi betragter nu et rent spændingsrandværdiproblem over $\Omega = \Omega(t)$, hvor belastningen på den ydre rand $\partial\Omega^Y$ og belastningen på den indre rand $\partial\Omega^i = \partial\Omega^i(t)$ hver for sig udgør et ligevægtssystem.

*) Emnerne omtales i en senere rapport.

Der sker revneudbredelse ud fra en revnespids på den indre rand $\partial\Omega^i$ langs en vilkårlig kurve K.

Materialet er lineært viscoelastisk. For at simplificere regningerne vil vi imidlertid antage, at Poissons forhold kan regnes konstant, således at den fysiske betingelse kan skrives på formen

$$\sigma_{ij} = \frac{1}{1+\nu} \mathcal{R} \left(\varepsilon_{ij} + \frac{\nu}{1-2\nu} \delta_{ij} \varepsilon_{kk} \right) \quad (5.61)$$

jvnf. ligning (2.4), hvor \mathcal{R} er en Stieltjesfoldning med kernen $R(\cdot)$. Funktionen $R(t)$ er den til E-modulen E svarende relaxationsfunktion. Den til $R(t)$ svarende krybningsfunktion betegnes $K(t)$.

Vi vil først bestemme spændingsintensitetsfaktoren $k = k_\gamma$, $\gamma = 1, 2$ for den til den betragtede revne hørende revnespids. Lad os antage, at bidragene k^{ye} og k^{ie} kan skrives på formen (5.49), vi har da

$$k^{ye} = a^{ky} b^{ky}(t) \quad (5.62)$$

$$k^{ie} = a^{ki} b^{ki}(t)$$

hvor faktorerne a^{ky} og a^{ki} er uafhængige af de elastiske konstanter, jvnf. sætningen i afsnit 2.4. Hvis revnen stopper i P til tiden $t = t'$, så ses det af (5.51), at den viscoelastiske spændingsintensitetsfaktor for P kan skrives som et produkt af en heavisidefaktor og en elastisk spændingsintensitetsfaktor

$$k(t, t') = \Delta(t-t') k^e(t, t') \quad (5.63)$$

$$\text{hvor } k^e(t, t') = a^{ky} b^{ky}(t) + a^{ki} b^{ki}(t) \quad (5.64)$$

Det ses heraf, at spændingsintensitetsfaktorerne for et viscoelastisk revneudbredelsesproblem af den her betragtede type - uafhængig af revneudbredelsesforløb og belastningshistorie - altid har samme værdi som spændingsintensitetsfaktorerne for

det tilsvarende elastiske revneudbredelsesproblem.

Dette resultat kan også meget let findes direkte ved anvendelse af korrespondensprincippet (4.16).

De til k svarende deformationsfaktorer c og d findes nu. Af (5.60), (5.6) og (5.7) ses at

$$c^e = a^c(E, \nu) k^e = \frac{\rho^c(\nu)}{E} k^e \quad (5.65)$$

$$d^e = a^d(E, \nu) k^e = \frac{\rho^d(\nu)}{E} k^e$$

hvor $\rho^c(\nu) = 1 + \nu$

$$\rho^d(\nu) = \begin{cases} 2(1-\nu^2) & \text{for plan tøjn.tilst.} \\ 2 & \text{for plan spænd.tilst.} \end{cases} \quad (5.66)$$

Af (5.58) fås da

$$\begin{aligned} c(t, t') &= \rho^c(\nu) \mathcal{K} \Delta(t-t') k(t, t') \\ d(t, t') &= \rho^d(\nu) \mathcal{K} \Delta(t-t') k(t, t') \end{aligned} \quad (5.67)$$

hvor \mathcal{K} er en Stieltjesfoldning med kernen $K(\cdot)$.

Det ses, c og d for samme mode og til samme tidspunkt er direkte proportionale. Det vil altså sige, at løsningsfeltets asymptotiske egenskaber i dette tilfælde ($\nu = \text{konstant}$) for hver mode kan beskrives ved kun to faktorer, f.eks. k og c , altså i alt 4 af hinanden uafhængige parametre.

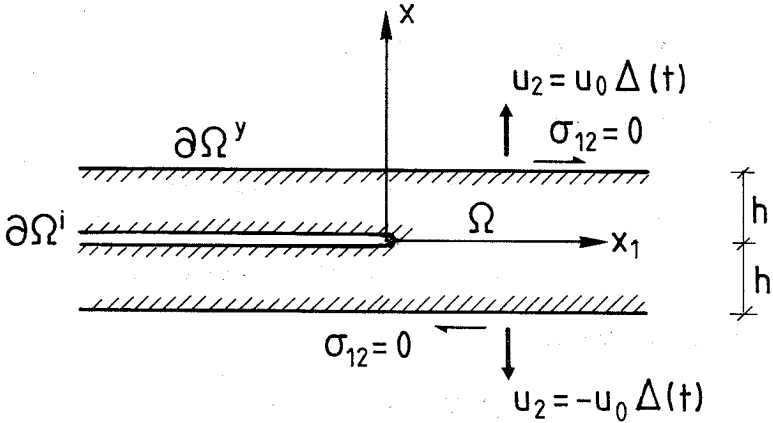
5.4. Eksempel 2, flytningsrandværdiproblem.

Revneudbredelse i uendelig lang strimmel.

Vi betragter i det følgende et rent flytningsrandværdiproblem over $\Omega = \Omega(t)$. Området Ω er her en uendelig lang strimmel med bredden $2h$. Der er indlagt et x_1, x_2 -koordinatsystem med x_1 -ak-

sen anbragt midt i strimmelen og orienteret parallelt med strimmelenes længderetning.

Der sker udbredelse af en uendelig lang revne langs linien $x_2 = 0$, og udbredelsen sker i x_1 -aksens positive retning, se i øvrigt figur 5.3.



Figur 5.3. Revneudbredelse i uendelig lang strimmel.

Problemets randbetingelser er

$$\left. \begin{aligned}
 x_2 = h : \left\{ \begin{array}{l} u_2 = u_0 \Delta(t) \\ \sigma_{12} = 0 \end{array} \right. \\
 x_2 = -h : \left\{ \begin{array}{l} u_2 = -u_0 \Delta(t) \\ \sigma_{12} = 0 \end{array} \right.
 \end{aligned} \right\} \quad (5.68)$$

Revneranden $\partial\Omega^i$ er spændingsfri.

Revneudbredeshistorien kan karakteriseres ved, at revnen er

stationær i $(x_1, x_2) = (0, 0)$ for $t < 0$, og at revnen udbreder sig med den vilkårlige hastighed $v(t)$ for $t \geq 0$, således at positionen af revnespidsen til tiden t er $(x_1, x_2) = (x_1(t), 0)$.

Vi vil som i det forrige afsnit forudsætte Poissons forhold konstant. Den fysiske betingelse er da

$$\sigma_{ij} = \frac{1}{1+\nu} \mathcal{R} \left(\varepsilon_{ij} + \frac{\nu}{1-2\nu} \delta_{ij} \varepsilon_{kk} \right) \quad (5.69)$$

hvor \mathcal{R} er en Stieltjesfoldning med kernen $R(\cdot)$. Funktionerne $R(t)$ og $K(t)$ betegner som i forrige afsnit relaxationsfunktionen henholdsvis krybningsfunktionen for enakset påvirkning.

Da det her betragtede problem er symmetrisk om x_1 -aksen, må intensitetsfaktoren k_2 og deformationsfaktorerne c_2 og d_2 alle være lig med nul. Intensitetsfaktoren k_1 findes da på følgende måde.

Da revneranden $\partial\Omega^i$ er spændingsfri, er bidraget k_1^{i1e} lig med nul, altså

$$k_1^{i1e} = 0 \quad \text{for alle } t \quad (5.70)$$

Bidraget k_1^{ye} kan findes i håndbøger om spændingsanalyse af elastiske revneproblemer, f.eks. Tada, Paris & Irwin [13].

Der findes

$$k_1^{ye} = \rho^k(v) E \Delta(t) \quad (5.71)$$

$$\text{hvor } \rho^k(v) = \begin{cases} \frac{u_0}{\sqrt{\pi h}} & \text{for plan spænd.tilst.} \\ \frac{u_0}{\sqrt{\pi h(1-\nu^2)}} & \text{for plan tøjn.tilst.} \end{cases} \quad (5.72)$$

Bidragene k_1^{i1e} og k_1^{ye} kan altså skrives på formen (5.49). Hvis revnen stopper i punktet P til tiden $t = t'$, så ses det af (5.49), (5.51) og (5.52), at den viscoelastiske spændingsintensitetsfaktor for punktet P kan findes til

$$\begin{aligned} k_1(t, t') &= \rho^k(v) \Delta(t-t') \mathcal{R} \Delta(t) \\ &= \rho^k(v) \Delta(t-t') R(t) \end{aligned} \quad (5.73)$$

Hvis revnespiden er i bevægelse til det vilkårlige tidspunkt $t = t'$, så ses det af (5.50), at spændingsintensitetsfaktoren for revnespiden findes af

$$\begin{aligned} k_1(t') &= \lim_{t \rightarrow t'} \rho^k(v) \Delta(t-t') R(t), \quad t > t' \\ &= \rho^k(v) R(t') \end{aligned} \quad (5.74)$$

Spændingsintensitetsfaktoren k_1 afhænger i dette tilfælde, som det ses, udelukkende af i hvor lang tid strimmelen har været belastet, og overhovedet ikke af revneudbredelsesforløbet.

Da Poissons forhold regnes konstant er deformationsfaktorerne c_1 og d_1 som omtalt i forrige afsnit proportionale, og deformationsfeltet kan derfor beskrives fuldstændigt ved blot en af faktorerne. Af (5.60), (5.6) og (5.7) findes da

$$\begin{aligned} c_1^e &= a^c(E, v) k_1^e = \frac{\rho^c(v)}{E} k_1^e \\ d_1^e &= a^d(E, v) k_1^e = \frac{\rho^d(v)}{E} k_1^e \end{aligned} \quad (5.75)$$

hvor $\rho^c(v)$ og $\rho^d(v)$ er angivet i ligningerne (5.66). Deformationsfaktorerne $c_1(t, t')$ og $d_1(t, t')$ for punktet P findes da af (5.58), (5.59), (5.75) og (5.73) til

$$\begin{aligned} c_1(t, t') &= \rho^c(v) \rho^k(v) \mathcal{H} \Delta(t-t') R(t) \\ d_1(t, t') &= \rho^d(v) \rho^k(v) \mathcal{H} \Delta(t-t') R(t) \end{aligned} \quad (5.76)$$

hvor \mathcal{H} er en Stieltjesfoldning med kernen $K(\cdot)$. Ved anvendelse af bl.a. ligning (C.4) i appendix C, samt ligningerne (D.3) og (D.4) i appendix D kan funktionen $\mathcal{H} \Delta(t-t') R(t)$ udregnes til

$$\mathcal{H}_{\Delta}(t-t') R(t) = \Delta(t-t') K(t-t') R(t') \quad (5.77)$$

Indsættes dette i (5.76) fås da

$$\left. \begin{aligned} c_1(t, t') &= \rho^c(v) \rho^k(v) \Delta(t-t') K(t-t') R(t') \\ &= \rho^c(v) \Delta(t-t') K(t-t') k_1(t') \\ \text{og } d_1(t, t') &= \rho^d(v) \rho^k(v) \Delta(t-t') K(t-t') R(t') \\ &= \rho^d(v) \Delta(t-t') K(t-t') k_1(t') \end{aligned} \right\} (5.78)$$

Hvis revnespidsen er i bevægelse til det vilkårlige tidspunkt $t = t'$, så fås det af (5.57) og (5.78), at deformationsfaktorerne for revnespidsen findes af

$$\left. \begin{aligned} c_1(t') &= \rho^c(v) \rho^k(v) K(0+) R(t') \\ &= \rho^c(v) K(0+) k_1(t') \\ \text{og } d_1(t') &= \rho^d(v) \rho^k(v) K(0+) R(t') \\ &= \rho^d(v) K(0+) k_1(t') \end{aligned} \right\} (5.79)$$

Som det ses, er deformationsfaktorerne kun afhængige af i hvor lang tid strimmelen har været belastet, og om hastigheden af revnespidsen er nul eller forskellig fra nul.

Lad os definere størrelserne

$$k_1^{\infty} = \rho^k(v) R(0+) \quad (5.80)$$

$$d_1^{\infty} = \rho^d(v) \rho^k(v) K(\infty) R(0+)$$

På figurerne 5.4, 5.5, 5.6 og 5.7 er funktionerne

$$\frac{k_1(t, t')}{k_1^\infty}, \frac{d_1(t, t')}{d_1^\infty}, \frac{k_1(t, t') \cdot d_1(t, t')}{k_1^\infty \cdot d_1^\infty}$$

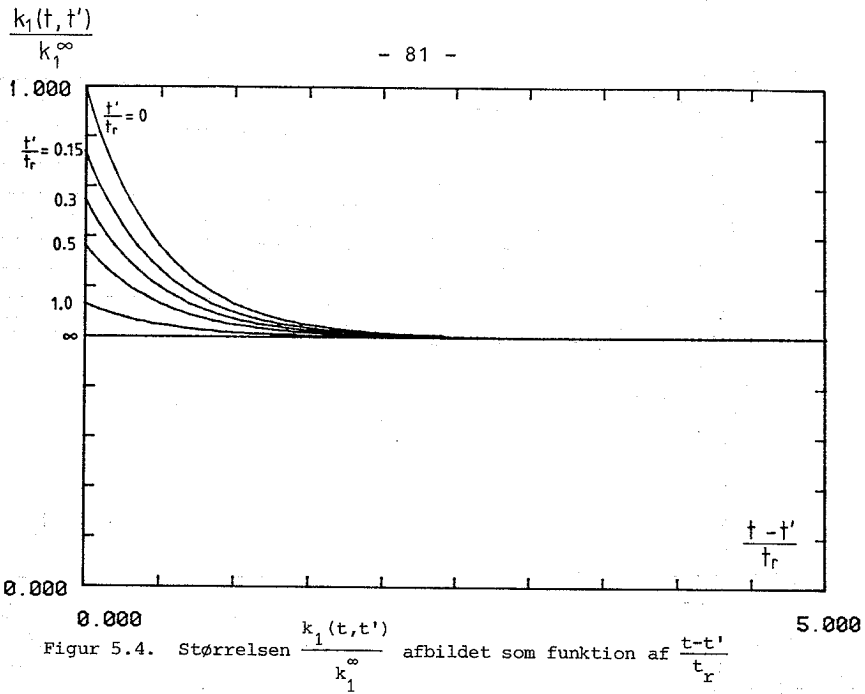
og
$$\left(\frac{k_1(t, t')}{k_1^\infty}\right)^2 + \left(\frac{d_1(t, t')}{d_1^\infty}\right)^2$$

afbildet som funktion af $(t-t')/t_r$ for forskellige værdier af t'/t_r i det tilfælde at der er tale om et Thomsonmateriale. For et Thomsonmateriale gælder, se tabel C.1. appendix C at

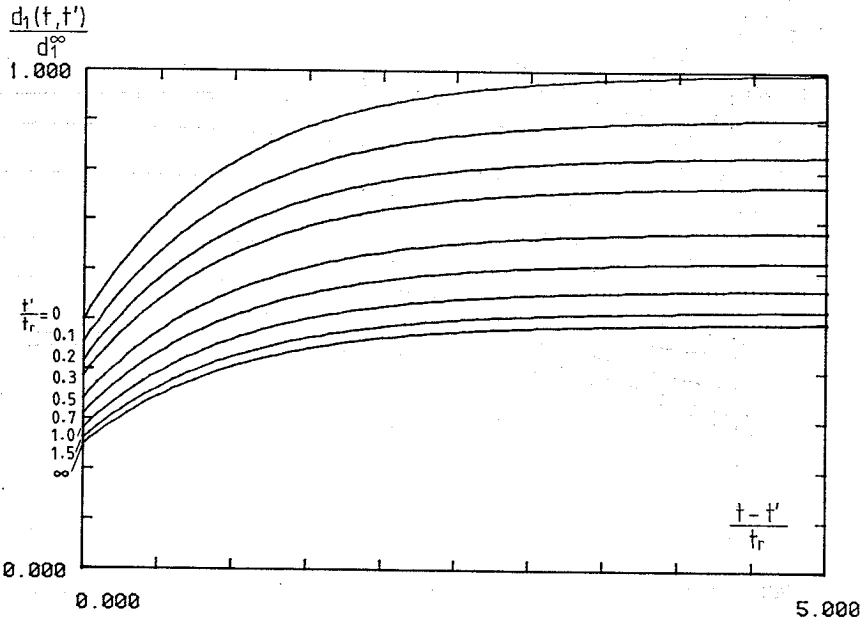
$$R(t) = \frac{EE_k}{E+E_k} \left(1 + \frac{E}{E_k} e^{-\left(1+\frac{E}{E_k}\right) \frac{t}{t_r}}\right) \tag{5.81}$$

og
$$K(t) = \frac{1}{E} + \frac{1}{E_k} \left(1 + e^{-\frac{t}{t_r}}\right)$$

Størrelsen t_r kaldes relaxationstiden. For de optegnede tilfælde er det forudsat at $E = E_k$, hvilket er ensbetydende med at $R(\infty) = \frac{1}{2} R(0+)$ og $K(\infty) = 2K(0+)$.

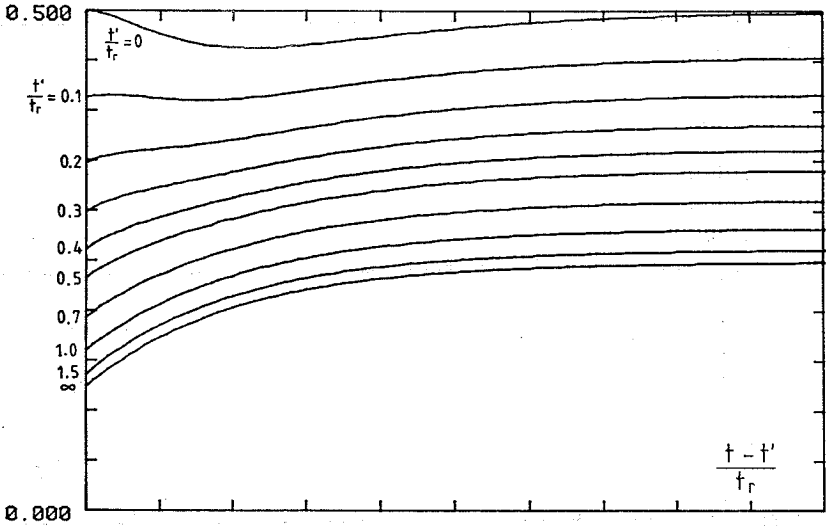


Figur 5.4. Størrelsen $\frac{k_1(t, t')}{k_1^\infty}$ afbildet som funktion af $\frac{t-t'}{t_r}$



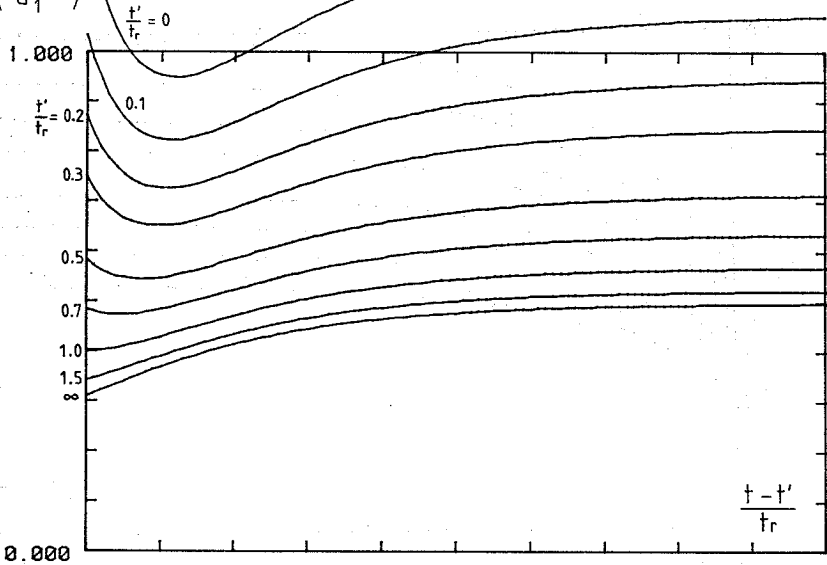
Figur 5.5. Størrelsen $\frac{d_1(t, t')}{d_1^\infty}$ afbildet som funktion af $\frac{t-t'}{t_r}$

$$\frac{k_1(t, t') d_1(t, t')}{k_1^\infty d_1^\infty}$$



Figur 5.6. Størrelsen $\frac{k_1(t, t') d_1(t, t')}{k_1^\infty d_1^\infty}$ afbildet som funktion af $\frac{t-t'}{t_r}$

$$\left(\frac{k_1(t, t')}{k_1^\infty}\right)^2 + \left(\frac{d_1(t, t')}{d_1^\infty}\right)^2$$



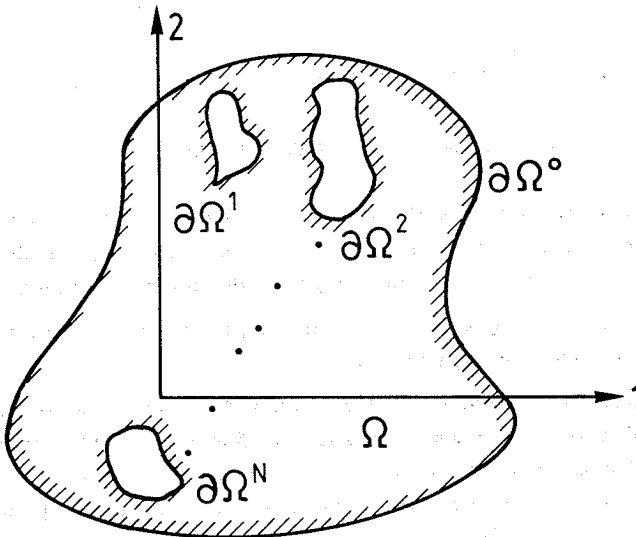
Figur 5.7. Størrelsen $\left(\frac{k_1(t, t')}{k_1^\infty}\right)^2 + \left(\frac{d_1(t, t')}{d_1^\infty}\right)^2$ afbildet som funktion af $\frac{t-t'}{t_r}$.

APPENDIX A

En vigtig sætning fra elasticitetsteorien.

Givet et elastisk randværdiproblem over et område Ω i planen med den ydre rand $\partial\Omega^0$ og de indre rande (konturer) $\partial\Omega^k$, $k = 1, 2, \dots, N$. Ingen af de $N+1$ konturer har fælles punkter.

Sætning. Hvis der er tale om et rent spændingsrandværdiproblem hvor belastningerne på hver af de indre konturer hver for sig udgør et ligevægtssystem, så vil spændingsløsningen ikke afhænge af de fysiske egenskaber.



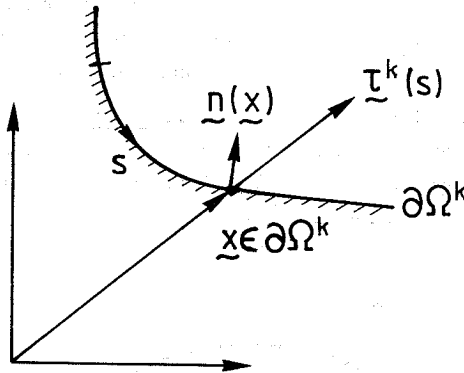
Figur A.1. Område med N huller.

Beviset for sætningen forløber nu som følger.

Vi indfører et kartesisk koordinatsystem med akserne x_1 og x_2 .
Randbetingelserne er givet på formen

$$\sigma_{\alpha\beta}(\underline{x}) \cdot \underline{n}_{\beta}(\underline{x}) = \tau_{\alpha}^k(s(\underline{x})) ; \quad (\text{A.1})$$

$$\underline{x} \in \partial\Omega^k, \quad k = 0, 1, \dots, N .$$



Figur A.2. Belastning på den k'te kontur.

$\underline{\tau}_{\alpha}^k(s)$ er altså den kendte belastning på den k'te kontur, s er en buekoordinat, regnet positiv mod uret, og $\underline{n}(\underline{x})$ er den udadrettede enhedsnormal til den pågældende kontur i punktet \underline{x} .

Vi vil først betragte en række af delproblemer afledt af det oprindelige randværdiproblem.

Lad os først betragte den ydre kontur $\partial\Omega^0$ alene. Konturen omslutter det enkelt sammenhængende område Ω^0 . Dette spændingsrandværdiproblem er karakteriseret ved sin Green's funktion $G_{\alpha\beta\gamma}^0(\underline{x}, s)$ som giver os spændingstilstanden $\sigma_{\alpha\beta}^0(\underline{x})$ i punktet $\underline{x} \in \Omega^0$ for en vilkårlig belastning $\underline{t}_{\gamma}^0(s)$ på $\partial\Omega^0$. Spændingen findes af

$$\sigma_{\alpha\beta}^0(\underline{x}) = \oint_{\partial\Omega^0} G_{\alpha\beta\gamma}^0(\underline{x}, s) t_{\gamma}^0(s) ds ; \quad \underline{x} \in \Omega^0 \quad (\text{A.2})$$

for enhver belastning $t_Y^0(s)$ på $\partial\Omega^0$ angiver (A.2) en løsning på randværdiproblemet. Løsningerne er alle løsninger for et enkelt-sammenhængende område og er derfor alle uafhængige af materialets fysiske egenskaber.

Lad os derefter betragte en vilkårlig af de indre konturer $\partial\Omega^k$, $k = 1, 2, \dots, N$ i den ∞ -store plan. Den ∞ -store plan med et enkelt hul udgør et enkelt-sammenhængende område Ω^k hvis belastningen på randen $\partial\Omega^k$ udgør et ligevægtssystem. For et sådant vilkårligt ligevægtssystem $t^k(s(\underline{x}))$; $\underline{x} \in \partial\Omega^k$ findes løsningen som tidligere ved anvendelse af Green's funktion

$$\sigma_{\alpha\beta}^k(\underline{x}) = \oint_{\partial\Omega^k} G_{\alpha\beta\gamma}^k(\underline{x}, s) t_Y^k(s) ds ; \underline{x} \in \Omega^k \quad (A.3)$$

ingen af disse løsninger, $k = 1, 2, \dots, N$, vilkårligt $t_Y^k(s)$, afhænger af materialets fysiske egenskaber.

Løsningen for det oprindeligt givne spændingsrandværdiproblem over $\Omega = \bigcup_{k=0}^N \Omega^k$ kan findes ved superposition af løsningerne $\sigma_{\alpha\beta}^k$, $k = 0, 1, \dots, N$.

Spændingsfeltet

$$\sigma_{\alpha\beta}(\underline{x}) = \sum_{k=0}^N \sigma_{\alpha\beta}^k(\underline{x}) ; \underline{x} \in \Omega \quad (A.4)$$

opfylder feltligningerne i Ω , og giver - ved anvendelse af den fysiske betingelse - et flytningsfelt som er entydigt i Ω .

Spændingsfeltet (A.4) opfylder derimod ikke nødvendigvis randbetingelserne (A.1). De indtil nu vilkårlige tæthedsfunktioner $t_\alpha^k(s)$ skal afpasses således at dette er tilfældet. Herved fås et sæt af integralligninger idet (A.4) indsat i (A.1) giver

$$\begin{aligned} \tau_\alpha^k(s(\underline{x})) &= \left\{ \sum_{k=0}^N \sigma_{\alpha\beta}^k(\underline{x}) \right\} \cdot n_\beta(\underline{x}) \\ &= \left\{ \sum_{k=0}^N \oint_{\partial\Omega^k} G_{\alpha\beta\gamma}^k(\underline{x}, s) t_Y^k(s) ds \right\} \cdot n_\beta(\underline{x}) ; \quad (A.5) \\ &\quad \underline{x} \in \partial\Omega^k, k = 0, 1, \dots, N \end{aligned}$$

- altså et sæt af integralligninger til bestemmelse af tætheds-

funktionerne $\underline{t}^k(s)$

Når de korrekte udviklingsfunktioner $\underline{t}^k(s)$ er bestemt af (A.5), findes spændingsløsningen for det oprindelige spændingsrandværdiproblem af (A.4), altså

$$\begin{aligned}\sigma_{\alpha\beta}(\underline{x}) &= \sum_{k=0}^N \sigma_{\alpha\beta}(\underline{x}) \\ &= \sum_{k=0}^N \oint_{\partial\Omega^k} G_{\alpha\beta\gamma}^k(\underline{x},s) t_{\gamma}^k(s) ds ; \underline{x} \in \Omega\end{aligned}\quad (\text{A.6})$$

Spændingsløsningen findes altså af enkeltløsninger, som hver for sig er uafhængige af de elastiske konstanter ved en procedure, som det ses ovenfor, heller ikke på noget punkt gør brug af materialets fysiske egenskaber. Det ses altså, at løsningen givet ved (A.6) er uafhængig af materialets fysiske egenskaber - sætningen er hermed bevist.

APPENDIX B

Formulering af en singulær integralligning til løsning af et vilkårligt elastisk revneproblem.

Vi vil her angive en metode ved hjælp af hvilken et næsten vilkårligt elastisk revneproblem kan formuleres som et integral-ligningsproblem af typen

$$af(x) + b \int_{t \in I} \frac{f(t) dt}{t-x} + \int_{t \in I} k(t,x) f(t) dt = g(x) \quad (\text{B.1})$$

Først skal vi bruge nogle resultater fra dislokationsteorien.

B.1. Dislokationer.

Lad os betragte et legeme over det plane område Ω med den ydre rand $\partial\Omega^0$ og den simple revne R på den indre kontur $\partial\Omega^1$. Revnen R er et stykke af kurven K givet ved

$$K = \{ \underline{x} \mid \underline{x} = \underline{z}(s) ; s \in [s_{01}^*, s_{02}^*] \} \quad (\text{B.2})$$

hvor $\underline{z}(s_{0\alpha}^*) \in \partial\Omega^0$, $\alpha = 1, 2$

Revnen R er givet ved

$$R = \{ \underline{x} \mid \underline{x} = \underline{z}(s) ; s \in [s_{01}, s_{02}] \} \quad (\text{B.3})$$

hvor s_{01} og s_{02} er indre punkter i intervallet $[s_{01}^*, s_{02}^*]$. Lad den lukkede kurve Γ omslutte én af revnespidserne $s = s_{0\alpha}$, og i øvrigt forløbe inden for konturen $\partial\Omega^0$. En revne R er da bl.a. karakteriseret ved at det normale krav til flytningsfeltet $\underline{u} = \underline{u}(\underline{x})$, $\underline{x} \in \Omega$

$$\oint_{\Gamma} du = 0 \quad (\text{B.4})$$

ikke altid er opfyldt i den deformerede tilstand. Dette skyldes, at der er mulighed for at

$$\left. \begin{aligned} u^+(x) &\neq u^-(x) ; x \in R \\ \text{hvor } u^+(x) &= \lim_{x' \rightarrow x} u(x') ; x' \in D^+(x) \\ u^-(x) &= \lim_{x' \rightarrow x} u(x') ; x' \in D^-(x) \end{aligned} \right\} \quad (\text{B.5})$$

Flytningsdiskontinuiteter er imidlertid tæt knyttet til kontinuummekanikkens dislokationsbegreber. Lad Γ være en lukket kurve som omslutter punktet x_0 og som i øvrigt forløber inden for konturen $\partial\Omega^0$. Punktet x_0 siges at være et dislokationspunkt for en kantdisklokation*) med Burgers vektor b , hvis det for alle kurver Γ gælder at

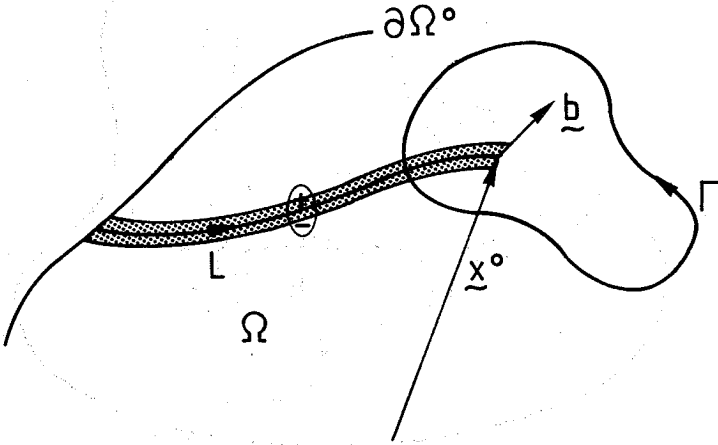
$$\oint_{\Gamma} du = -b \quad (\text{B.6})$$

Det indses let at (B.6) er ensbetydende med at der langs en kurve $L = \{x | x = r_L(s), s \in [s_{01}, s_{02}]\}$ hvor $r_L(s_{01}) \in \partial\Omega^0$ og $r_L(s_{02}) = x_0$ gælder

$$u^+(x) - u^-(x) = b ; x \in L \quad (\text{B.7})$$

Kurven L kan være vilkårlig, blot skal den have en geometri der sikrer, at betingelsen (B.7) overhovedet kan opfyldes. Dette svarer til at prikproduktet $e_t \cdot b$ skal have samme fortegn overalt på L .

*) Skruedislokationer er tilsvarende tæt knyttet til antiplane revneproblemer.



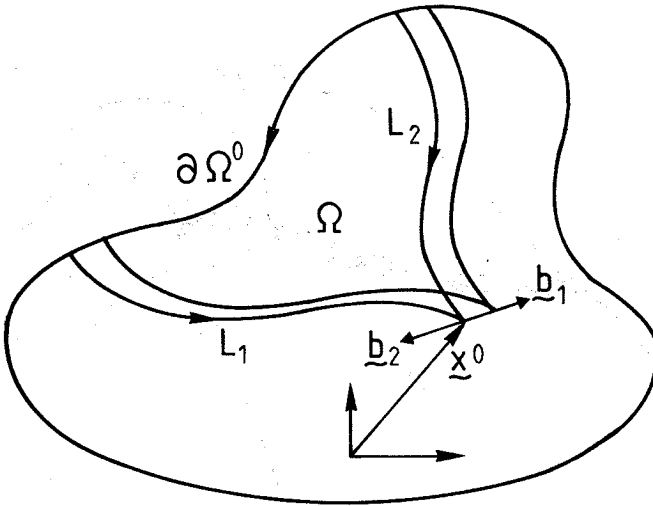
Figur B.1. Kantdislokation i \underline{x}° .

Vi vil nu undersøge, hvilket spændingsfelt tilstedeværelsen af en sådan kantdislokation afstedkommer. Vi skal først indse, at spændingsfeltet kun afhænger af Burgers vektor \underline{b} og af dennes angrebspunkt \underline{x}° . Spændingsfeltet afhænger altså ikke, som man umiddelbart skulle tro, af formen på kurven L . Dette indses ved hjælp af følgende argument.

Der etableres en kantdislokation \underline{b}_1 i punktet $\underline{x}^\circ \in \Omega$. Kantdislokationen tænkes etableret ved en betingelse af formen (B.7) langs en kurve L_1 , som forbinder \underline{x}° med et punkt på randen $\partial\Omega^\circ$. Vi etablerer nu på helt samme måde endnu en kantdislokation \underline{b}_2 i \underline{x}° ved en betingelse af formen (B.7) langs kurven L_2 . Kurverne L_1 og L_2 er forskellige, men valgt således, at de begge i deres positive gennemløbsretning forløber fra et punkt på randen $\partial\Omega^\circ$ til dislokationspunktet \underline{x}° .

Lad os nu antage at

$$\underline{b}_2 = - \underline{b}_1 \tag{B.8}$$



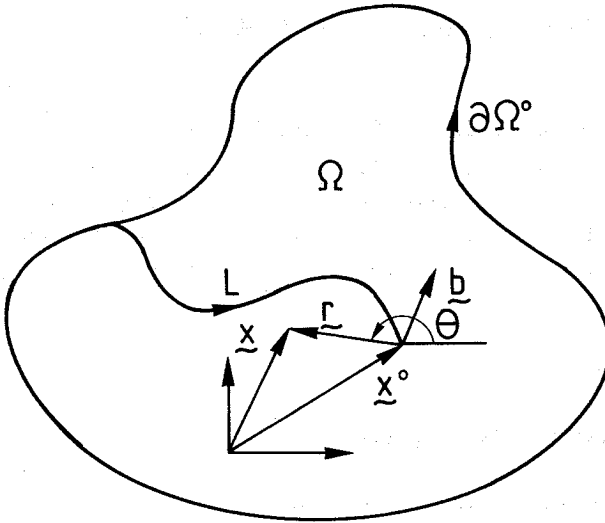
Figur B.2. To kantdislokationer \underline{b}_1 og \underline{b}_2 .

Hvis (B.8) er opfyldt, så ses det jo, se figur B.2, at spændingsfelterne fra de to dislokationer ophæver hinanden. Etableringen af de to modsat rette dislokationer i \underline{x}^0 forårsager blot en stiftlegemeflytning af de to delområder i forhold til hinanden, som kurverne L_1 og L_2 deler området Ω i. Denne stiftlegemeflytning er kommet i stand ved at fjerne en stribe materiale langs L_1 og indsætte en stribe materiale langs L_2 eller omvendt. Men så ses det også, at hvis spændingsfelterne ophæver hinanden for vilkårlige kurver L_1 og L_2 , så må spændingsfeltet hidrørende fra en kantdislokation, som er etableret ved en betingelse af formen (B.7) langs en kurve L , være uafhængig af denne kurves form.

Lad os altså nu betragte en kantdislokation \underline{b} i punktet \underline{x}^0 , etableret ved en betingelse af formen (B.7) langs kurven L , som i sin positive gennemløbsretning forløber fra et punkt på randen $\partial\Omega^0$ til dislokationspunktet \underline{x}^0 .

Af ovenstående fremgår da, at spændingsfeltet $\tau_{\alpha\beta}(\underline{x})$ hidrørende fra dislokationen \underline{b} i \underline{x}^0 alene afhænger af \underline{x}^0 , \underline{b} og \underline{x} , altså

$$\tau_{\alpha\beta}(\underline{x}) = \tau_{\alpha\beta}(\underline{x}^0, \underline{b}, \underline{x}) \quad (\text{B.9})$$



Figur B.3. Kantdislokation \underline{b} i \underline{x}^0 .

Der kan desuden implicit være en afhængighed af området Ω 's form, samt de ydre randbetingelser. Hvis vi imidlertid i første omgang antager at $|\underline{b}|$ er lille i forhold til alle øvrige geometrika for problemet, så kan der ses bort fra denne implicite afhængighed af form og randbetingelser, og spændingsfeltet er da det samme som i den uendelige plan.

Den lineært elastiske løsning for dette tilfælde er angivet i f.eks. Landau & Lifshitz [5] eller Eshelby [18] , og er påfaldende simpelt

$$\tau_{\alpha\beta}(\underline{x}) = \frac{f_{\alpha\beta\gamma}(\theta) b_{\gamma}}{|\underline{x}-\underline{x}^0|} \quad (\text{B.10})$$

hvor θ er vinkelen målt fra en fast retning til vektoren $\underline{r} = \underline{x}-\underline{x}^0$, og faktoren $f_{\alpha\beta\gamma}$ er en funktion af θ alene.

Hvis der skal tages hensyn til området Ω 's form og størrelse og til de ydre randbetingelser, fås en løsning af formen

$$\tau_{\alpha\beta}(\underline{x}) = \frac{f_{\alpha\beta\gamma}(\theta) b_{\gamma}}{|\underline{x}-\underline{x}^0|} + g_{\alpha\beta\gamma}(\underline{x}, \underline{x}^0) b_{\gamma} \quad (\text{B.11})$$

hvor bidraget $g_{\alpha\beta\gamma}(\underline{x}, \underline{x}^0) b_\gamma$ er regulært i Ω .

B.2. Formulering af integralligningen.

Vi vil nu vende tilbage til problemet vedrørende formuleringen af det til revneproblemet hørende integralligningsproblem, idet vi vil følge den idé, som er skitseret af Gold'dsten og Salganik [20]. Vi vil opstille en singular integralligning til bestemmelse af

$$\frac{d\Delta u}{ds} \tag{B.12}$$

hvor $\Delta u(s) = u^+(s) - u^-(s)$, $s \in R$ (B.13)

idet dette sammen med betingelsen

$$\Delta u(s_{\alpha}) = 0, \alpha = 1, 2 \tag{B.14}$$

giver os mulighed for bestemmelse af revnens deformationstilstand. Som vi skal se er en bestemmelse af funktionen $d\Delta u/ds$ i realitetem en fuldstændig løsning af randværdiproblemet.

Vektorfeltet $d\Delta u/ds$ opfattes som en kantdislokationstæthed $\rho(s) = d\Delta u/ds$ langs kurven R . Lad os antage, at spændingsfeltet $\sigma_{\alpha\beta}^0(\underline{x})$, $\underline{x} \in \Omega^0$ er løsningen til randværdiproblemet for området Ω^0 afgrænset af $\partial\Omega^0$ påsat en ydre randbetingelse $a_{\alpha\beta}$, og lad os antage, at denne løsning er kendt.

Den fuldstændige løsning til revneproblemet er da

$$\sigma_{\alpha\beta}(\underline{x}) = \sigma_{\alpha\beta}^0(\underline{x}) + \int_{s \in I} \tau_{\alpha\beta}(\underline{x}^0(s), \rho(s), \underline{x}) ds, \quad I = [s_{01}; s_{02}] \tag{B.15}$$

eller ved indsættelse af (B.11)

$$\sigma_{\alpha\beta}(\underline{x}) = \sigma_{\alpha\beta}^0(\underline{x}) + \int_{s \in I} \frac{f_{\alpha\beta\gamma}(\theta(s)) \rho_\gamma(s)}{|\underline{x} - \underline{x}^0(s)|} ds + \int_{s \in I} g_{\alpha\beta\gamma}(\underline{x}, \underline{x}^0(s)) \rho_\gamma(s) ds \quad (\text{B.16})$$

Vi vil nu opstille integralligningen til bestemmelse af $\rho(s)$, $s \in I$, idet vi vil antage, at der på revneranden $\partial\Omega^1$ udelukkende er tale om spændingsbetingelser. Metoden kan imidlertid uden principielle vanskeligheder anvendes på problemer med blandede randbetingelser på $\partial\Omega^1$, og det er kun af praktiske grunde, at vi gør denne forenkling. Vi antager altså en randbetingelse af formen

$$\sigma_{\alpha\beta}(\underline{x}) n_\beta(\underline{x}) = \tau_\alpha^1(\underline{x}), \quad \underline{x} \in \partial\Omega^1 \quad (\text{B.17})$$

hvor \underline{n} er den udadrettede normal til $\partial\Omega^1$ og det givne felt $\underline{\tau}^1$ opfylder kontinuitetsbetingelsen

$$\underline{\tau}^{1+}(\underline{x}) = \underline{\tau}^{1-}(\underline{x}), \quad \underline{x} \in R \quad (\text{B.18})$$

Integralligningen kan da uden videre skrives op ved indsættelse af (B.16) i (B.17)

$$\int_{s' \in I} \left\{ \frac{f_{\alpha\beta\gamma}(\theta(s')) \rho_\gamma(s') n_\beta(s)}{|\underline{x}(s) - \underline{x}(s')|} + g_{\alpha\beta\gamma}(\underline{x}(s), \underline{x}(s')) \rho_\gamma(s') n_\beta(s) \right\} ds' = \tau_\alpha^1(\underline{x}(s)) - \sigma_{\alpha\beta}^0(\underline{x}(s)) n_\beta(s), \quad s \in I \quad (\text{B.19})$$

Integralligningen (B.19) bestemmer da sammen med betingelserne (B.14) den søgte tæthed $\rho(s)$, $s \in I$.

Betingelserne (B.14) kan også skrives

$$\int_{s \in I} \rho(s) ds = 0, \quad \Delta u(s_{01}) = 0 \quad (\text{B.20})$$

Vi skal nu blot vise at integralligningen (B.18) kan bringes på formen (B.1). Dette gøres på følgende måde. Funktionen $1/|\underline{x}(s) - \underline{x}(s')|$ kan altid skrives

$$\frac{1}{|\underline{x}(s) - \underline{x}(s')|} = \frac{1}{s - s'} + A(s, s') \quad (\text{B.21})$$

hvor $A(s, s')$ er regulær for $s, s' \in I$. Vi har da umiddelbart ved indsættelse af (B.21) i (B.19) at

$$\int_{s' \in I} B_{\alpha\gamma}(s, s') \frac{\rho_\gamma(s')}{s - s'} ds' + \int_{s' \in I} \left\{ B_{\alpha\gamma}(s, s') A(s, s') + G_{\alpha\gamma}(s, s') \right\} \rho_\gamma(s') ds' = t_\alpha(s), \quad s \in I. \quad (\text{B.22})$$

$$\left. \begin{aligned} \text{hvor } B_{\alpha\gamma}(s, s') &= f_{\alpha\beta\gamma}(\theta(s, s')) n_\beta(s), \\ t_\alpha(s) &= \tau_\alpha^1(\underline{x}(s)) - \sigma_{\alpha\beta}^0(\underline{x}(s)) n_\beta(s) \\ \text{og } G_{\alpha\gamma}(s, s') &= g_{\alpha\beta\gamma}(\underline{x}(s), \underline{x}(s')) n_\beta(s) \end{aligned} \right\} \quad (\text{B.23})$$

Størrelsen $B_{\alpha\gamma}(s, s')$ er regulær for $s, s' \in I$. Den kan derfor altid skrives

$$\begin{aligned} B_{\alpha\gamma}(s, s') &= B_{\alpha\gamma}(s, s) + (s - s') D_{\alpha\gamma}(s, s') \\ &= C_{\alpha\gamma}(s) + (s - s') D_{\alpha\gamma}(s, s') \end{aligned} \quad (\text{B.24})$$

hvor størrelsen $D_{\alpha\gamma}(s, s')$ ligeledes er regulær for $s, s' \in I$. Indsættelse af (B.24) i (B.22) giver da direkte den ønskede ligning

$$C_{\alpha\gamma}(s) \int_{s' \in I} \frac{\rho_\gamma(s')}{s - s'} ds' + \int_{s' \in I} R_{\alpha\gamma}(s, s') \rho_\gamma(s') ds' = t_\alpha(s); \quad s \in I \quad (\text{B.25})$$

$$\text{hvor } R_{\alpha\gamma}(s, s') = B_{\alpha\gamma}(s, s')A(s, s') + G_{\alpha\gamma}(s, s') + D_{\alpha\gamma}(s, s') \quad (\text{B.26})$$

Hermed er vi færdige. Vi har hermed vist, at et vilkårligt re-
neproblem kan formuleres som et singulært integralligningspro-
blem af formen (B.1).

APPENDIX C

Fysisk betingelse for lineært viscoelastisk materiale.

C.1. Sammenhæng mellem relaxationsfunktioner og krybningsfunktioner.

Lad $\varepsilon(t)$ og $\sigma(t)$ være to til hinanden svarende tøjnings- og spændingsstørrelser, og lad den fysiske betingelse på henholdsvis relaxationsform og krybningform være

$$\sigma(t) = \mathcal{R} \varepsilon(t) \quad (\text{C.1})$$

$$\text{og} \quad \varepsilon(t) = \mathcal{K} \sigma(t) \quad (\text{C.2})$$

hvor \mathcal{R} og \mathcal{K} er Stieltjesfoldninger med kernerne $R(\cdot)$ henholdsvis $K(\cdot)$. Påføres nu spændingen $\sigma(t) = \sigma_0 \Delta(t)$ ses af (C.2) at dette medfører tøjningen $\varepsilon(t) = \sigma_0 K(t)$. Indsættes i (C.1) fås da umiddelbart

$$\mathcal{R} K(t) = \Delta(t) \quad (\text{C.3})$$

Tilsvarende fås

$$\mathcal{K} R(t) = \Delta(t) \quad (\text{C.4})$$

Ved laplacetransformation af (C.3) eller (C.4) ses desuden at der gælder

$$p^2 K^*(p) R^*(p) = 1 \quad (\text{C.5})$$

hvoraf det af laplacetransformationsteoriens grænseværdisætninger let ses at

$$K(0+) R(0+) = 1 \quad (\text{C.6})$$

samt såfremt $K(\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} K(t)$ eksisterer

$$K(\infty) R(\infty) = 1 \quad (C.7)$$

C.2. Simple fysiske betingelser.

Betragt sættet (σ, ε) bestående af de to til hinanden svarende spændings- og tøjningsstørrelser $\sigma = \sigma(t)$ og $\varepsilon = \varepsilon(t)$.

Ved en Hookebetingelse eller den fysiske betingelse for et Hooke-element forstås en betingelse af formen

$$\sigma = E \varepsilon \quad (C.8)$$

og ved en Newtonbetingelse eller den fysiske betingelse for et Newtonelement forstås en betingelse af formen

$$\sigma = \eta \frac{d\varepsilon}{dt} \quad (C.9)$$

Hookebetingelsen og Newtonbetingelsen udgør to basisbetingelser ud fra hvilke et utal af mere eller mindre komplicerede fysiske betingelser kan opbygges. Lad os nu betragte to spændings-tøjningssæt (σ', ε') og $(\sigma'', \varepsilon'')$. Til hver af sætterne er knyttet en vilkårlig fysisk betingelse af formen

$$\sigma' = \mathcal{R}' \varepsilon' \quad ; \quad \varepsilon' = \mathcal{K}' \sigma' \quad (C.10)$$

$$\text{og} \quad \sigma'' = \mathcal{R}'' \varepsilon'' \quad ; \quad \varepsilon'' = \mathcal{K}'' \sigma'' \quad (C.11)$$

Ved en sammenkobling af de to fysiske betingelser (C.10) og (C.11) forstås en tillægsbetingelse som sammebinder de to spændings-tøjningssæt (σ', ε') og $(\sigma'', \varepsilon'')$. Der kan være tale om en parallelkobling hvorved der forstås en tillægsbetingelse af formen

$$\varepsilon = \varepsilon' = \varepsilon'' \wedge \sigma = \sigma' + \sigma'' \quad (C.12)$$

eller der kan være tale om en seriekobling hvorved der forstås en tillægsbetingelse af formen

$$\sigma = \sigma' = \sigma'' \wedge \varepsilon = \varepsilon' + \varepsilon'' \quad (\text{C.13})$$

Ved elimination af $\sigma_1, \varepsilon_1, \sigma_2, \varepsilon_2$ i ligningerne (C.10), (C.11) og (C.12) eller (C.10), (C.11) og (C.13) fås der herved en fysisk betingelse for spændings-tøjningssættet (σ, ε) defineret ved ligningerne (C.12) eller (C.13) af formen

$$\sigma = \mathcal{R} \varepsilon, \quad \varepsilon = \mathcal{K} \sigma \quad (\text{C.14})$$

Det ses let, at der for parallelkobling gælder

$$\begin{aligned} \mathcal{R} &= \mathcal{R}' + \mathcal{R}'' & (\text{C.15}) \\ \Updownarrow \\ \mathcal{R}(t) &= \mathcal{R}'(t) + \mathcal{R}''(t) \end{aligned}$$

og at der for en seriekobling gælder

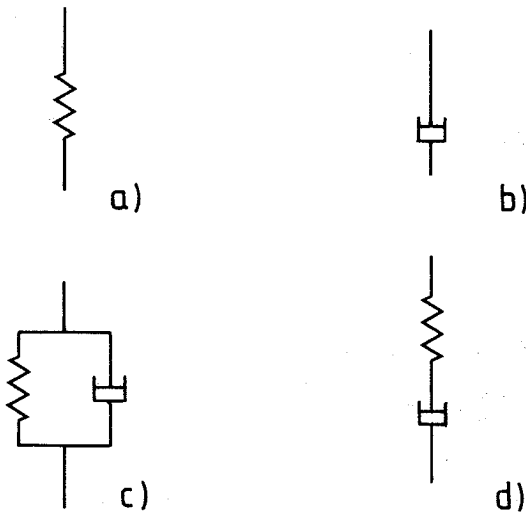
$$\begin{aligned} \mathcal{K} &= \mathcal{K}' + \mathcal{K}'' & (\text{C.16}) \\ \Updownarrow \\ \mathcal{K}(t) &= \mathcal{K}'(t) + \mathcal{K}''(t) \end{aligned}$$

hvor funktionerne $\mathcal{R}(\cdot), \mathcal{R}'(\cdot), \dots$ er de til Stieltjesfoldningerne $\mathcal{R}, \mathcal{R}', \dots$ svarende kerner.

Til anskueliggørelse af basisbetingelserne og sammenkoblinger af disse benyttes ofte de såkaldte mekaniske modeller som vist på figur C.1.

En fysisk betingelse siges at være simpel hvis den kan dannes ved sammenkobling af et endeligt antal basisbetingelser. Det kan relativt let indses, at en simpel fysisk betingelse altid kan skrives på formen

$$\sum_{n=0}^N p_n \frac{d^n}{dt^n} \sigma(t) = \sum_{m=0}^M q_m \frac{d^m}{dt^m} \varepsilon(t) \quad (\text{C.17})$$





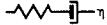
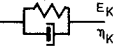


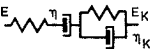
Figur C.1. Mekaniske modeller.

a): Fjeder - mekanisk model af Hookes betingelse. b): vædskebremse - mekanisk model af Newtons betingelse. c) og d) mekanisk model af henholdsvis en parallelkobling og en seriekobling af de to basisbetingelser.

Omvendt kan det vises, at hvis en fysisk betingelse kan skrives på formen (C.17), så er der tale om en simpel fysisk betingelse. En fysisk betingelse på formen (C.17) kaldes en fysisk betingelse på differentialligningsform. Vi definerer nu polynomierne

$$\begin{aligned} P(x) &= \sum_{n=0}^N p_n x^n \\ Q(x) &= \sum_{m=0}^M q_m x^m \end{aligned} \tag{C.18}$$

samt differentialoperatoren

Betegnelse	Mekanisk model	Fysisk betingelse på DL-form	Analog værdi
HOOKE	 E	$\sigma = E\epsilon$	E
NEWTON	 η	$\sigma = \eta \dot{\epsilon}$	ηP
MAXWELL	E  η	$\dot{\sigma} + \mu\sigma = E\dot{\epsilon}$	$E = \frac{P}{\dot{P} + \mu}$
KELVIN	 E_K η_K	$\sigma = \eta_K(\dot{\epsilon} + \mu_K\epsilon)$	$\eta_K(P + \mu_K)$
THOMSON	E  E_K η_K	$\dot{\sigma} + m_T\sigma = E(\dot{\epsilon} + \mu_K\epsilon)$	$E \frac{P + \mu_K}{P + m_T}$
LEATHERSICH	η  E_K η_K	$\mu_K(\dot{\sigma} + m_L\sigma) = m_L\eta(\ddot{\epsilon} + \mu_K\dot{\epsilon})$	$\frac{m_L\eta}{\mu_K} \frac{P(P + \mu_K)}{P + m_L}$
BURGER	E  E_K η_K	$\ddot{\sigma} + (m_{B1} + m_{B2})\dot{\sigma} + m_{B1}m_{B2}\sigma = E(\ddot{\epsilon} + \mu_K\dot{\epsilon})$	$E \frac{P(P + \mu_K)}{(P + m_{B1})(P + m_{B2})}$

Betegnelse	Krybefunktion	Relaxationsfunktion.
HOOKE	$\frac{1}{E}$	E
NEWTON	$\frac{1}{\eta} t$	$\eta\delta(t)$ ($\delta(t)$ = Diracs Deltafunktion)
MAXWELL	$\frac{1}{E} + \frac{1}{\eta} t$	$E e^{-\mu t}$
KELVIN	$\frac{1}{E_K} (1 - e^{-\mu_K t})$	$\eta_K(\delta(t) + \mu_K)$
THOMSON	$\frac{1}{E} + \frac{1}{E_K} (1 - e^{-\mu_K t})$	$\frac{EE_K}{E + E_K} \left(1 + \frac{E}{E_K} e^{-m_T t}\right)$
LEATHERSICH	$\frac{1}{\eta} t + \frac{1}{E_K} (1 - e^{-\mu_K t})$	$\frac{m_L\eta}{\mu_K} (\delta(t) + \frac{m_L\eta}{\eta_K} e^{-m_L t})$
BURGER	$\frac{1}{E} + \frac{1}{\eta} t + \frac{1}{E_K} (1 - e^{-\mu_K t})$	$\frac{E}{m_{B1} - m_{B2}} \left\{ (m_{B1} - \mu_K) e^{-m_{B1} t} - (m_{B2} - \mu_K) e^{-m_{B2} t} \right\}$

$$\mu = \frac{E}{\eta}; \mu_K = \frac{E_K}{\eta_K}; m_T = \mu_K \left(1 + \frac{E}{E_K}\right); m_L = \mu_K / \left(1 + \frac{\eta}{\eta_K}\right); m_{B1} = \frac{\mu_K}{2} \left(1 + \frac{E}{E_K} + \frac{\mu}{\mu_K} \pm \sqrt{\left(1 + \frac{E}{E_K} + \frac{\mu}{\mu_K}\right)^2 - 4 \frac{\mu}{\mu_K}}\right)$$

Tabel C.1. Eksempler på fysiske betingelser.
 Prikker står for differentiation med hensyn til tiden.
 (Efter Nielsen [8]).

$$\mathcal{D} = \frac{d}{dt} \quad (C.19)$$

En fysisk betingelse på differentiallyigningsform kan da skrives

$$P(\mathcal{D}) \sigma(t) = Q(\mathcal{D}) \varepsilon(t) \quad (C.20)$$

En fysisk betingelse på differentiallyigningsform kan naturligvis altid omskrives til en fysisk betingelse på relaxationsform eller krybningsform, altså

$$\sigma(t) = \mathcal{R} \varepsilon(t) , \varepsilon(t) = \mathcal{K} \sigma(t) \quad (C.21)$$

Kernerne $R(t)$ og $K(t)$ bestemmes af differentiallyigningerne

$$P(\mathcal{D}) R(t) = Q(\mathcal{D}) \Delta(t) \quad (C.22)$$

$$P(\mathcal{D}) \Delta(t) = Q(\mathcal{D}) K(t) \quad (C.23)$$

hvor $\Delta(\cdot)$ er Heavisides enhedsfunktion.

I tabel C.1 er der angivet nogle eksempler på simple fysiske betingelser.

C.3. Analogværdi og komplekst modul.

Lad os igen tage udgangspunkt i de fysiske betingelser (C.1) og (C.2). Analogværdien eller det analoge modul R^a er en kompleks funktion $R^a = R^a(p)$, defineret ved

$$\begin{aligned} R^a(p) &= \frac{\sigma^*(p)}{\varepsilon^*(p)} \\ &= p R^*(p) = (pK^*(p))^{-1} \end{aligned} \quad (C.24)$$

Hvis der er tale om en simpel fysisk betingelse fås der ved laplacetransformation af (C.20) at

$$R^a(p) = \frac{Q(p)}{P(p)} \quad (C.25)$$

I dette tilfælde er analogværdien altså en brudten rational funktion i den komplekse variabel p .

Det komplekse modul R^C er en kompleks funktion $R^C = R^C(\omega)$ af den reelle variabel ω defineret ved

$$R^C(\omega) = R^a(i\omega) \quad (C.26)$$

hvor i er den imaginære enhed. Benyttes (C.24) fås

$$R^C(\omega) = i\omega \int_{0-}^{\infty} R(t) e^{-i\omega t} dt \quad (C.27)$$

Det komplekse modul har en nær tilknytning til følgende fysiske situation. Lad os påsætte en harmonisk varierende tøjning startende til tiden $t = 0$, altså

$$\varepsilon(t) = \varepsilon_0 e^{i\omega t} \Delta(t) \quad (C.28)$$

Dette giver spændingshistorien

$$\begin{aligned} \sigma(t) &= \mathcal{R} \varepsilon_0 e^{i\omega t} \Delta(t) \\ &= \varepsilon_0 R(t) + \varepsilon_0 i\omega \int_{0-}^t R(t-\tau) e^{i\omega\tau} d\tau \end{aligned} \quad (C.29)$$

Defineres nu $R_\infty = \lim_{t \rightarrow \infty} R(t)$ således at

$$R(t) = R_\infty \Delta(t) + R_0(t) \quad (C.30)$$

så fås for alle $t > 0$

$$\sigma(t) = \varepsilon_0 R(t) + \varepsilon_0 R_\infty (e^{i\omega t} - 1) + \varepsilon_0 i\omega \int_{0-}^t R_0(t-\tau) e^{i\omega\tau} d\tau$$

Ved substitutionen $p = t-\tau$ og for $t \rightarrow \infty$ fås

$$\sigma(t) = \left(R_\infty + i\omega \int_{0-}^t R_0(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau \right) \varepsilon_0 e^{i\omega t}$$

Men udnyttes nu (C.30) samt at

$$i\omega \int_{0-}^t \Delta(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau = 1 \quad (C.31)$$

fås sammen med (C.27) det endelige resultat

$$\begin{aligned} \sigma(t) &= i\omega \int_{0-}^t R(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau \epsilon_0 e^{i\omega t} \\ &= R^C(\omega) \epsilon_0 e^{i\omega t} \end{aligned} \quad (C.32)$$

Det komplekse moduls simple fysiske betydning ved en harmonisk påvirkning kan udnyttes til eksperimentel bestemmelse af materialiegenskaberne.

Lad realdelen og imaginærdelen af $R^C(\omega)$ være henholdsvis $R_1^C(\omega)$ og $R_2^C(\omega)$ og modulus og argument af $R^C(\omega)$ være henholdsvis $|R^C(\omega)|$ og $\varphi(\omega)$ således at

$$\begin{aligned} R^C(\omega) &= R_1^C(\omega) + i R_2^C(\omega) \\ &= |R^C(\omega)| e^{i\varphi(\omega)} \end{aligned} \quad (C.33)$$

ligning (C.32) kan herved skrives

$$\sigma(t) = |R^C(\omega)| e^{i(\omega t + \varphi(\omega))} \quad (C.34)$$

Men heraf ses jo, at hvis man eksperimentelt har bestemt de to sammenhørende harmonisk varierende spændings- og tøjningsstørrelser ved f.eks.

$$\begin{aligned} \epsilon(t) &= \epsilon_0 \sin \omega t \\ \sigma(t) &= \sigma_0 \sin(\omega t + \varphi) \end{aligned} \quad (C.35)$$

og har bestemt amplitudernes og fasedrejningens variation med ω ,

$\epsilon_0 = \epsilon_0(\omega)$, $\sigma_0 = \sigma_0(\omega)$ og $\varphi = \varphi(\omega)$, så kan funktionerne $R_1^C(\omega)$ og $R_2^C(\omega)$ altså bestemmes af ligningerne

$$R_1^C(\omega)^2 + R_2^C(\omega)^2 = \frac{\sigma_0(\omega)}{\varepsilon_0(\omega)} \quad (C.36)$$

$$R_2^C(\omega) - R_1^C(\omega) \tan\varphi(\omega) = 0$$

Af (C.27) fås

$$R_1^C(\omega) = \omega \int_{0^-}^{\infty} R(t) \sin\omega t \, dt$$

$$R_2^C(\omega) = \omega \int_{0^-}^{\infty} R(t) \cos\omega t \, dt \quad (C.37)$$

Funktionerne $\frac{R_1^C(\omega)}{\omega}$ og $\frac{R_2^C(\omega)}{\omega}$ er henholdsvis Fouriers sinustransformerede og cosinustransformerede af funktionen $R(t)$. Det vil sige, at relaxationsfunktionen $R(t)$ findes af

$$R(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{R_1^C(\omega)}{\omega} \sin\omega t \, d\omega$$

eller

$$R(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{R_2^C(\omega)}{\omega} \cos\omega t \, d\omega \quad (C.38)$$

C.4. Matrixrepræsentation af fysisk betingelse.

Man kan ofte i praksis komme ud for tilfælde hvor relaxationsfunktionen eller krybningsfunktionen ikke er givet på lukket form. I disse tilfælde kan den i det følgende omtalte matrixrepræsentation være nyttig.

Vi betragter en fysisk betingelse af formen (C.1) og (C.2) mellem de to til hinanden svarende tøjnings- og spændingsstørrelser $\varepsilon(t)$ og $\sigma(t)$.

Vi vil nu angive en tilnærmet metode til udregning af udtrykket

$$\sigma(t) = \mathcal{R} \varepsilon(t) \quad (C.39)$$

hvor \mathcal{R} er en Stieltjesfoldning med kernen $R(\cdot)$. Funktionen

$R(\cdot)$ antages at være givet på ikke lukket form.

Lad trappefunktionen

$$\varepsilon_a(t) = \sum_{n=1}^N \Delta\varepsilon_n \Delta(t-t_n) \quad (C.40)$$

hvor $\{t_1, t_2, \dots, t_N\}$ betegner et fast sæt tidspunkter, være en approximation til tøjningshistorien $\varepsilon(t)$. Indsættes $\varepsilon_a(t)$ i (C.39) i stedet for $\varepsilon(t)$ fås da en approximation $\sigma'_a(t)$ for spændingshistorien $\sigma(t)$. Det ses let at

$$\sigma'_a(t) = \sum_{n=1}^N R(t-t_n) \Delta\varepsilon_n \quad (C.41)$$

Lad $t_m \in \{t_1, t_2, \dots, t_N\}$, der gælder da

$$\sigma'_a(t_m) = \sum_{n=1}^N R(t_m-t_n) \Delta\varepsilon_n \quad (C.42)$$

Definerer vi nu elementerne

$$\sigma'_m = \sigma'_a(t_m) \quad (C.43)$$

og $R_{mn} = R(t_m-t_n)$

og opfatter vi $\Delta\varepsilon_n$ og σ'_m som elementer i vektorerne

$$\Delta\varepsilon = \begin{pmatrix} \Delta\varepsilon_1 \\ \Delta\varepsilon_2 \\ \vdots \\ \Delta\varepsilon_N \end{pmatrix}, \quad \sigma' = \begin{pmatrix} \sigma'_1 \\ \sigma'_2 \\ \vdots \\ \sigma'_N \end{pmatrix} \quad (C.44)$$

og R_{mn} som elementer i matricen

$$R = \begin{pmatrix} R(0) & & & & \\ R_{21} & R(0) & & & 0 \\ R_{31} & R_{32} & R(0) & & \\ \vdots & & & & \\ R_{N1} & R_{N2} & \dots & R(0) & \end{pmatrix} \quad (C.45)$$

så kan (C.42) skrives

$$\underline{g}' = \underline{R} \underline{\Delta} \underline{\xi} \quad (\text{C.46})$$

Ligningen (C.46) udgør en matrixtilnærmelse eller matrixrepræsentation for ligning (C.39).

For et fast sæt tidspunkter $\{t_1, t_2, \dots, t_N\}$ kan sættet $\Delta \varepsilon_1, \Delta \varepsilon_2, \dots, \Delta \varepsilon_N$ vælges på mange måder, således at (C.40) er en approximation til tøjningshistorien $\varepsilon(t)$. Speciel interesse har venstreapproximationen $\varepsilon_a^-(t)$ defineret ved at det for alle $t_n \in \{t_1, t_2, \dots, t_N\}$ gælder at

$$\lim_{t \rightarrow t_n^-} \varepsilon_a^-(t) = \varepsilon(t_n) \quad , \quad t < t_n \quad (\text{C.47})$$

og højreapproximationen $\varepsilon_a^+(t)$ defineret ved at det for alle $t_n \in \{t_1, t_2, \dots, t_N\}$ gælder at

$$\lim_{t \rightarrow t_n^+} \varepsilon_a^+(t) = \varepsilon(t_n) \quad , \quad t > t_n \quad (\text{C.48})$$

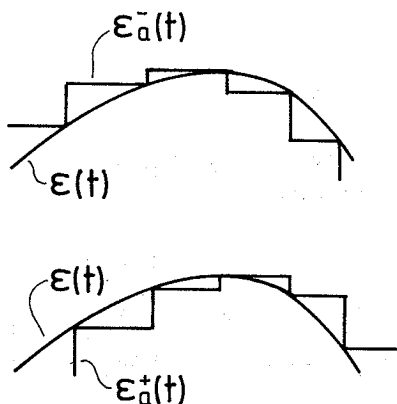
se figur C.2. For et fast sæt tidspunkter $\{t_1, t_2, \dots, t_N\}$ er venstreapproximationen og højreapproximationen entydigt bestemt af tøjningshistorien $\varepsilon(t)$. De til venstre- og højreapproximationerne $\varepsilon_a^-(t)$ og $\varepsilon_a^+(t)$ svarende spændingsapproximationer betegnes $\sigma_a^-(t)$ og $\sigma_a^+(t)$.

Det ses let, at hvis $\varepsilon(t)$ er kontinuert og stadigt aftagende for $t \in [t_n; t_{n+1}]$, så gælder der at

$$\sigma_a^-(t_{n+1}^-) - \sigma_a^-(t_n^-) < \sigma(t_{n+1}) - \sigma(t_n) < \sigma_a^+(t_{n+1}^+) - \sigma_a^+(t_n^+) \quad (\text{C.49})$$

og hvis $\varepsilon(t)$ er kontinuert og stadigt voksende for $t \in [t_n; t_{n+1}]$ gælder der

$$\sigma_a^+(t_{n+1}^+) - \sigma_a^+(t_n^+) < \sigma(t_{n+1}) - \sigma(t_n) < \sigma_a^-(t_{n+1}^-) - \sigma_a^-(t_n^-) \quad (\text{C.50})$$



Figur C.2. Venstre- og højreapproximation.

hvor størrelserne, f.eks. $\sigma_a^+(t_n^-)$ og $\sigma_a^+(t_n^+)$ betegner grænseværdien af $\sigma_a^+(t_n)$ fra venstre henholdsvis fra højre.

Udtrykkene (C.49) og (C.50) kan benyttes til vurdering af hvor meget $\sigma_a^+(t)$ afviger fra $\sigma(t)$.

Den til (C.39) svarende omvendte relation

$$\varepsilon(t) = \mathcal{K} \sigma(t) \quad (C.51)$$

kan naturligvis også tilnærmes med en matrixrepræsentation

$$\underline{\varepsilon}' = \underline{K} \underline{\Delta} \sigma \quad (C.52)$$

Det skal bemærkes, at \underline{K} ikke er den inverse matrix til \underline{R} .

En matrixformulering kan bl.a. bekvemt benyttes til bestemmelse af en krybningsfunktion $K(t)$ ud fra den tilsvarende relaxationsfunktion $R(t)$ når denne ikke er givet på lukket form.

Idet der tages udgangspunkt i matrixtilnærmelsen til (C.3) med venstre - henholdsvis højretilnærmelser af $K(t)$, kan det relativt let indses, at dette kan gøres på følgende måde.

Vælg et fast sæt tidspunkter $\{t_1, t_2, \dots, t_N\}$ hvor $t_1 = 0$ og be-

regn elementerne

$$R_{mm} = R(t_m - t_n) \quad (C.53)$$

Bestemt da løsningerne $\Delta K_1^+, \Delta K_2^+, \dots, \Delta K_N^+$ og $\Delta K_1^-, \Delta K_2^-, \dots, \Delta K_{N-1}^-$ til ligningssystemerne

$$\begin{pmatrix} R(0) & & & \\ R_{21} & R(0) & & 0 \\ R_{31} & R_{32} & R(0) & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ R_{N1} & R_{N2} & \dots & R(0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta K_1^+ \\ \Delta K_2^+ \\ \Delta K_3^+ \\ \vdots \\ \Delta K_N^+ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \quad (C.54)$$

$$\begin{pmatrix} R_{21} & & & & \\ R_{31} & R_{32} & & & 0 \\ R_{41} & R_{42} & R_{43} & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ R_{N1} & R_{N2} & \dots & R_{N,N-1} & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta K_1^- \\ \Delta K_2^- \\ \Delta K_3^- \\ \vdots \\ \Delta K_{N-1}^- \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \quad (C.55)$$

Der gælder da

$$K(0) = \Delta K_1^+ \quad (C.56)$$

$$\sum_{n=1}^{m-1} \Delta K_n^- < K(t_m) < \sum_{n=1}^m \Delta K_n^+, \quad m = 2, 3, \dots, N$$

Metoden er bekvem fordi ligningerne (C.54) og (C.55) er meget nemme at løse, da de indgående matricer er trekantmatricer, og fordi (C.56) direkte angiver en øvre og nedre grænse for $K(t)$.

Hvis man omvendt ønsker at bestemme en relaxationsfunktion $R(t)$ ud fra den tilsvarende krybningsfunktion $K(t)$, kan dette tilsvarende gøres på følgende måde.

Vælg et fast sæt tidspunkter $\{t_1, t_2, \dots, t_N\}$ hvor $t_1 = 0$, og beregn elementerne

$$K_{mm} = K(t_m - t_n) \quad (C.57)$$

Bestem så løsningerne $\Delta R_1^+, \Delta R_2^+, \dots, \Delta R_N^+$ og $\Delta R_1^-, \Delta R_2^-, \dots, \Delta R_{N-1}^-$ til ligningssystemerne

$$\begin{pmatrix} K(0) & & & \\ K_{21} & K(0) & & 0 \\ K_{31} & K_{32} & K(0) & \\ \vdots & & & \\ K_{N1} & K_{N2} & \dots & K(0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta R_1^+ \\ \Delta R_2^+ \\ \Delta R_3^+ \\ \vdots \\ \Delta R_N^+ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \quad (C.58)$$

$$\begin{pmatrix} K_{21} & & & \\ K_{31} & K_{32} & & \\ K_{41} & K_{42} & K_{43} & \\ \vdots & & & \\ K_{N1} & K_{N2} & \dots & K_{N,N-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta R_1^- \\ \Delta R_2^- \\ \Delta R_3^- \\ \vdots \\ \Delta R_{N-1}^- \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \quad (C.59)$$

Der gælder da

$$R(0) = \Delta R_1^+ \quad (C.60)$$

$$\sum_{n=1}^m \Delta R_n^+ < R(t_m) < \sum_{n=1}^{m-1} \Delta R_n^-$$

APPENDIX D

Deltafunktion og enhedsfunktion.

Diracs deltafunktion $\delta(\cdot)$ er defineret ved

$$\begin{aligned} \delta(t-\tau) &= 0 \text{ for } t \neq \tau \\ \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-\tau) dt &= 1 \end{aligned} \tag{D.1}$$

Heavisides enhedsfunktion $\Delta(\cdot)$ er defineret ved

$$\Delta(t-\tau) = \int_{-\infty}^t \delta(x-\tau) dx \tag{D.2}$$

Der skal nævnes et par vigtige egenskaber ved $\delta(\cdot)$ og $\Delta(\cdot)$.

Lad funktionen $f(t)$ være kontinuert i t i en omegn af $t = \tau$.

Der gælder da

$$\int_{-\infty}^t f(\theta) \delta(\theta-\tau) d\theta = \Delta(t-\tau) f(\tau) \tag{D.3}$$

$$\int_{-\infty}^t f(\theta) \Delta(\theta-\tau) d\theta = \Delta(t-\tau) \int_{\tau}^t f(\theta) d\theta \tag{D.4}$$

APPENDIX E

Laplacetransformation.

Der skal her nævnes nogle få egenskaber ved laplacetransformationen. I øvrigt henvises der til de mange standardværker om emnet.

E.1. Definition - transformation og inversion.

Laplacetransformationen \mathcal{L} af en funktion $f(t)$ defineres ved $t \rightarrow p$

$$\mathcal{L} f(t) = f^*(p) = \int_{0-}^{\infty} f(t) e^{-pt} dt \quad (\text{E.1})$$

hvor p er en kompleks variabel. Den transformerede funktion $f^*(p)$ kaldes den til objektfunktionen $f(t)$ svarende billedfunktion. Den laplacetransformerede eksisterer altid hvis blot $f(t)$ er stykkevis kontinuert i intervallet $[0; \infty[$ og hvis der eksisterer en konstant α således at

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e^{-\alpha t} f(t) = 0 \quad (\text{E.2})$$

Den inverse transformation \mathcal{L}^{-1} af den laplacetransformerede $f^*(p)$ er defineret ved

$$\mathcal{L}^{-1} f^*(p) = f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty} f^*(p) e^{pt} dp \quad (\text{E.3})$$

hvor i er den imaginære enhed, og konstanten α skal vælges til højre for alle funktionen $f^*(p)$'s singulariteter.

E.2. Sætninger.

Lad funktionen $\varphi(t)$ være tilladelig, d.v.s. $\varphi(t) = 0$ for alle $t < 0$. Den laplacetransformerede af den n 'te afledede af $\varphi(t)$ er da

$$\mathcal{L}_{t \rightarrow p} \frac{d^n \varphi(t)}{dt^n} = p^n \varphi^*(p) \quad (\text{E.4})$$

Den laplacetransformerede af foldningen af to funktioner $f(\cdot)$ og $g(\cdot)$ er

$$\mathcal{L}_{t \rightarrow p} \int_0^t f(\tau) g(t-\tau) d\tau = f^*(p) g^*(p) \quad (\text{E.5})$$

Sætningerne (E.4) og (E.5) betegnes henholdsvis differentiationsreglen og foldningsreglen.

Grænseværdisætningerne skal også nævnes. Lad grænseværdien $f(0+) = \lim_{t \rightarrow 0} f(t)$, $t > 0$ eksistere, der gælder da

$$f(0+) = \lim_{p \rightarrow \infty} p f^*(p) \quad (\text{E.6})$$

Lad endvidere grænseværdien $f(\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} f(t)$ eksistere, der gælder da

$$f(\infty) = \lim_{p \rightarrow 0} p f^*(p) \quad (\text{E.7})$$

Til slut nogle resultater som knytter sig til deltafunktionen og enhedsfunktionen, se appendix D. Det ses let at

$$\mathcal{L}_{t \rightarrow p} \delta(t-\tau) = e^{-p\tau} \quad (\text{E.8})$$

$$\text{og } \mathcal{L}_{t \rightarrow p} \Delta(t-\tau) = \frac{1}{p} e^{-p\tau} \quad (\text{E.9})$$

Af foldningsreglen og (E.8), samt resultatet (D.3) i appendix D udbedes da let forskydningssætningen

$$\mathcal{L}_{t \rightarrow p} f(t-\tau) \Delta(t-\tau) = e^{-p\tau} f^*(p) \quad (\text{E.10})$$

Resumé.

Rapporten indeholder en gennemgang af de grundlæggende begreber, som danner basis for en revnemekanik for lineært viscoelastiske materialer.

En revnemekanik for lineært viscoelastiske materialer opstår naturligt ved en sammenkædning af to veletablerede områder indenfor faststofmekanikken, nemlig revnemekanik for lineært elastiske materialer, og den lineære viscoelasticitetsteori.

Det vigtige bindeled mellem disse to veletablerede teorier udgøres af det såkaldte korrespondensprincip, som beskriver hvorledes løsninger til elastiske problemer kan udnyttes til løsning af tilsvarende lineært viscoelastiske problemer.

På grundlag heraf bestemmes tøjnings- og spændingstilstanden omkring en revnespids i det generelle tilfælde i et lineært viscoelastisk materiale. Det vises, at tilstanden omkring revnespiden ikke som i det elastiske tilfælde kan beskrives fuldstændigt ved de to spændingsintensitetsfaktorer alene. Der defineres derfor 4 deformationsfaktorer, som sammen med spændingsintensitetsfaktorerne giver en fuldstændig beskrivelse af revnespidstilstanden.

Der udledes løsninger for de 6 revnespidsparametre i det generelle tilfælde, både for en stillestående og for en langsomt løbende revne.

Summary.

The report includes a going through of the basic concepts of a theory of crack mechanics for linear viscoelastic materials.

A theory of crack mechanics for linear viscoelastic materials is established in a natural way by linking together two great well established areas of solid state mechanics, namely the theory of linear elastic crack mechanics, and the theory of linear viscoelasticity.

The important link between these two theories is formed by the so called correspondense principle, a theorem describing how linear viscoelastic boundary value problems can by solved by means of elastic solutions to a corresponding problem.

On this basis, the fields of stress and strain around a crack tip in a linear viscoelastic material is determined in the general case of body shape and loading conditions. It is shown that the two stress intensity factors, which gives a complete description of the crack tip fields in the linear elastic case, fails to give a complete description of the crack tip fields in the case of a linear viscoelastic material. It turns out to be necessary to define also 4 parameters of deformation to get a complete description.

Soloution for the 6 crack tip parameters is given in the general case, both for a stationary and a slowly propagating crack.

REFERENCER.

Bøger.

- [1] R.M. Christensen, Theory of viscoelasticity, an introduction. Academic Press, 1971.
- [2] Wilhelm Flügge, Viscoelasticity. Blaisdell Publishing Company, 1967.
- [3] Svend Gravesen og Steen Krenk, 2-dimensionelle elasticitetsteoretiske problemer. Afdelingen for Bærende Konstruktioner, DtH, 1977.
- [4] John W. Hutchinson, Nonlinear Fracture Mechanics. Department of Solid Mechanics, DtH, 1979.
- [5] L.D. Landau and E.M. Lifshitz, Theory of Elasticity. Vol. 7 of Course of Theoretical Physics. Pergamon Press, 1970.
- [6] Harold Liebowitz, Fracture, Vol. II, Mathematical Fundamentals. Academic Press, 1968.
- [7] N.I. Muskhelishvili, Some Basic Problems of the Mathematical Theory of Elasticity. Noordhoff Ltd., 1953.
- [8] L.F. Nielsen, Kortfattet rheologi. Rapport 48, Laboratoriet for Bygningsmaterialer, DtH, 1976.
- [9] G.C. Sih, Handbook of stress-intensity-factors. Lehigh University, 1973.
- [10] G.C. Sih, Methods of analysis and solutions of crack problems. Noordhoff Leyden, 1973.

- [11] I.S. Sokolnikoff, *Mathematical theory of Elasticity*. McGraw-Hill Book Company, 1956.
- [12] Eli Sternberg, *On the analysis of Thermal Stress in Viscoelastic Solids, I High Temperature Structures and Materials*, ed. Freudenthal, A.M, m.Fl.; Pergamon Press 1964.
- [13] H. Tada, P.C. Paris & G.R. Irwin, *The stress Analysis of Cracks Handbook*. Del. Research Corporation, St. Louis, Missouri, 1973.
- [14] C. Truesdell, *A First Course in Rational Continuum Mechanics, Vol. I General Concepts*. Academic Press, 1977.
- [15] C.-C. Wang & C. Truesdell, *Introduction to Rational Elasticity*. Noordhoff, Leyden, 1973.

Artikler.

- [16] C. Atkinson and F.G. Leppington, *the effect of Couple Stresses on the tip of a Crack*. *Int. Journ. Solids Structures*, 1977, Vol. 13, p. 1103-1122.
- [17] F. Erdogan and G.C. Sih, *On the crack extension in plates under plane loading and transverse shear*. *Journ. Basic Engrg.*, Vol. 85, 1963, p. 519-527.
- [18] J.D. Eshelby, *A simple deviation of the elastic field of an edge dislocation*. *Brit. Journ. Appl. Phys.*, 1966, Vol. 17., p. 1131-1135.
- [19] R.V. Gol'dstein and R.L. Salganik, *Brittle Fracture of Solids with arbitrary Cracks*. *Int. Journ. Fracture*, Vol. 10, No. 4, Dec. 1974, p. 507-523.

- [20] R.V. Gol'dstein and R.L. Salganik, Planar Problem of Curvilinear Cracks in an Elastic Solid. *Izv. AN SSSR. Mekkanika, Tverdogo Tela*, Vol. 5, No. 3, p. 69-82, 1970.
- [21] G.A.C. Graham, the Correspondence Principle of Linear Viscoelasticity Theory for Mixed Boundary value Problems Involving Time-dependent Boundary Regions. *Quart. Appl. Math.* Vol. 26, No. 2, 1968-69: p. 167-174.
- [22] A.A. Griffith, the Phenomena of Rupture and Flow in Solids. *Phil. Trans. Soc. London, Ser. A221*, p. 163-198, 1921.
- [23] M.E. Gurtin & Eli Sternberg, On the Linear Theory of Viscoelasticity. *Arch. Ration. Mech. Anal.*, Vol. 11, p. 291-356, 1962.
- [24] G.R. Irwin, Analysis of Stresses and Strains Near the End of a Crack Traversing a Plate. *Journ. Appl. Mech.*, Vol. 24, 1957, p. 361-364.
- [25] G.R. Irwin, Relation of Stresses Near a Crack to the Crack Extension Force. *Proc. IXth Int. Congr. Appl. Mech.*, Bruxelles, Vol. VIII, p. 245-251, 1957.
- [26] Wolfgang G. Knauss, Stresses Near a Crack in a Rubber Sheet. *Experim. Mech.*, Vol. XXV, April 1968, p. 177-181.
- [27] J.K. Knowles and Eli Sternberg, An asymptotic finite-deformation analysis of the elastostatic field near the tip of a crack. *Journ. Elasticity*, Vol. 3, No. 2, Juni 1973, p. 67-107.

- [28] J.K. Knowles and Eli Sternberg, Finite-deformation analysis of the elastostatic field near the tip of a crack: Reconsideration and higher-order results. Journ. Elasticity, Vol. 4, No. 3, Sept. 1974, p. 201-233.
- [29] Steen Krenk, On the use of the interpolation polynomial for solution of singular integral equations. Quart. Appl. Math., Vol.32, Jan. 1975, pp. 479-484.
- [30] Steen Krenk, On the quadrature formulas for singular integral equations of the first and the second kind. Quart. Appl. Math., Vol.33, Okt. 1975, p. 225-232.
- [31] G.C. Sih, P.C. Paris and F. Erdogan, Crack-tip stress-intensity Factors for plane extension and plate bending problems. Journ. Appl. Mech., Vol. 29, 1962, p. 306-312.
- [32] G.C. Sih, Strain-energy-density factor applied to mixed mode crack problems. Int. Journ. Fracture, Vol. 10, No. 3, Sept. 1974, p. 305-321.
- [33] M.L. Williams, On the Stress Distribution at the Base of a stationary Crack. Journ. Appl. Mech., Vol. 24, 1957, p. 109-114.
- [34] Chien H. Wu, Elasticity problems of a slender Z-crack. Journ. Elasticity, Vol. 8, No. 2, April 1978, p. 183-205.
- [35] Chien H. Wu, Maximum-energy-release-rate criterion applied to a tension-compression specimen with crack. Journ. Elasticity, Vol. 8, No. 3, July 1978, p. 235-257.

- [36] Chien H. Wu, Fracture Under Combined loads by Maximum-Energy-Release-Rate Criterion. Journ. Appl. Mech. Vol. 45, Sept. 1978, p. 553-558.
- [37] E. Orowan, Fatigue and Fracture at Metals, (Ed. W.M. Murray), Wiley, New York, 1952, p. 139-167.
- [38] N. Olhoff, Introduktion til brudmekanik DSM, materialnyt nr. 2:79, Brudmekanik, 1979, s. 3-45.
- [39] E. Sternberg, On the analysis of thermal stresses in viscoelastic solids. In High temperature structures and Materials, ed. A.M. Freudenthal (Proc. 3. symp. Nav. Struct. Mech.). Pergamon Press, 1964, p. 348-382.

Stikordsregister

approximation 105
asymptotiske egenskaber 24, 59
billedfunktion 111
blandet randværdiproblem 21, 44
burgers vektor 88
deformationen 1
deformationsfaktor 59, 69, 72, 75, 78, 79
delvise kriterier 31
differentialoperator 99
differentiationsregel 47, 65, 112
dislokationspunkt 88
dissipationen 29
eksperimentel bestemmelse 103
elasticitetsteori 37
elasticitetsteoriens singulære løsninger 36
elastisk spændingsintensitetsfaktor 70
énakset påvirkning 77
énéntydig 57
energibalanceligningen 29
energiomsætningshastigheden 30
enhedsnormalvektor 9
enhedstangentvektor 8
faste stoffer 42
feltligninger 42
flydespænding 37
flydezonen 37
flytningsdiskontinuiteter 88
flytningsrandværdiproblem 21, 44
flytningsvektoren 1
foldningsreglen 47, 65, 112
foranderlige 45
foranderlige randområder 48
forskydningsreglen 112

forskydningssætningen 51
Fouriers sinustransformerede, cosinustransformerede 104
fysisk betingelse 96
fysisk betingelse på differentiaalligningsform 99
fysisk tolkelige spændinger 38

generaliseret brudflade 28
geometrika 39
Grahams bevis 48
Greens funktions 69, 71, 84, 85
Griffith's generaliserede udbredelseskriterium 31
Griffith's udbredelseskriterium 30
grænseværdisætningerne 68, 96, 112

harmonisk varierende tøjning 102
hastighed 13, 73, 79
Heavisidefaktor 68
Heavisides enhedsfunktion 101, 110
homogen 50, 54
Hookebetingelse 97
højreapproximation 106
højreomegn 8
håndbøger 27, 77

indre kontur 8
indre revnespids 10
infinitesimale tøjninger 37
infinitesimale tøjningstensor 1
integralligninger 85, 93
integralligningsformulering 22
integralligningsproblem 95
invers transformation 111

kantdislokation 88, 90
karakteristiske geometrika 37
kernen 41
klassisk bevis 47
konstant 77
kontinuum 38

kontur 7
korrespondensprincipper 45
korrespondensprincippet 22
(korresponderende) elastisk løsning 46
kritisk værdi 28, 30
kritiske størrelse 29
krybningsform 42, 96
krybningsfunktioner 42
kærv 10

Laplacetransformation 101
Laplacetransformerede 47, 65
ligevægtssystem 22, 83
ligningssystem 66, 108
lineær transformation 41
lineær viscoelastisk 41

makroskopiske brudkriterier 38
materielt punkt 46, 62
matrixrepresentation 106
matrixtilnærmelse 106
mode 1, mode 2 26
momentspændingsteori 37
monotont aftagende 49
monotont voksende 49

Newtonbetingelse 97

objektfunktion 111
overfladeenergi 29
overfladerevnespids 10

parallelkobling 97, 98
plan tøjningstilstand 16
plan spændingstilstand 17
princippet om lokal symmetri 31, 35
princippet om maximal energiomsætnings-hastighed 31
princippet om maximale spændinger 31, 35
princippet om minimal energitæthed 31

quasistatisk 3, 29

rand 7

regulær 94

relaxationsform 42, 96

relaxationsfunktion 42

relaxationstider 80

ren spændingsbetingelse 45

rent spændingsrandværdiproblem 22, 83

revne 11

revnemodeller 36

revnespids 10

revnespidsparametre 59, 60, 73

revneudbredelse 47

revneudbredelsesforløbet 78

revneudbredelsesmodel 73

revneudbredelsesproblem 22, 45

sammenkobling 97

seriekobling 98

Sih's S-kriterium 31, 33

simpel fysisk betingelse 98, 101

simpel revne 11

singulær integralligning 23, 87

specielle beviser 48

spids 10

sprøde materialer 30

spændingsbegrebet 38

spændingsintensitetsfaktor 26, 56, 62, 78

spændingsrandværdiproblem 20, 44

spændingstensoren 2

stabil 13

stationær 13, 62, 77

stationære problem 71

Stieltjes foldning 41, 42, 66, 69, 70, 74, 75

stiftlegemeflytning 90

store tøjninger 37

strimmel 75

sætning	21, 66	
thermodynamisk	29	
tilladelige	41	
tilladeligt	44	
tilstandsparametre	73	
totale kriterier	31	
udbredelsen er ustabil	13	
udbreder sig stabilt	13	
udbredelse	13	
udbredelsehastighed	73	
varmeenergi	29	
venstreapproximation	106	
venstreomegn	8, 53	
viscoelastiske spændingsintensitetsfaktor	57, 74	
Von Mises flydebetingelse	38, 39	
vædsker	42	
ydre kontur	8	

AFDELINGEN FOR BÆRENDE KONSTRUKTIONER

DANMARKS TEKNISKE HØJSKOLE

Department of Structural Engineering

Technical University of Denmark, DK-2800 Lyngby

Serie R

(Tidligere: Rapporter)

- R 104. ANDERSEN, ERIK YDING: Konstruktionsovervågning med akustisk emission. Prøvebelastning af landevejsbro. 1979.
- R 105. FREDSGAARD, SØREN SKYTTE: Ligevægtselementer i de finite elementers metode. Formulering og beregningsgang. 1979.
- R 106. AGERSKOV, HENNING: Tests on high-strength bolted T-stub connections. 1979.
- R 107. KIRK, JENS: Direkte beregning af imperfekte skalkonstruktioner. 1979.
- R 108. Resumeoversigt 1978. Summaries of papers 1978. 1979.
- R 109. BRØNDUM-NIELSEN, TROELS: Stress analysis of concrete sections under service load. 1979.
- R 110. BRÆSTRUP, M.W.: Effect of main steel strength on the shear capacity of reinforced concrete beams with stirrups. 1979.
- R 111. BRINCKER, RUNE: Murede vægges tværbæreevne. En undersøgelse af murværks fysiske egenskaber. 1979.
- R 112. GIMSING, NIELS J.: Analytisk undersøgelse af materialforbruget for plane kabelsystemer med ensformig fordelt belastning. 1979.
- R 113. MADSEN, HENRIK OVERGAARD: Load models and load combinations. 1979.
- R 114. RIBERHOLT, H. and P. HAUGE MADSEN: Strength distribution of timber structures. Measured variation of the cross sectional strength of structural lumber. 1979.
- R 115. PEDERSEN, MAX ELGAARD: En generel beregningsmetode for betontværsnit. 1980.
- R 116. PEDERSEN, MAX ELGAARD: Kipstabilitet af armerede betonbjælker. 1980. Uds.
- R 117. BRYDER, KAJ L.: Optimeringsmetoder for 2-dimensionale legemer af ideal-plastisk materiale. 1980.
- R 118. DUKOW, EWTIM N.: Optimale Projektierung von vorgespannten Brückenträgern. 1980.
- R 119. PEDERSEN, HENNING: Optimering af jernbetonplader. 1980.
- R 120. BACH, FINN, M.P. NIELSEN and M.W. BRÆSTRUP: Shear tests on reinforced concrete T-beams. Series V, U, X, B and S. 1980.
- R 121. Resumeoversigt 1979. Summaries of papers 1979. 1980.
- R 122. NIELSEN, J.Aa., F. JOHNSEN og N.J. GIMSING: Trykkede pladefelters bæreevne. 1980.
- R 123. KRAGERUP, JAN: Undersøgelse af stålnormens metoder til bestemmelse af bæreevnen af geometrisk imperfekte stålsøjler. 1980.
- R 124. HANSEN, SVEND OLE: Vindbelastede skorstene. 1. del. Matematiske modeller. 1980. Uds.
- R 125. HANSEN, SVEND OLE: Vindbelastede skorstene. 2. del. Stignæs skorstenen. 1980. Uds.
- R 126. GIMSING, NIELS J.: Four papers on cable supported bridges. 1980.

- R 127. SVENSSON, SVEN EILIF og JAN KRAGERUP: Interaktiv bæreevne af sammensatte søjler. 1980.
- R 128. GIMSING, NIELS J. og JØRGEN GIMSING: Analysis of erection procedures for bridges with combined cable systems. Cable net bridge concept. 1980.
- R 129. ROSTAM, STEEN og EIGIL STEEN PEDERSEN: Partially prestressed concrete bridges. Danish experience. 1980.
- R 130. BRØNDUM-NIELSEN, TROELS: Stress analysis of cracked arbitrary concrete section under service load. 1981.
- R 131. Reserveret.
- R 132. Reserveret.
- R 133. Reserveret.
- R 134. ABK's informationsdag 1981. 1981.
- R 135. Resumeoversigt 1980. Summaries of papers 1980. 1981.
- R 136. BACH, FINN og M.P. NIELSEN: Nedreværdiløsninger for jernbetonplader. 1981.
- R 137. RASMUSSEN, JENS, SØREN B. CHRISTENSEN, HANS EXNER og
1 M.P. NIELSEN: Plasticitetsteoretisk analyse af beregningsmetoder for jernbetonbjælkers forskydningsbæreevne. 1981.
- R 138. NIELSEN, LEIF OTTO og PETER NITTEGAARD-NIELSEN: Elementmetodeberegninger på mikrodatamat. 1981.
- R 139. MONDORF, P.E.: Concrete bridges. Literature index. 1981.
- R 140. NIELSEN, METTE THIEL: Lamb's problem. Internal harmonic point load in a half-space. 1981.
- R 141. JENSEN, JESPER FRØBERT: Plasticitetsteoretiske løsninger for skiver og bjælker af jernbeton. 1982.
- R 142. MØLLMANN, H.: Thin-walled elastic beams with finite displacements. 1981.
- R 143. KRAGERUP, JAN: Five notes on plate buckling. 1982.
- R 144. NIELSEN, LEIF OTTO: Konstitutiv modellering af friktionsdæmpning. 1982.
- R 145. NIELSEN, LEIF OTTO: Materiale med friktion til numeriske beregninger. 1982.
- R 146. Resuméoversigt 1981. Summary of papers 1981. 1982.

Hvis De ikke allerede modtager Afdelingens resumeoversigt ved udgivelsen, kan Afdelingen tilbyde at tilsende næste års resumeoversigt, når den udgives, dersom De udfylder og returnerer nedenstående kupon.

Returneres til
Afdelingen for Bærende Konstruktioner
Danmarks tekniske Højskole
Bygning 118
2800 Lyngby

Fremtidig tilsendelse af resumeoversigter udbedes af
(bedes udfyldt med blokbogstaver):

Stilling og navn:

Adresse:

Postnr. og -distrikt:

The Department has pleasure in offering to send you a next year's list of summaries, free of charge. If you do not already receive it upon publication, kindly complete and return the coupon below.

To be returned to:
Department of Structural Engineering
Technical University of Denmark
Building 118
DK-2800 Lyngby, Denmark.

The undersigned wishes to receive the Department's

List of Summaries:

(Please complete in block letters)

Title and name

Address.....

Postal No. and district.....

Country.....