Afdelingen for Bærende Konstruktioner
Department of Structural Engineering
Danmarks Tekniske Højskole · Technical University of Denmark

Plane Revneudbredelsesproblemer i Lineært Viscoelastiske Materialer

Revnemodeller og Udbredelseskriterier

Rune Brincker

Serie R No 132 1983

PLANE REVNEUDBREDELSESPROBLEMER
I LINEÆRT VISCOELASTISKE MATERIALER.

Revnemodeller og udbredelseskriterier.

Rune Brincker

Serie R No. 132 1983

Forord.

Nærværende rapport er nummer 2 i en serie af tre rapporter skrevet med det formål at formulere en velbegrundet teori for lineært viscoelastiske revneudbredelsesproblemer.

I rapporten behandles problemerne omkring indførelsen af revnemodeller og udbredelseskriterier, begge dele noget, som der er en vis tradition for at introducere uden særligt mange forklaringer. Grunden til dette er simpelthen, at gode forklaringer vanskelige at tilvejebringe, og at de fleste revnemodeller og udbredelseskriterier formentlig er kommet til verden som resultat af "fornemmelser" og fysisk intuition".

Sigtet med den fremstilling, som er givet i denne rapport, har været at bryde med denne tradition og argumenterne for de forskellige nødvendige valg på et så objektivt grundlag som muligt. Hvorvidt det er lykkedes vil jeg overlade til læseren at vurdere, men det skal ikke være nogen hemmelighed, at jeg har følt at stoffet er vanskeligt at behandle.

Nogen vil sikkert finde rapporten lidt snæver og indadvendt i sin fremstilling, og jeg må med beklagelse til en vis grad give dem ret. Grunden er nok den, at det i forvejen har været vanskeligt at formulere resultaterne så der blev opnået en passende kombination af overskuelighed, generalitet og præcision, og at hensynet til bredden herved er gledet lidt i baggrunden.

Kapitel 1 omhandler udelukkende det termodynamiske grundlag, den generelle termodynamik for deformerbare legemer, og termodynamikken for lineært viscoelastiske legemer. Fremstillingen bygger direkte på Truesdells termodynamik, med anvendelse af hans betegnelser, og bør læses sammen med en af hans fremstillinger, f.eks. som givet i [5] . Christensens viscoelasticitetsteori [9] og den tidligere rapport [23] er ligeledes hoved-referencer.

Hvis man kan acceptere hovedresultaterne fra kapitel 1, så er rapporten skrevet sådan, at man kan nøjes med at læse kapitel 2, idet selve behandlingen af problemerne omkring valg af revnemodel og udbredelseskriterium udelukkende er behandlet her.

Til sidst en tak til professor Bent Erik Pedersen for samarbejde, hjælp og inspiration, og til Bente Kjølhede Petersen, som har arbejdet med maskinskrivningen af rapporten.

april 1983. Rune Brincker.

INDHOLD

KAPITEL 1

Termodynamisk grundlag.

1.1 Grundlæggende ligninger og definitioner.

Vi betragter et legeme B med overfladen ∂B som til tiden t er defineret over området Ω_t med randen $\partial\Omega_t$. Stedvektoren til legemets materielle punkter X i referencekonfigurationer er $\underset{\sim}{x}_o$. I referencekonfigurationen er legemet defineret over området Ω_o med randen $\partial\Omega_o$.

Lad legemet B have bevægelsen $\underset{\sim}{x}$ og temperaturen θ

$$\begin{aligned} \underset{\sim}{x} &= \underset{\sim}{x}(X,t) \\ \theta &= \theta(\underset{\sim}{x},t) \end{aligned} \tag{1.1}$$

hvor θ er den absolutte temperatur, d.v.s. at der altid gælder $\theta \geq 0$.

De grundlæggende termodynamiske begreber er energi, arbejde og entropi. Lad legemets totale kinetiske energi være K, den totale statiske energi*) være E, De ydre kræfters effekt (arbejde pr. tid) være P, den tilførte varmeeffekt være Q, og en totale entropi være H.

Den kinetiske energi K og de ydre kræfters effekt P kan umiddelbart udtrykkes ved bevægelse $\underset{\sim}{x}(\underset{\sim}{x}_o,t)$ og de kræfter, som fremkalder den. Lad massetætheden være ρ, og overfladebelastningen og legemsbelastningen være henholdsvis $\underset{\sim}{\sigma}^o = \underset{\sim}{\sigma}^o(x,t)$ og $\underset{\sim}{b} = \underset{\sim}{b}(\underset{\sim}{x},t)$ således at de ydre kræfters resultant er

$$R = \int_{\partial\Omega_t} \underset{\sim}{\sigma}^o \, da + \int_{\Omega_t} \rho \underset{\sim}{b} \, dV \tag{1.2}$$

*) Normalt betegnes dette bidrag "den indre energi", men da vi her også vil medregne overfladeenergien i E betegnes den for at undgå forvirring "den statiske energi".

Der gælder da

$$K = \frac{1}{2} \int_{\Omega_t} \rho \ddot{x}^2 \, dV \tag{1.3}$$

$$P = \int_{\partial\Omega_t} \dot{\underset{\sim}{x}} \cdot \underset{\sim}{\sigma}^o \, dA + \int_{\Omega_t} \rho \dot{\underset{\sim}{x}} \cdot \underset{\sim}{b} \, dV \tag{1.4}$$

hvor $\dot{\underset{\sim}{x}} = \frac{d\underset{\sim}{x}(X,t)}{dt}$ og $x = |\underset{\sim}{x}|$. De tre totale størrelser E, H og Q antages at bestå af et overfladebidrag og et indre bidrag og skrives derfor som summen af et overfladeintegrale og et volumenintegrale

$$E = \int_{\partial\Omega_t} \varepsilon^o \, da + \int_{\Omega_t} \rho \, \varepsilon^i \, dV \tag{1.5}$$

$$H = \int_{\partial\Omega_t} \eta^o \, da + \int_{\Omega_t} \rho \, \eta^i \, dV \tag{1.6}$$

$$Q = \int_{\partial\Omega_t} q \, da + \int_{\Omega_t} \rho \, s \, dV \tag{1.7}$$

Størrelsen ε^o og η^o betegnes henholdsvis overfladeenergitætheden og overfladeentropitætheden og størrelserne ε^o og η^i henholdsvis den indre energitæthed og den indre entropitæthed. Størrelserne q og s betegnes henholdsvis ledningstilførselstætheden og strålingstilførselstætheden for varmeeffekten Q.

Termodynamikkens to grundlove er energibevarelsessætningen og entropiproduktionsuligheden, som for legemet B som helhed kan skrives henholdsvis

$$\dot{E} + \dot{K} = P + Q \tag{1.8}$$

$$\dot{H} \geqq \int_{\partial\Omega_t} \frac{q}{\theta}\, da + \int_{\Omega_t} \rho \frac{s}{\theta}\, dV \tag{1.9}$$

Den her givne formulering af entropiproduktionsligheden (1.9) betegnes også Clausius-Duhems ulighed eller dissipationsprincippet.

Lad os nu betragte et dellegeme ΔB med overfladen $\partial\Delta B$ af legemet B. Dellegemet ΔB er til tidspunktet t defineret over området $\Delta\Omega_t$ med randen $\partial\Delta\Omega_t$ og i referencekonfigurationen over $\Delta\Omega_o$ mod randen $\partial\Delta\Omega_o$.

Når vi siger, at vi vil betragte et dellegeme ΔB af legemet B, mener vi naturligvis ikke at dellegemet ΔB rent fysisk er adskilt fra resten af legemet B. I virkeligheden er der naturligvis fuldstændig sammenhæng mellem ΔB og resten af B, og grænsefladen mellem de to dellegemer eksisterer altså kun i fantasien. En sådan grænseflade vil vi derfor kalde for en virtuel overflade for legemet ΔB og den betegnes $\partial\Delta B^v$. Den del af overfladen for legemet ΔB som ikke er virtuel vil vi kalde for den fysiske overflade, og den betegnes $\partial\Delta B^f$. Overfladerne $\partial\Delta B^v$ og $\partial\Delta B^f$ svarer til tidspunktet t til randområderne $\partial\Delta\Omega_t^v$ henholdsvis $\partial\Delta\Omega_t^f$ for $\Delta\Omega_t$.

Den totale statiske energi og entropi for legemet B ændres ikke ved at disse opfattes som summen af bidragene fra to dellegemer af B, og overfladestørrelserne ε^o og η^o må derfor være identisk nul på en virtuel overflade. De til (1.5), (1.6) og (1.7) svarende udtryk for dellegemet ΔB bliver derfor

$$E = \int_{\partial\Delta\Omega_t^f} \varepsilon^o\, da + \int_{\Delta\Omega_t} \rho\varepsilon^i\, dV \tag{1.10}$$

$$H = \int_{\partial\Delta\Omega_t^f} \eta^o\, da + \int_{\Delta\Omega_t} \rho\eta^i\, dV \tag{1.11}$$

$$Q = \int_{\partial\Delta\Omega_t} q\, da + \int_{\Delta\Omega_t} \rho s\, dV \tag{1.12}$$

Energibevarelsessætningen og entropiproduktionsuligheden for legemet ΔB svarer fuldstændigt til (1.8) og (1.9).
Foruden tæthederne ε^o , ε^i og η^o , η^i viser det sig at være praktisk at definere tæthederne

$$\psi^o = \varepsilon^o - \theta\eta^o \tag{1.13}$$

$$\psi^i = \varepsilon^i - \theta\eta^i \tag{1.14}$$

Størrelserne ψ^o og ψ^i kaldes henholdsvis den fri overfladeenergitæthed og den fri indre energitæthed. Den totale fri energi Ψ for legemet ΔB er

$$\Psi = \int_{\partial\Delta\Omega_t^f} \psi^o \, da + \int_{\Delta\Omega_t} \rho\psi^i \, dV \tag{1.15}$$

Omtalen af de grundlæggende principper har indtil nu været centreret om det termodynamiske. Bevægelsen $\underset{\sim}{x} = \underset{\sim}{x}(\underset{\sim}{x}_o, t)$ skal imidlertid også opfylde den klassiske mekaniks bevægelsesligninger, nemlig impulssætningen og impulsmomentsætningen.

Impulssætningen og impulsmomentsætningen på lokal form gældende for et hvert indre punkt for det betragtede legeme kan skrives

$$\rho\ddot{\underset{\sim}{x}} = \mathrm{div}\underset{\sim}{T} + \rho\underset{\sim}{b} \tag{1.16}$$

henholdsvis

$$\underset{\sim}{T} = \underset{\sim}{T}^T \tag{1.17}$$

hvor $\underset{\sim}{T} = T(\underset{\sim}{x}, t)$ er Cauchy's spændingstensor, og hvor $\underset{\sim}{T}^T$ betegner den transponerede heraf.

1.2 Overfladeenergi og overfladeentropi.

Almindeligvis ses der i den kontinuummekaniske termodynamik bort fra overfladeenergi og overfladeentropi, således at de to overfladeintegraler i (1.5) og (1.6), samt (1.10) og (1.11) forsvinder.

Disse bidrag spiller normalt ingen større rolle, og i langt de fleste tilfælde er det en god tilnærmelse at se bort herfra. Men i visse tilfælde, f.eks. termodynamiske processer for meget små legemer, eller ved processer hvor der danner sig ny overflade, er man nødt til at medtage bidragene.

Vi vil medtage dem her, da vi vil benytte den formulerede termodynamik til undersøgelse af revneudbredelsesproblemer som er overfladeskabende processer.

Den totale overfladeenergi og overfladeentropi for legemet ΔB er henholdsvis

$$E^{o} = \int_{\partial\Delta\Omega_t^f} \varepsilon^{o} \, da \tag{1.18}$$

$$H^{o} = \int_{\partial\Delta\Omega_t^f} \eta^{o} \, da \tag{1.19}$$

Når den fysiske overflade kan tilskrives en energi og en entropi, må den i sig selv kunne betragtes som et termodynamisk system, som kan udveksle varme med omgivelserne, og på hvilket ydre kræfter kan udføre arbejde. Det eneste specielle der er ved en overflade i termodynamisk forstand er, at den har massen nul, og at den kinetiske energi derfor er nul.

Lad os nu betragte en vilkårlig virtuel overflade i legemet ΔB. Ved en sådan overflade gælder at

$$\underset{\sim}{T}\,\underset{\sim}{n} = \underset{\sim}{\sigma}^{o} \tag{1.20}$$

hvor $\underset{\sim}{n}$ er den udadrettede normal og $\underset{\sim}{\sigma}^{o}$ er belastningen på den betragtede virtuelle overflade. Eksistensen af spændingstensoren $\underset{\sim}{T}$ er en følge af Cauchy's fundamentalsætning *).

Lad nu q være ledningstilførselstætheden for den betragtede virtuelle overflade. Cauchy's fundamentalsætning siger da tilsvarende, at der eksisterer en vektor $\underset{\sim}{h}$ således at **)

$$\underset{\sim}{h} \cdot \underset{\sim}{n} = q \tag{1.21}$$

Vektoren $\underset{\sim}{h}$, som er defineret for et hvert punkt $\underset{\sim}{x} \in \Delta\Omega_t$ kaldes varmeledningsvektoren.

Hvis den betragtede overflade er en fysisk overflade stiller sagen sig lidt anderledes. Lad den resulterende belastningstæthed på den fysiske overflade betragtet som selvstændigt legeme være $\underset{\sim}{p}^{o}$, og lad den resulterende tilførselstæthed for varmeeffekt være q^{o}. De til (1.20) og (1.21) svarende udtryk for en fysisk overflade er da

$$\underset{\sim}{T}\,\underset{\sim}{n} = \underset{\sim}{g}^{o} - \underset{\sim}{p}^{o} \tag{1.22}$$

$$\underset{\sim}{h} \cdot \underset{\sim}{n} = q - q^{o} \tag{1.23}$$

Langs kanten ***) af den betragtede fysiske overflade kan der optræde visse "snitkræfter". Vi vil antage, at der kun er tale om membranspændinger. Disse membranspændinger kaldes for legemets overfladespændinger, og de er medregnet i belastningen $\underset{\sim}{p}^{o}$. Belastningssystemet $\underset{\sim}{p}^{o}$ er derfor et ligevægtssystem.

*) se herom i f.eks. Wang & Truesdell [13].

**) Da q er en tilførselstæthed peger vektoren $\underset{\sim}{h}$ defineret ved (1.21) modsat varmestrømmen. Visse forfattere, f.eks. Christensen [9] definerer derfor varmeledningsvektoren med modsat fortegn.

***) Den betragtede fysiske overflade tænkes at være et udsnit af overfladen for legemet B.

Legemets ΔB's totale kinetiske energi, de ydre kræfters totale arbejde, den totale statiske energi, den totale entropi, samt den totale tilførte varmeeffekt er givet ved ligningerne (1,3, (1.4), (1.10), (1.11) og (1.12). Lad os nu lægge et snit umiddelbart under den fysiske overflade $\partial \Delta B^f$, og betragte det herved fremkomne legeme ΔB^i . Legemet ΔB^i er løst formuleret (legemet ΔB minus den fysiske overflade $\partial \Delta B^f$). De til legemet ΔB^i knyttede størrelser forsynes med et indeks "i" f.eks. E^i, K^i, o.s.v., og der gælder

$$K^i = K = \frac{1}{2} \int_{\Delta\Omega_t} \rho \, \ddot{x}^2 \, dV \tag{1.24}$$

$$P^i = \int_{\partial\Delta\Omega_t} \dot{\underset{\sim}{x}} \cdot \underset{\sim}{T} \, \underset{\sim}{n} \, da + \int_{\Delta\Omega_t} \rho \, \dot{\underset{\sim}{x}} \cdot \underset{\sim}{b} \, dV \tag{1.25}$$

$$E^i = \int_{\Delta\Omega_t} \rho \, \varepsilon^i \, dV \tag{1.26}$$

$$H^i = \int_{\Delta\Omega_t} \rho \, \eta^i \, dV \tag{1.27}$$

$$Q^i = \int_{\partial\Delta\Omega_t} \underset{\sim}{h} \cdot \underset{\sim}{n} \, da + \int_{\Delta\Omega_t} \rho s \, dV \tag{1.28}$$

Alle legemet ΔB^i's overflader er virtuelle hvorved belastningen $\underset{\sim}{g}^o$ og ledningstilførselstætheden q direkte kan udtrykkes ved spændingstensoren $\underset{\sim}{T}$ henholdsvis varmeledningsvektoren $\underset{\sim}{h}$, og hvorved overfladeenergi- og overfladeentropibidragene til den totale statiske energi henholdsvis den totale entropi forsvinder. Energien E^i for legemet ΔB betegnes den <u>indre energi</u> for legemet ΔB; dette er i overensstemmelse med hvad man normalt lægger i begrebet indre energi.

Lad os nu opfatte legemet ΔB's totale statiske energi, totale kinetiske energi, o.s.v. som summen af et overfladebidrag og et indre bidrag

$$\left.\begin{aligned} K &= K^i + K^o \\ P &= P^i + P^o \\ E &= E^i + E^o \\ H &= H^i + H^o \\ Q &= Q^i + Q^o \end{aligned}\right\} \tag{1.29}$$

For legemet ΔB gælder de termodynamiske ligninger

$$\dot{E} + \dot{K} = P + Q \tag{1.30}$$

$$H \geqq \int_{\partial\Delta\Omega_t} \frac{q}{\theta}\, dA + \int_{\Delta\Omega_t} \rho \frac{s}{\theta}\, dV \tag{1.31}$$

Tilsvarende gælder for legemet ΔB^i

$$\dot{E}^i + \dot{K}^i = P^i + Q^i \tag{1.32}$$

$$\dot{H}^i \geqq \int_{\partial\Delta\Omega_t} \frac{\underset{\sim}{h}\cdot\underset{\sim}{n}}{\theta}\, da + \int_{\Delta\Omega_t} \rho \frac{s}{\theta}\, dV \tag{1.33}$$

Indsættes nu udtrykkene (1.3), (1.4), (1.10), (1.11) og (1.12) og udtrykkene (1.24) til (1.28) i ligningssættene (1.30) og (1.31) henholdsvis (1.32) og (1.33), så fås relativt let, ved anvendelse af (1.22) og (1.23) at der for størrelserne K^o , P^o,..., Q^o, hvor

$$K^o = 0 \tag{1.34}$$

$$P^o = \int_{\partial\Delta\Omega_t^f} \dot{x} \cdot p^o \, da \tag{1.35}$$

$$E^o = \int_{\partial\Delta\Omega_t^f} \varepsilon^o \, da \tag{1.36}$$

$$H^o = \int_{\partial\Delta\Omega_t^f} \eta^o \, da \tag{1.37}$$

$$Q^o = \int_{\partial\Delta\Omega_t^f} q^o \, da \tag{1.38}$$

gælder at

$$\dot{E}^o = P^o + Q^o \tag{1.39}$$

$$\dot{H}^o \geqq \int_{\partial\Delta\Omega_t^f} \frac{q_o}{\theta} \, da \tag{1.40}$$

Ligningerne (1.39) og (1.40) er altså energibevarelsessætningen og entropiproduktionsuligheden for et udsnit af en <u>fysisk overflade.</u>

Vi vil ikke i det følgende interessere os videre for overfladetermodynamikken som sådan, men blot konstatere, at der ved en korrekt termodynamisk undersøgelse af processer for legemer skal medtages nogle overfladebidrag, og at disse overfladebidrag kan inkorporeres i den traditionelle termodynamik på konsistent måde. Således kan et legemes overflade og dets indre hver for sig betragtes som et termodynamisk system, for hvilket der kan formuleres både en energibevarelsessætning og en entropiproduktionsulighed.

Med hensyn til en nærmere redegørelse for overfladetermodynamikkens fysiske betydning henvises til Adamson [3], Benzon & Yun [6] og Shuttleworth [1] .

1.3 Termodynamiske feltligninger.

Energibevarelsessætningen og entropiproduktionsuligheden er indtil nu kun formuleret på global form, d.v.s. i ligninger som gælder for et legemes totale energi, entropi, o.s.v. Alle de totale størrelser E, H, o.s.v. beregnes som nogle integraler over det betragtede legeme, og de globale ligninger betegnes derfor også de termodynamiske integralbalanceligninger.

Til disse integralbalanceligninger svarer nogle differentialligninger, som skal være opfyldt for alle indre punkter for det betragtede legeme. Disse differentialligninger kaldes for de termodynamiske feltligninger eller energibevarelsessætningen og entropiproduktionsuligheden på lokal form. De termodynamiske feltligninger skal bestemmes i det følgende.

Vi betragter et dellegeme ΔB^i af legemet B hvis overflade $\partial \Delta B^i$ er rent virtuel. Et sådant dellegeme kaldes et indre dellegeme af B.

Energibevarelsessætningen på global form for ΔB^i er

$$\dot{K} + \dot{E}^i = P^i + Q^i \tag{1.41}$$

For bidragene E^i og Q^i gælder

$$E^i = \int_{\Delta\Omega_t} \rho\, \varepsilon^i \, dv \tag{1.42}$$

$$Q^i = \int_{\partial\Delta\Omega_t} \underset{\sim}{h} \cdot \underset{\sim}{n} \, da + \int_{\Delta\Omega_t} \rho\, s \, dv \tag{1.43}$$

Ved anvendelse af en identitet, samt divergenssætningen og impulssætningen kan det desuden vises, at bidraget $P^i - \dot{K}$ kan skrives som et volumenintegrale

$$P^i - \dot{K} = \int_{\Delta\Omega_t} w \, dv \tag{1.44}$$

hvor $$w = \mathrm{tr}(\underset{\sim}{T}\underset{\sim}{D}) \tag{1.45}$$

hvor $\underset{\sim}{D}$ som kaldes strækningstensoren er den symmetriske del af den rumlige hastighedsgradient $\dot{\underset{\sim}{x}}$. Udledelsen er foretaget i appendix A. Omskrives overfladeintegralet i (1.43) ved hjælp af divergenssætningen

$$\int_{\partial\Delta\Omega_t} \underset{\sim}{h} \cdot \underset{\sim}{n} \, da = \int_{\Delta\Omega_t} \mathrm{div}\underset{\sim}{h} \, dv$$

så fås ved indsættelse af (1.42), (1.43) og (1.44) i (1.141) at

$$\left(\int_{\Delta\Omega_t} \rho \, \varepsilon^i \, dv\right)^{\bullet} = \int_{\Delta\Omega_t} (w + \mathrm{div}\underset{\sim}{h} + \rho s) \, dv \tag{1.47}$$

Af ligning (A.2) i appendix A fås

$$\left(\int_{\Delta\Omega_t} \rho \, \varepsilon^i \, dv\right)^{\bullet} = \int_{\Delta\Omega_t} \rho \, \dot{\varepsilon}^i \, dv \tag{1.48}$$

hvorved

$$\int_{\Delta\Omega_t} \rho \, \dot{\varepsilon}^i \, dv = \int_{\Delta\Omega_t} (w + \mathrm{div}\underset{\sim}{h} + \rho s) \, dv \tag{1.49}$$

Denne ligning skal gælde for et hvert indre dellegeme ΔB^i af B, og er derfor ensbetydende med feltligningen

$$\rho \, \dot{\varepsilon}^i = w + \mathrm{div}\underset{\sim}{h} + \rho s \tag{1.50}$$

Denne ligning er <u>energibevarelsessætningen på lokal form.</u>

På tilsvarende måde udledes entropiproduktionsuligheden på lokal form. Entropiproduktionsuligheden for ΔB^i på global form er

$$\dot{H}^i \geqq \int_{\partial\Delta\Omega_t} \frac{\underset{\sim}{h}\cdot\underset{\sim}{n}}{\theta}\,da + \int_{\Delta\Omega_t} \rho\,\frac{s}{\theta}\,dv \tag{1.51}$$

Ved indsættelse af

$$H^i = \int_{\Delta\Omega_t} \rho\eta^i\,dv$$

og ved anvendelse af (A.2) og divergenssætningen fås umiddelbart

$$\int_{\Delta\Omega_t} \rho\dot{\eta}^i\,dv \geqq \int_{\Delta\Omega_t} \left(\mathrm{div}\left(\frac{\underset{\sim}{h}}{\theta}\right) + \rho\,\frac{s}{\theta}\right) dv \tag{1.52}$$

Da dette skal gælde for et hvert indre dellegeme ΔB^i af B er integralbalanceligningen (1.52) altså ensbetydende med feltligningen

$$\rho\theta\dot{\eta}^i \geqq \theta\,\mathrm{div}\left(\frac{\underset{\sim}{h}}{\theta}\right) + \rho s \tag{1.53}$$

Dette er <u>entropiproduktionsuligheden på lokal form.</u> Ved indsættelse af energibevarelsessætningen i denne kan strålingsleddet ρs elimineres. Udnyttes desuden at

$$\begin{aligned} \theta\mathrm{div}\left(\frac{\underset{\sim}{h}}{\theta}\right) &= \mathrm{div}\underset{\sim}{h} + \theta\underset{\sim}{h}\cdot\mathrm{grad}\left(\frac{1}{\theta}\right) \\ &= \mathrm{div}h - \frac{\underset{\sim}{h}\cdot\underset{\sim}{g}}{\theta} \end{aligned} \tag{1.54}$$

hvor $\quad \underset{\sim}{g} = \text{grad}\theta \qquad (1.55)$

er den rumlige gradient af temperaturfeltet, fås (1.53) på formen

$$\frac{\underset{\sim}{h}\cdot\underset{\sim}{g}}{\theta} \geqq \rho\left(\dot{\varepsilon}^{i} - \theta\dot{\eta}^{i}\right) - w \qquad (1.56)$$

eller ved anvendelse af (1.14)

$$\frac{\underset{\sim}{h}\cdot\underset{\sim}{g}}{\theta} \geqq \rho\,(\dot{\psi}^{i} + \eta^{i}\dot{\theta}) - w \qquad (1.57)$$

eller $\quad \dfrac{\underset{\sim}{h}\cdot\underset{\sim}{g}}{\theta} \geqq -\lambda^{i} \qquad (1.58)$

hvor $\quad \lambda^{i} = w - \rho(\dot{\psi}^{i} + \eta^{i}\dot{\theta}) \qquad (1.59)$

Størrelsen λ^{i} kaldes for den indre <u>dissipationshastighed</u> . Entropiproduktionsuligheden på formen (1.57) eller (1.58) kaldes for den <u>reducerede dissipationsulighed</u> , og bruges som regel på denne form.

1.4 Processer og konstitutive ligninger.

Som tidligere nævnt vil vi ikke gøre mere ud af overfladetermodynamikken, og i dette afsnit refereres derfor kun til de indre størrelser ψ^{i} , η^{i} .

Felterne

$$\underset{\sim}{x}\ ,\ \theta\ ,\ \underset{\sim}{T}\ ,\ \underset{\sim}{h}\ ,\ \psi^{i}\ ,\ \eta^{i} \qquad (1.60)$$

siges at danne en termodynamisk proces, hvis de tilfredsstiller impulssætningen, impulsmomentsætningen og energibevarelsessætningen for et hvert indre punkt $X \in B$. Ved passende valg af legemskræfter $\underset{\sim}{b}$ og strålingtilførselstætheden s, kan det første og det sidste princip altid tilfredsstilles, og den eneste restriktion følger af impulsmomentsætningen, nemlig at spændingstensoren $\underset{\sim}{T}$ skal være symmetrisk $\underset{\sim}{T} = \underset{\sim}{T}^T$.

En <u>konstitutiv ligning</u> er en regel hvorved deformations-temperaturhistorien $\underset{\sim}{x}^t$, θ^t entydigt bestemmer spændingerne, varmeledningen, tætheden for den fri energi og entropitætheden, altså

$$\left.\begin{array}{l} \underset{\sim}{T} \\ \underset{\sim}{h} \\ \underset{\sim}{\psi}^i \\ \underset{\sim}{\eta}^i \end{array}\right\} \text{ er funktionaler af } \left\{\begin{array}{l} \underset{\sim}{x}^t \\ \theta^t \end{array}\right. \tag{1.61}$$

hvor <u>historierne</u> x^t og θ^t er definerede ved $\underset{\sim}{x}^t(s) = \underset{\sim}{x}(t-s)$, $\theta^t(s) = \theta(t-s)$, $s \in [0;\infty[$, se appendix B afsnit 1.

Funktionalerne i denne konstitutive ligning skal ifølge Truesdell [5] opfylde tre krav

1) <u>Nærvirkningsprincippet</u>
2) <u>Objektivitetsprincippet</u>
3) <u>Dissipationsprincippet</u>

Det første princip, nærvirkningspruncippet siger, at størrelserne $\underset{\sim}{T}$, $\underset{\sim}{h}$, ψ^i og η^i i et givet punkt X ikke afhænger af hele legemets temperatur-deformationshistorie, men kun af temperatur-deformationshistorien for X og for omegnen af X.

Det andet princip, objektivitetsprincippet siger, at de resultater den konstitutive ligning giver skal være uafhængige af den benyttede referenceramme.

Medens de to første principper skal gælde for konstitutive ligninger i al almindelighed er det sidste princip, dissipationsprincippet knyttet til det termodynamiske. Princippet siger, at funktionalerne i den konstitutive ligning skal være sådan, at den reducerede dissipationsulighed (1.58) er opfyldt for enhver termodynamisk proces.

I afsnit 1.6 er de konstitutive ligninger for lineært viscoelastisk materiale udledt for tilfældet med infinitesimale tøjninger, idet der tages udgangspunkt i de her angivne principper for konstitutive ligninger.

1.5 Isoterm revneudbredelse.

Vi vil nu betragte et legeme B hvori der foregår revneudbredelse. Vi vil antage, at udbredelsen sker så passende langsomt, at legemet til et hvert tidspunkt er i termisk ligevægt med omgivelserne som har den konstante temperatur θ. Revneudbredelsen kan da betragtes som en isoterm proces.

Ved revneudbredelsen dannes der hele tiden ny fysisk overflade, og legemets indre og dets overflade kan derfor i dette tilfælde ikke hver for sig betragtes som termodynamiske systemer. En termodynamisk undersøgelse af en revneudbredelsesproces kan derfor kun baseres på de globale termodynamiske ligninger for legemet B eller et dellegeme af B inclusive den til B eller det betragtede dellegeme hørende fysiske overflade.

Lad os betragte et vilkårligt dellegeme ΔB af B. Energibevarelsessætningen og entropiproduktionsuligheden for dellegemet ΔB inklusive dets overflade $\partial \Delta B$ for isoterme forhold er

$$\dot{K} + \dot{E} = P + Q \tag{1.62}$$

$$\theta \dot{H} \geqq Q \tag{1.63}$$

Det sidste følger direkte af (1.7) og (1.9). Varmeeffekten Q kan her opfattes om den effekt, der må tilføres, for at processen er isoterm.

For den totale fri energi Ψ, og den totale dissipationshastighed Λ , se (1.59), gælder

$$\dot{\Psi} = \dot{E} - \theta\dot{H} \tag{1.64}$$

$$\Lambda = P - \dot{K} - \dot{\Psi} \tag{1.65}$$

da processen er isoterm. Udnyttes dette sammen med (1.62) og (1.63) fås da betingelserne

$$\left.\begin{array}{l} P - \dot{K} - \dot{\Psi} - \Lambda = 0 \\ P - \dot{K} - \dot{\psi} \geqq 0 \end{array}\right. \tag{1.66}$$

Betingelserne er energibevarelsessætningen og dissipationsulig-heden på <u>global form.</u> De gælder, som det fremgår af ovenstående, kun for isoterme processer. Vi vil komme tilbage til disse formuleringer af de termodynamiske love under omtalen af <u>revneud-bredelseskriterier</u> i næste kapitel.

<u>1.6 Konstitutive ligninger for lineært viscoelastisk materiale.</u>

Vi vil nu udlede de termodynamiske konstitutive ligninger for lineært viscoelastisk materiale, idet vi tager udgangspunkt i de principper for konstitutive ligninger, som er angivet i afsnit 1.4.

Udledelsen her følger nøje den som er givet af Christensen og Naghdi i [7] og af Christensen i [16]. Metoden går groft sagt ud på at gøre et godt gæt på formen af den konstitutive ligning for den fri energi, og herefter indsætte dette i den reducerede dissipationsulighed (1.57). Dette viser sig at give betingelser nok til bestemmelse af de konstitutive ligninger for både spændinger, entropi og fri energi.

Vi vil i det følgende antage infinitesimale tøjninger. Lad den infinitesimale tøjningstensor være $\underset{\sim}{E}$, og lad denne have de kartesiske komponenter ε_{ij} og lad den hertil svarende spændingstensor have de kartesiske komponenter σ_{ij}. Vi vil desuden antage, at temperaturen

θ kun afviger ganske lidt fra basistemperaturen θ_o , altså

$$\theta = \theta_o + \zeta$$

hvor (1.67)

$$\zeta/\theta_o << 1$$

Om både de infinitesimale tøjninger og de infinitesimale temperaturafvigelser vil vi antage, at de er identisk nul for alle tider $t < 0$,

$$\varepsilon_{ij}(\underset{\sim}{x},t) = \zeta(\underset{\sim}{x},t) = 0 \text{ , for } t < 0 \tag{1.68}$$

Den fri energi $\psi^i(t)$ er et funktional af både tøjningshistorien $\varepsilon_{ij}^t(s)$ og temperaturafvigelseshistorien $\zeta^t(s)$, $s \in [0;\infty[$. Dette funktional kan ikke antages at være lineært, men vi vil gætte på, at vi i en 1. ordens teori kan antage et udtryk af formen

$$\rho\psi^i(t) = \mathscr{A}^{\alpha}\{\varphi_\alpha(s)\} + \mathscr{B}^{\alpha\beta}\{\varphi_\alpha(s) \text{ , } \varphi_\beta(s)\} \tag{1.69}$$

hvor $\alpha,\beta = 1,2$ og $\varphi_1(s) = \underset{\sim}{E}^t(s)$, $\varphi_2(s) = \zeta^t(s)$. Funktionalerne $\mathscr{A}^{\alpha}\{\ \}$ er lineære, og funktionalerne $\mathscr{B}^{\alpha\beta}\{f(s), g(s)\}$ er lineære i hvert af argumenterne f og g. Af Riesz's representationssætning, se appendix B, fås da at dette er ensbetydende med at den konstitutive ligning for den fri energi har formen

$$\begin{aligned}
\rho\psi'(t) = & \int_{o-}^{t-} A_{ij}^{1}(t-\tau)\,\frac{d\varepsilon_{ij}(\tau)}{d\tau}\,d\tau + \int_{o-}^{t-} A^{2}(t-\tau)\,\frac{d\zeta(\tau)}{d\tau}\,d\tau + \\
& + \int_{o-}^{t-}\int_{o-}^{t-} B_{ijkl}^{11}(t-\tau,t-\eta)\,\frac{d\varepsilon_{ij}(\tau)}{d\tau}\,\frac{d\varepsilon_{kl}(\eta)}{d\eta}\,d\tau d\eta + \\
& + \int_{o-}^{t-}\int_{o-}^{t-} B_{ij}^{12}(t-\tau,t-\eta)\,\frac{d\varepsilon_{ij}(\tau)}{d\tau}\,\frac{d\zeta(\eta)}{d\eta}\,d\tau t\eta + \\
& + \int_{o-}^{t-}\int_{o-}^{t-} B^{22}(t-\tau,t-\eta)\,\frac{d\zeta(\tau)}{d\tau}\,\frac{d\zeta(\eta)}{d\tau}\,d\tau d\eta
\end{aligned} \tag{1.70}$$

Udnytter vi nu at ζ/θ_o og ε_{ij} er infinitesimale, fås dissipationsuligheden (1.57) på formen

$$- \rho\dot{\psi}^i - \rho\eta^i\dot{\zeta} + \sigma_{ij}\dot{\varepsilon}_{ij} + \frac{h_i\zeta_{,i}}{\theta_o} \geqq 0 \qquad (1.71)$$

Indsættes udtrykket (1.70) for den fri energi heri, så fås betingelsen

$$\left\{ - A^1_{ij}(0+) - 2\int_{0-}^{t-} B^{11}_{ijkl}(t-\tau,0+)\,\frac{d\varepsilon_{kl}(\tau)}{d\tau}\,d\tau \,+\right.$$

$$\left. - \int_{0-}^{t-} B^{12}_{ij}(0+,t-\tau)\,\frac{d\zeta(\tau)}{d\tau}\,d\tau + \sigma_{ij}\right\}\dot{\varepsilon}_{ij}(t) \,+$$

$$+ \left\{ - A^2(0+) - 2\int_{0-}^{t-} B^{22}(t-\tau,0+)\,\frac{d\zeta(\tau)}{d\tau} \,+\right.$$

$$\left. - \int_{0-}^{t-} B^{12}_{ij}(t-\tau,0+)\,\frac{d\varepsilon_{ij}(\tau)}{d\tau}\,d\tau - \rho\eta^i\right\}\dot{\zeta}(t) \,+$$

$$- \int_{0-}^{t-} \frac{\partial}{\partial t} A^1_{ij}(t-\tau)\,\frac{d\varepsilon_{ij}(t)}{dt}\,d\tau - \int_{0-}^{t-} \frac{\partial}{\partial t} A^2(t-\tau)\,\frac{d\zeta(\tau)}{d\tau}\,d\tau \,+$$

$$+ \lambda^i + \frac{h_i\zeta_{,i}}{\theta_o} \geqq 0 \qquad (1.72)$$

hvor

$$\lambda^i = -\int_{0-}^{t-}\int_{0-}^{t-} \frac{\partial}{\partial t} B^{11}_{ijk\ell}(t-\tau,t-\eta) \frac{d\varepsilon_{ij}(\tau)}{d\tau} \frac{d\varepsilon_{k\ell}(\eta)}{d\eta} d\tau d\eta +$$

$$-\int_{0-}^{t-}\int_{0-}^{t-} \frac{\partial}{\partial t} B^{12}_{ij}(t-\tau,t-\eta) \frac{d\varepsilon_{ij}(\tau)}{d\tau} \frac{d\zeta(\eta)}{d\eta} d\tau d\eta +$$

$$-\int_{0-}^{t-}\int_{0-}^{t-} \frac{\partial}{\partial t} B^{22}(t-\tau,t-\eta) \frac{d\zeta(\tau)}{d\tau} \frac{d\zeta(\tau)}{d\eta} d\tau d\eta \qquad (1.73)$$

Den reducerede dissipationsulighed (1.72) skal være opfyldt for en hver termodynamisk proces, d.v.s. for en hver værdi af $\dot{\varepsilon}_{ij}(t)$ og $\dot{\zeta}(t)$. Koefficienterne til $\dot{\varepsilon}_{ij}(t)$ og $\dot{\zeta}(t)$ skal derfor forsvinde, altså

$$\sigma_{ij} = A^1_{ij}(0+) + 2\int_{0-}^{t-} B^{11}_{ijk\ell}(t-\tau,0+) \frac{d\varepsilon_{k\ell}(\tau)}{d\tau} d\tau +$$

$$+ \int_{0-}^{t-} B^{12}_{ij}(0+,t-\tau) \frac{d\zeta(\tau)}{d\tau} d\tau \qquad (1.74)$$

$$\rho\eta^i = A^2(0+) + 2\int_{0-}^{t-} B^{22}(t-\tau,0+) \frac{d\zeta(\tau)}{d\tau} d\tau \quad +$$

$$+ \int_{0-}^{t-} B^{12}_{ij}(t-\tau,0+) \frac{d\varepsilon_{ij}(\tau)}{d\tau} d\tau \qquad (1.75)$$

Dette er de <u>konstitutive ligninger for spændingerne</u> σ_{ij} og den <u>indre entropi</u> η^i . Den konstitutive ligning for varmelednings-vektoren $\underset{\sim}{h}$ postuleres som

$$h_i = \int_{0-}^{t-} k_{ij}(t-\tau) \frac{d\zeta_{,i}(\tau)}{d\tau} d\tau \qquad (1.76)$$

herved fås uligheden

$$-\int_{0-}^{t-} \frac{\partial}{\partial t} A^1_{ij}(t-\tau) \frac{d\varepsilon_{ij}(\tau)}{d\tau} d\tau - \int_{0-}^{t-} \frac{\partial}{\partial t} A^2(t-\tau) \frac{d\zeta(\tau)}{d\tau} d\tau +$$

$$+ \lambda^i + \frac{h_i \zeta_{,i}}{\theta_o} \geqq 0 \qquad (1.77)$$

hvor de to første led er af 1. orden i ε_{ij} , ζ , og de to sidste led af 2. orden. Hvis uligheden skal være tilfredsstillende for alle processer må vi derfor kræve

$$\frac{dA^1_{ij}(t)}{dt} = \frac{dA^2(t)}{dt} = 0 \ , \ t \in [0;\infty[\qquad (1.78)$$

samt

$$\lambda^i + \frac{h_i \zeta_{,i}}{\theta_o} \geqq 0 \qquad (1.79)$$

Heraf ses ved sammenligning med (1.58), at størrelsen λ^i er den indre dissipationshastighed.

Vi vil nu interessere os lidt nærmere for specielt funktionerne $B^{11}_{ijk\ell}(\cdot,\cdot)$. Den konstitutive ligning (1.74) for spændingerne bliver i det isoterme tilfælde og idet vi udnytter (1.78)

$$\sigma_{ij} = 2 \int_{0-}^{t-} B^{11}_{ijk\ell}(t-\tau, 0+) \frac{d\varepsilon_{k\ell}(\tau)}{d\tau} d\tau \qquad (1.80)$$

Heraf ses, at funktionerne $2B^{11}_{ijk\ell}(t,0+)$ svarer til <u>relaxationsfunktionerne</u> $R_{ijk\ell}(t)$ fra den isoterme teori, idet

$$2B^{11}_{ijk\ell}(t,0+) = R_{ijk\ell}(t) \qquad (1.81)$$

Spørgsmålet,om det er muligt at udtrykke funktionen $B^{11}_{ijk\ell}(\tau,\eta)$ ved relaxationsfunktionen,har været genstand for nogen opmærksomhed. Udledes de termodynamiske konstitutive ligninger ved hjælp af modelrepresentation som gjort af Staverman og Schwartzl [2] eller som det er gjort i appendix D, så kommer man uden videre til resultatet

$$2B^{11}_{ijk\ell}(\tau,\eta) = R_{ijk\ell}(\tau+\eta) \tag{1.82}$$

Breuer og Onat [4] har undersøgt om det er muligt at opnå den reducerede form (1.82) uden at referere til nogen form for modelrepresentation.Dette synes ikke umiddelbart at være tilfældet. De kan imidlertid vise, at hvis relaxationsfunktionen $R_{ijk\ell}(\cdot)$ har formen

$$R_{ijk\ell}(t) = \sum_{n=1}^{N} C^{n}_{ijk\ell}\; e^{-\mu_n t} \tag{1.83}$$

hvor $C^n_{ijk\ell} > 0$ og hvor $0 < \mu_1 < \mu_2 \ldots < \mu_N$, så kan funktionen $B^{11}_{ijk\ell}(\tau,\eta)$ skrives

$$B^{11}_{ijk\ell}(\tau,\eta) = \sum_{n=1}^{N}\sum_{m=1}^{N} \beta^{nm}_{ijk\ell}\; e^{-\mu_n\tau}\; e^{-\mu_m\eta} \tag{1.84}$$

hvor udviklingskoefficienterne $B^{nm}_{ijk\ell}$ skal opfylde følgende krav

$$\left.\begin{aligned}
&\sum_{n=1}^{N}\sum_{m=1}^{N} \beta^{nm}_{ijk\ell}\; S^n_{ij}\; S^m_{k\ell} \geqq 0 \\
&\sum_{n=1}^{N}\sum_{m=1}^{N} (\mu_n+\mu_m)\;\beta^{nm}_{ijk\ell}\; S^n_{ij}\; S^m_{k\ell} \geqq 0 \\
&\sum_{m=1}^{N} \beta^{nm}_{ijk\ell} = \frac{1}{2}\, C^n_{ijk\ell}\;, \quad n = 1,2,\ldots,N \\
&\beta^{nm}_{ijk\ell} = \beta^{mn}_{ijk\ell}
\end{aligned}\right\} \tag{1.85}$$

hvor størrelserne $S^n_{ij} = S^n_{ij}(t)$ er defineret ved

$$S^n_{ij} = \int_{o-}^{t-} e^{-\mu_n(t-\tau)} \frac{d\varepsilon_{ij}(\tau)}{d\tau} d\tau \tag{1.86}$$

Bortset fra tilfældet $N = 1$ giver betingelserne (1.85) ikke mulighed for nogen entydig bestemmelse af udviklingskoefficienterne $B^{nm}_{ijk\ell}$, og kendskab til relaxationsfunktionen $R_{ijk\ell}(\cdot)$ giver altså på denne baggrund i almindelighed ikke mulighed for bestemmelse af den todimensionale funktion $B^{11}_{ijk\ell}(\cdot,\cdot)$.
Antages *) det imidlertid at

$$\beta^{nm}_{ijk\ell} = \beta_{ijk\ell}\,\sigma_{nm} \tag{1.87}$$

så er betingelserne (1.85) opfyldt hvis og kun hvis

$$\beta^{nm}_{ijk\ell} = \frac{1}{2} C^n_{ijk\ell}\,\sigma_{nm} \tag{1.88}$$

og dermed

$$\begin{aligned} B^{11}_{ijk\ell}(\tau,\eta) &= \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{N} C^n_{ijk\ell}\, e^{-\mu_n(\tau+\eta)} \\ &= \frac{1}{2} R_{ijk\ell}(\tau+\eta) \end{aligned} \tag{1.89}$$

Antager vi den reducerede form (1.82) eller (1.89) for kernen $B^{11}_{ijk\ell}(\cdot,\cdot)$, så opnås, at den fri energi $\rho\psi^i$ og den indre dissipationshastighed λ^i for isoterme forhold kan skrives henholdsvis

*) Denne antagelse er ensbetydende med opfyldelse af visse betingelser, som naturligt indgår i en analyse baseret på modelrepresentation, se appendix D afsnit 5.

$$\rho\psi^{i} = \frac{1}{2} \int_{0-}^{t-} \int_{0-}^{t-} R_{ijk\ell}(2t-\tau-\eta) \frac{d\varepsilon_{ij}(\eta)}{d\tau} \frac{d\varepsilon_{k\ell}(\eta)}{d\eta} d\tau d\eta \tag{1.90}$$

$$\lambda^{i} = -\frac{1}{2} \int_{0-}^{t-} \int_{0-}^{t-} \frac{\partial}{\partial t} R_{ijk\ell}(2t-\tau-\eta) \frac{d\varepsilon_{ij}(\tau)}{d\tau} \frac{d\varepsilon_{k\ell}(\eta)}{d\eta} d\tau d\eta \tag{1.91}$$

De her givne udledninger af de konstitutive ligninger er baseret på den fri energi $\rho\psi^{i}$, som egentlig er en Helmholtz fri energi. Baseres udledningerne i stedet på en Gibbs fri energi $\rho\varphi^{i}$, så opnås, som vist i appendix C, de til (1.90) og (1.91) svarende resultater

$$\rho\varphi^{i} = -\frac{1}{2} \int_{0-}^{t-} \int_{0-}^{t-} K_{ijk\ell}(2t-\tau-\eta) \frac{d\sigma_{ij}(\tau)}{d\tau} \frac{d\sigma_{k\ell}(\eta)}{d\eta} d\tau d\eta \tag{1.92}$$

$$\lambda^{i} = \frac{1}{2} \int_{0-}^{t-} \int_{0-}^{t-} \frac{\partial}{\partial t} K_{ijk\ell}(2t-\tau-\eta) \frac{d\sigma_{ij}(\tau)}{d\tau} \frac{d\sigma_{k\ell}(\eta)}{d\eta} d\tau d\eta \tag{1.93}$$

hvor

$$\rho\varphi^{i} = \rho\psi^{i} - \sigma_{ij}\varepsilon_{ij} \tag{1.94}$$

og hvor funktionerne $K_{ijk\ell}(\cdot)$ er krybningsfunktionerne fra den isoterme teori.

KAPITEL 2

Modeller og kriterier.

2.1 Det generelle kriterium og revneudbredelsesparadokset.

Vi vil nu betragte et lineært viscoelastisk revneudbredelsesproblem, idet vi vil gøre os visse betragtninger vedrørende revneudbredelseskriteriet for et sådant problem hovedsagelig med udgangspunkt i resultaterne fra den tidligere rapport [23].

Lad os betragte revnespidsen i en fastholdt position på udbredelseskurven K svarende til parameterværdien s_o. Analogt til hvad der gælder for elastiske materialer vil vi antage, at betingelsen for, at revnen vil udbrede sig kan skrives på formen

$$F \geqq F_{kr} \qquad (2.1)$$

hvor F er en parameter, som afhænger af tilstanden omkring revnespidsen, og F_{kr} er en materialekonstant - en kritisk værdi. Som vist i [23] kan tilstanden omkring en revnespids altid beskrives ved seks parametre, nemlig to spændingsintensitetsfaktorer k_α, og fire deformationsfaktorer c_α og d_α, $\alpha = 1,2$. Størrelsen F er da en funktion*) af de 6 revnespidsparametre, og (2.1) kan da skrives

$$F(k_\alpha,\ c_\alpha,\ d_\alpha) \geqq F_{kr} \qquad (2.2)$$

Lad os nu betragte et simpelt spændingsrandværdiproblem. Vi vil antage, at de ydre laste er konstante i tid, at der er tale om et rent mode I problem, samt at der er tale om et isotropt lineært viscoelastisk materiale, hvor poissons forhold kan regnes konstant således, at materialet kan beskrives ved en enkelt krybningsfunktion. Revnespidstilstanden kan i dette tilfælde beskrives fuldstændigt ved den aktuelle spændingsintensitetsfaktor k, og en af de to

---

*) Man kunne også forestille sig, at F var et funktional af revnespidsparametrene, eller da deformationsparametrene er funktionaler af spændingsintensitetsfaktorerne, blot et funktional af spændingsintensitetsfaktorerne k_α, men denne mulighed vil vi se bort fra lige her.

deformationsfaktorer, som er forskellig fra nul, lad os sige d. Udbredelseskriteriet har da formen

$$F(k,d) \geq F_{kr} \tag{2.3}$$

I dette tilfælde vil intensitetsfaktoren k være konstant i tid, hvorimod deformationsfaktoren d vil være en stadigt voksende funktion af tiden t, sålænge revnespidsen forbliver i positionen $s = s_o$. Lad os forestille os, at revnespidsen er ankommet til positionen s_o til tidspunktet $t = t_o$.

Hvis udbredelseskriteriet (2.3) er opfyldt med ulighedstegn**) til tidspunktet $t = t_o^+$, d.v.s.

$$F(k,d(t_o^+)) > F_{kr} \tag{2.4}$$

så vil det også være opfyldt til $t = t_o^+$, såfremt revnen til $t = t_o$ var ankommet til en position s i en omegn af s_o, og da deformationsfaktoren d, som vist i [23] er uafhængig af udbredelseshistorien*), så vil det altså betyde, at revnen udbreder sig med hastigheden $v = \infty$ omkring positionen $s = s_o$.

Hvis revnen skal kunne udbrede sig med en <u>endelig hastighed</u> omkring positionen $s = s_o$, så betyder dette derfor, at kriteriet (2.3) ikke må være opfyldt til tiden $t = t_o^+$, men først til et eventuelt senere tidspunkt $t_1 = t_o + \Delta t$, $\Delta t > 0$. D.v.s., at

$$F(k,d(t_o^+)) < F_{kr} \tag{2.5}$$

$$F(k,d(t_o + \Delta t)) = F_{kr} \tag{2.6}$$

Dette betyder, at størrelsen F må være en <u>stadigt voksende funktion</u> af parameteren d.

Lad os antage, at kriteriet er opfyldt til tidspunktet $t_1 = t_o + \Delta t$, og at revnen vil udbrede sig med en endelig hastighed for $t > t_1$ omkring positionen $s > s_o$ i en omegn af s_o. Denne antagelse lader

---

*) En deformationsfaktor d er til et givet tidspunkt t' uafhængig af udbredelseshistorien inclusive hastigheden til tidspunktet t', forudsat at udbredelseshastigheden v er forskellig fra nul til tidspunktet $t = t'-$.

**) I tilfældet hvor (2.3) er opfyldt med lighedstegn gælder et helt tilsvarende ræsonnement idet intensitetsfaktoren k under de givne antagelser altid vil være en voksende funktion af s.

Lad os nu antage, at kriteriet er opfyldt til tidspunktet $t_1 = t_o + \Delta t$, og at revnen vil udbrede sig med en endelig hastighed for $t > t_1$ omkring positionen $s > s_o$ i en omegn af s_o. Denne antagelse leder imidlertid til et paradoks. Hvis nemlig (2.5) er opfyldt til tidspunktet $t = t_o^+$, så vil det også være opfyldt til $t = t_o^+$, såfremt revnen til $t = t_o$ var ankommet til en position s i en omegn af s_o, og da deformationsfaktoren d ikke afhænger af udbredelseshistorien, så vil der så snart revnen er begyndt at udbrede sig og til tidspunktet $t = t_1 + \delta t$ befinder sig i positionen $s = s_o + \delta s$, $\delta s > 0$, gælde at

$$F(k,d(t_1 + \delta t)) < F_{kr} \qquad (2.7)$$

Det vil altså sige, at blot revnen har løbet et vilkårligt lille stykke $\delta s > 0$, så vil udbredelseskriteriet ikke længere være opfyldt.

Resultaterne fra den tidligere rapport [23] og de overvejelser, der er gjort her, leder altså til et paradoks, idet der for udbredelsesproblemer af den her betragtede type, åbenbart kan være tilfælde, hvor teorien hverken tillader revnen at være stationær eller at udbrede sig.

2.2 Revnemodeller.

Betragter man udbredelsesproblemer for matematisk skarpe revner i et lineært viscoelastisk kontinuum, så ledes man ved hjælp af den infinitesimale lineære viscoelasticitetsteori og et generelt udbredelseskriterium af formen (2.1) direkte til det i forrige afsnit omtalte revneudbredelsesparadoks.

Det kan altså ikke lade sig gøre at etablere en dækkende teori til beskrivelse af langsomme revneudbredelsesfænomener på det ovenfor nævnte grundlag alene. Man må supplere med visse antagelser, som forbedrer beskrivelsen lige omkring revnespidsen. En sådan antagelse eller sæt af antagelser kaldes for en revnemodel.

Man kunne forestille sig, at en teori for store deformationer og tøjninger eller momentspændingsteori ville give en beskrivelse, som ville fjerne revneudbredelsesparadokset. Dette forudsætter imidlertid, at løsningerne bliver ikke singulære omkring revnespidsen. Som det er anført i afsnit 3.4 i den tidligere rapport [23] , vil disse teorier give singulære løsninger hvis der er tale om lineærelastisk materiale, og det samme vil derfor være tilfældet hvis der er tale om lineært viscoelastisk materiale. En mere avanceret kontinuummekanisk lineær teori vil derfor ikke give en beskrivelse, som i denne forbindelse kan siges at være bedre end den beskrivelse der er opnået med den infinitesimale teori.

Der er da umiddelbart tre muligheder for valg af revnemodel, nemlig

- antagelse om en endelig begyndelseskrumningsradius ved revnespidsen, d.v.s. en ændret geometrisk beskrivelse af revnen.

- antagelse om "flydning" ved revnespidsen, d.v.s. en ændret konstitutiv ligning.

- antagelse om at legemet er rumligt diskretiseret, d.v.s. en ændring i forhold til opfattelsen af et legeme som et kontinuum.

Begge de to første antagelser vil give en beskrivelse med ikke singulære spændings- og tøjningsfelter ved revnespidsen. Den første antagelse har så vidt det vides ikke tidligere dannet grundlag for en egentlig revneudbredelsesteori for revner i lineært viscoelastiske materialer. Den anden antagelse derimod indgår på en eller anden måde i de fleste eksisterende teorier om revneudbredelse i lineært viscoelastiske materialer, se blandt andet Schapery [14] , McCartney [21] , Wnuk [12] og Nielsen [18], [22].

Arbejder man med en teori baseret på en model med ikke singulære spændings- og tøjningsfelter, så vil det medføre, at tilstanden omkring revnespidsen vil blive afhængig af udbredelseshistorien. På denne måde kan problemet med det tidligere omtalte revneudbredelsesparadoks undgås, men til gengæld bliver bestemmelsen af at revnespidstilstanden kompliceret, og de generelle løsninger, som er fundet i [23], kan ikke længere benyttes.

Der kan være tilfælde, hvor en antagelse om flydning ved revnespidsen kan være nødvendiggjort af at flydezonen er stor i forhold til problements karakteristiske geometrika, f.eks. revnelængden. Men med mindre dette er tilfældet, synes det uheldigt at arbejde med en model, som komplicerer analysen af revnespidstilstanden.

En vigtig kvalitet ved en revnemodel må derfor være, at den tillader en udnyttelse af de generelle løsninger for revnespidstilstanden, som er fundet i [23]. Den sidste model besidder denne kvalitet. Det antages, at de lineært viscoelastiske singulære løsninger kan benyttes til beskrivelse af revnespidstilstanden, og at antagelsen om diskretiseret medium *) kun får betydning ved den kinematiske beskrivelse af revneudbredelsen. Det antages nemlig, at en eventuel revneudbredelse foregår i skridt med en for materialet karakteristisk længde δ. Herved opnås, at revneudbredelsesparadokset ikke længere giver anledning til nogen modstrid, men derimod indgår som en del af modellen for revneudbredelse. Hvis vi nemlig betragter det i forrige afsnit omtalte simple revneudbredelsesproblem, og antager, at revnespidsen har været stationær et stykke tid, men vil løbe til tidspunktet t_o fordi udbredelseskriteriet (2.3) er opfyldt til dette tidspunkt, så vil revnen ganske vidst af de tidligere omtalte grunde gå i stå igen til tidspunktet $t = t_t^+$, men først efter i henhold til antagelsen om diskretiseret medium, at have løbet stykket δ. Her vil revnen stå stille et stykke

*) Det skal bemærkes, at antagelsen diskretiseret medium for det første stemmer overens med vores viden om hvordan virkelige materialer er opbygget, og for det andet giver mulighed for en meningsfuld tolkning af de singulære spændings- og tøjningsfelter, se diskussionen i afsnit 3.4 i [23].

tid indtil udbredelseskriteriet eventuelt igen er opfyldt, hvorefter den igen vil løbe stykket δ, o.s.v.

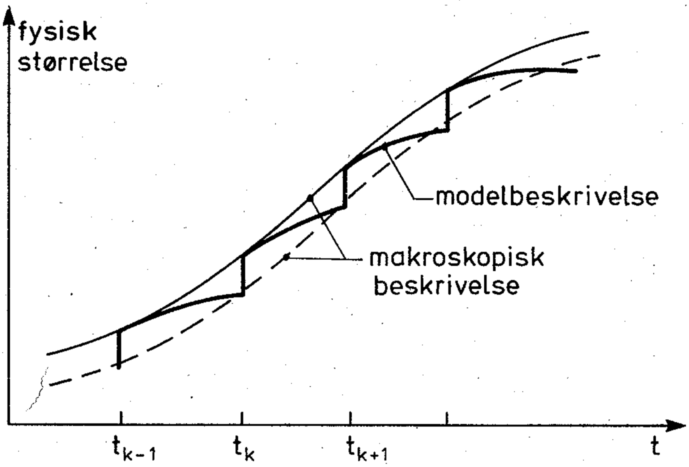
Antagelsen om diskretiseret medium giver altså anledning til en diskontinuert beskrivelse af udbredelsesforløbet. Denne beskrivelse vil vi kalde modelbeskrivelsen eller modeludbredelsesprocessen $s_m(t)$. Modeludbredelsesprocessen angiver således revnespidsens position på udbredelseskurven ved en trappefunktion af formen

$$s_m = s_{mo} + \delta \cdot \sum_K \Delta(t-t_k) \qquad (2.8)$$

hvor $\{t_k\}$ betegner mængden af de tidspunkter, hvor der sker en fremrykning af revnen.

Da de forskellige fysiske størrelser, som beskriver tilstanden i legemet direkte eller indirekte afhænger af revnespidsens position, så vil disse fysiske størrelser alle være beskrevet ved en tidslig variation,der som hovedregel vil have spring i alle tidspunkter t_k . Denne diskontinuerte beskrivelse kalder vi tilsvarende for modelbeskrivelsen for de fysiske størrelser, som beskriver tilstanden i legemet.

I virkeligheden, d.v.s. ved udførelsen af forsøg, vil man naturligvis oftest opfatte og beskrive de aktuelle fysiske størrelser og også revnelængden, som kontinuerte funktioner af tiden. Af denne grund definerer vi for en hver fysisk størrelse og revnelængde en makroskopisk beskrivelse ud fra modelbeskrivelsen ved en hver kontinuert funktion af tiden, som på passende måde tilnærmer modelbeskrivelsen for den aktuelle fysiske størrelse eller revnelængde, se figur 2.1.



Figur 2.1. Den makroskopiske beskrivelse defineres ud fra modelbeskrivelsen ved en hver kontinuert funktion af tiden t, som på passende måde tilnærmer modelbeskrivelsen.

2.3 Termodynamiske betingelser.

Vi vil nu benytte nogle af resultaterne fra de termodynamiske analyser i kapitel 1.

Vi vil tænke os, at vi ved hjælp af løsningen i den tidligere rapport [23] , et udbredelseskriterium af formen (2.2) og den sidste af revnemodellerne i det forrige afsnit (antagelsen om diskretiseret medium) , har bestemt et udbredelsesforløb for en revne i et lineært viscoelastisk legeme. Herved har vi desuden fastlagt modelbeskrivelsen og en makrobeskrivelse for de indgående fysiske størrelser som omtalt i forrige afsnit. Med mindre andet nævnes, refereres der i det følgende udelukkende til den makroskopiske beskrivelse for de aktuelle fysiske størrelser.

Vi vil nu betragte en isoterm revneudbredelsesproces som beskrevet i afsnit 1.5. Det antages desuden, at der er tale om et plant problem. Følgende betingelser skal da være opfyldt, jvnf. betingelserne (1.66)

$$P - \dot{K} - \dot{\Psi} - \Lambda = 0 \tag{2.9}$$

$$P - \dot{K} - \dot{\Psi} - \geqq 0 \tag{2.10}$$

Vi vil nu kræve disse betingelser opfyldt for den makroskopiske beskrivelse , idet vi som omtalt i afsnit 1.1 vil opfatte de totale størrelser P , ψ og Λ som summen af et indre bidrag og et overfladebidrag.

$$\begin{aligned} P &= P^i + P^o \\ \Psi &= \Psi^i + \Psi^o \\ \Lambda &= \Lambda^i + \Lambda^o \end{aligned} \tag{2.11}$$

Vi vil desuden gøre den antagelse, at overfladedissipationen Λ^o er identisk nul, altså

$$\Lambda^o \equiv 0 \tag{2.12}$$

Under denne antagelse vil det for en hver fast delmængde af en fysisk overflade gælde at $P^o - \dot{\Psi}^o \equiv 0$. Derfor må størrelsen $P^o - \dot{\Psi}^o$ for et legeme hvori der foregår en revneudbredelse, være proportional med tilvæksthastigheden af fysisk overflade for det betragtede legeme, og hvis revnen udbreder sig med hastigheden v, fås derfor

$$P^o - \dot{\Psi}^o = - v\, G_{kr} \tag{2.13}$$

hvor G_{kr} er en materialekonstant. Af dette resultat ses ved anvendelse af (2.11), at antagelsen (2.12) medfører at betingelserne (2.9) og (2.10) får formen

$$P^i - \dot{K} - \dot{\Psi}^i - \Lambda^i = \quad v\, G_{kr} \tag{2.14}$$

$$P^i - \dot{K} - \dot{\Psi}^i \geqq v\, G_{kr} \tag{2.15}$$

Da den <u>konstitutive ligning</u> for materialet opfylder betingelsen $\Lambda^i \geqq 0$, så ses det, at (2.15) automatisk er opfyldt hvis blot (2.14) er det. Vi kan altså nøjes med at opfylde betingelsen (2.14).

Lad det betragtede legeme være defineret over området Ω i planen. Området Ω og dets rand $\partial\Omega$ afhænger da af revneudbredelsen, d.v.s. at positionen s_o af den betragtede revnespids på udbredelseskurven, altså $\Omega = \Omega(s_o(t))$ og $\partial\Omega = \partial\Omega(s_o(t))$. De enkelte bidrag i (14) skal nu omskrives *) . Af (1.44) fås

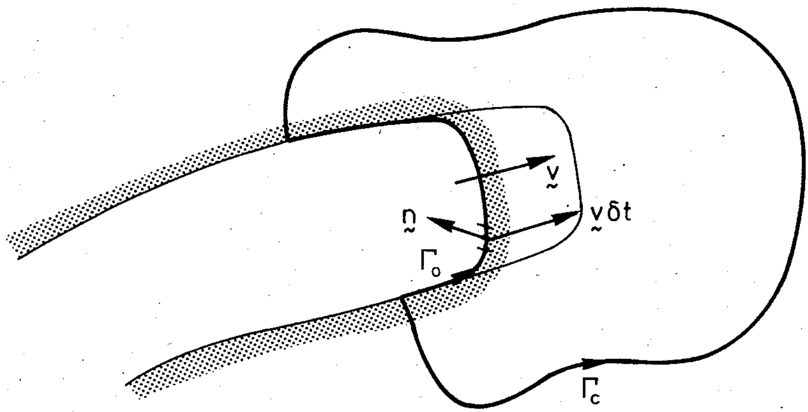
$$P^i - \dot{K} = \int_{\Omega} w \, da \tag{2.16}$$

Den tidsafledede af den <u>totale fri energi</u> Ψ^i er lidt vanskelig at udregne. For en hver "revne" af endelig bredde og fast geometri, som udbreder sig med hastigheden $\underset{\sim}{v}$ i materialet, gælder imidlertid

$$\begin{aligned}\dot{\Psi}^i &= \frac{d}{dt} \int_{\Omega(s_o(t))} \rho\psi^i \, da \\ &= \int_{\Omega} \rho\dot{\psi}^i \, da + \underset{\sim}{v} \cdot \int_{\Gamma_o} \rho\psi^i \, \underset{\sim}{n} \, ds \end{aligned} \tag{2.17}$$

hvor $\underset{\sim}{n}$ er den udrettede normal til revneoverfladen, og Γ_o er en kurve, som forløber langs "revnens" overflade fra et punkt på den ene side til et punkt på den anden side af revnen, se figur 2.2.

*) De følgende udledelser minder meget om udledelsen af <u>J-integralet</u> for elastiske legemer, se Rice [8], Hutchinson [10] , eller udledelsen af J-integralet i appendix E.



Figur 2.2. "Revne" af endelig bredde og med fast spidsgeometri.

Lad os nu antage at vi analogt til det elastiske tilfælde*) er i besiddelse af en bevarelseslov af formen

$$\underset{\sim}{v} \cdot \oint_{\Gamma} (\rho\psi^{i} - f)\, \underset{\sim}{n}\, ds = 0 \qquad (2.18)$$

gældende for en hver lukket kurve Γ, hvor $\underset{\sim}{n}$ er enhedsnormalen til Γ, og $\underset{\sim}{v}$ er en vilkårlig fast vektor, så kan vi specielt vælge $\Gamma = \Gamma_o + \Gamma_c$, hvor Γ_c er en J-formet kurve, som gennem indre punkter i Ω løber fra et punkt på den ene side af revnen til et punkt på den anden side, se figur 2.2.

Antager vi desuden, at størrelsen $f\underset{\sim}{n}$ er identisk nul på revneoverfladen, så fås af (2.18) at

*) Se udledelsen af J-integralet for elastiske materialer i appendix E, formel (E.6).

$$\underset{\sim}{v} \cdot \int_{\Gamma_c} \rho\psi^i \underset{\sim}{n}\, ds = - \underset{\sim}{v} \cdot \int_{\Gamma_o} (\rho\psi^i - f)\, \underset{\sim}{n}\, ds \qquad (2.19)$$

Den tidsafledede af Ψ^i kan da skrives

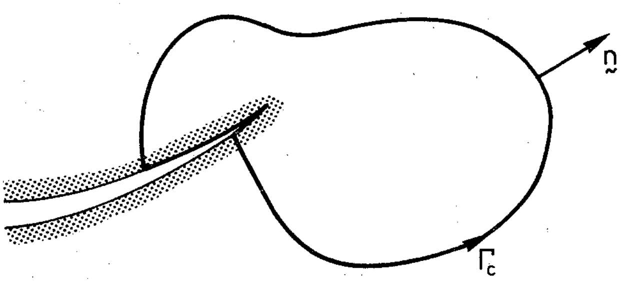
$$\dot{\Psi}^i = \int_\Omega \rho\dot{\psi}^i\, da - \underset{\sim}{v} \cdot \int_{\Gamma_c} (\rho\psi^i - f)\, \underset{\sim}{n}\, ds \qquad (2.20)$$

Da udtrykket under de omtalte antagelser gælder for alle "revner" af endelig bredde, for en hver kurve Γ_c, som omslutter enden af "revnen", så slutter vi heraf, at udtrykket (2.20) også gælder i grænsen for bredden gående mod nul, og dermed også for en skarp revne; se Rice [24].

Den tidsafledede af Ψ^i kan altså under de gjorte antagelser skrives på formen (2.20), hvor Γ_c er en J-formet kurve, som gennem indre punkter i Ω løber fra et punkt på den ene side af revnen til et punkt på den anden side, se figur 2.3.

Indsættes (2.16) og (2.20) i betingelsen (2.14) fås idet vi skriver

$$\Lambda^i = \int_\Omega \lambda^i\, da$$



Figur 2.3. Kurven Γ_c.

at

$$\int_{\Omega} (w - \rho\psi^i - \lambda)\, da + \underset{\sim}{v} \cdot \int_{\Gamma_c} (\rho\psi^i - f)\, \underset{\sim}{n}\, ds = v\, G_{kr} \tag{2.21}$$

Af energibevarelsessætningen på lokal form, se ligning (1.50), fås, da der en tale om isoterme forhold, at det første integrale forsvinder. Lad $\underset{\sim}{e}$ være en enhedsvektor i revneudbredelses retning, ligning (2.21) reduceres da til betingelsen

$$\underset{\sim}{e} \cdot \int_{\Gamma_c} (\rho\psi^i - f)\, \underset{\sim}{n}\, ds = G_{kr} \tag{2.22}$$

Energibevarelsessætningen på global form kan altså formuleres som en betingelse af formen (2.22) forudsat, at det kan antages, at der ikke sker dissipation på legemets overflade, og forudsat der kan formuleres en bevarelseslov af formen (2.18) hvor størrelsen f er nul på revneranden.

Det er imidlertid under alle omstændigheder et spørgsmål hvordan betingelsen (2.22) skal fortolkes under en antagelse om diskretiseret medium. Betingelsen er udledt for en makroskopisk beskrivelse, men udgangspunktet under antagelse af diskretiseret medium vil altid være en modelbeskrivelse, ud fra hvilken der kan defineres en mængde makrobeskrivelser. Det er derfor et spørgsmål hvilken af de forskellige makrobeskrivelser, som man i en given situation skal indsætte i betingelsen (2.22).

Lad os antage, at revnen i modelbeskrivelsen er ankommet til positionen s_o til tidspunktet $t = t_o$. Lad os endvidere antage, at der sker en fremrykning af revnen til tidspunktet t_1. At kræve (2.22) opfyldt for en vilkårlig makrobeskrivelse ville være ensbetydende med at indsætte modelbeskrivelsen $\rho\psi^i_m(t)$, $F_m(t)$ i betingelsen (2.22) for vilkårlige $t \in \,]t_o\,;\,t_1[$. Da fremrykningen af revnen i modelbeskrivelsen jo imidlertid sker til tidspunktet $t = t_1$, synes det sammenholdt med den fysiske betydning af det sidste led i (2.17) at være det rimeligste at kræve betingelsen (2.22) opfyldt for størrelserne $\rho\psi_m^i$, f_m i modelbeskrivelsen bestemt til et tidspunkt umiddelbart før en fremrykning af revnen, d.v.s. at kræve (2.22) opfyldt for størrelserne $\rho\psi_m^i(t_1^-)$ og $f_m(t_1^-)$. Det er i hvert fald sådan vi i det følgende vil fortolke betingelsen (2.22), blandt andet også fordi, at det er denne fortolkning, som giver de fornuftigste resultater i den sidste ende.

2.4. Forskellige gæt på revneudbredelseskriteriet.

Lad os først betragte et simpelt enkeltmodeproblem med balanceret krybning, d.v.s. med konstant poissonforhold. I dette tilfælde beskrives revnespidstilstanden fuldstændigt ved spændingsintensitetsfaktoren k og den ene af deformationsfunktionerne , lad os sige d.

Vi kan da i dette tilfælde angive nogle gæt for funktionen F , jvnf. udtrykket (2.3), ganske enkelt som simple funktioner af k og d, som er stadigt voksende *) i d, f.eks.

$$\left.\begin{aligned} F(k,d) &= d \\ F(k,d) &= kd \\ F(k,d) &= k^2 + ad^2 \ , \quad a > 0 \end{aligned}\right\} \qquad (2.23)$$

For problemer hvor man må benytte alle 6 revnespidsparametre til beskrivelse af revnespidstilstanden, er det sværere og på grund af de mange kombinationsmuligheder mindre relevant uden videre at angive simple gæt for funktionen F.

*) Det er tidligere vist, at F i dette tilfælde må være en stadigt voksende funktion af d, se diskussionen omkring udtrykkene (2.4) til (2.6).

Der er imidlertid en vis tendens i litteraturen til at lægge mest vægt på de kriterier, som kan formuleres ved hjælp af vejuafhængige integraler. Et sådant kan bl.a. formuleres ved hjælp af en bevarelseslov, som er fremsat af Gurtin. Bevarelsesloven kan enten baseres på foldninger, og udledes som gjort af af Gurtin i [15] , eller på laplacetransformation som i det følgende. Andre bevarelseslove kan også defineres, se Budianski and Rice [11] .

For lineært elastiske materialer gælder, som det er vist i appendix E, følgende bevarelseslov for plane problemer

$$e_k \oint_\Gamma \left(\frac{1}{2}\,\sigma_{ij}\,\varepsilon_{ij}\,n_k - u_{i,k}\,\sigma_{ij}\,n_j\right) ds = 0 \qquad (2.24)$$

hvor Γ er en lukket kurve, som forløber inden for det område over hvilket det plane problem er defineret, og hvor $\underset{\sim}{n}$ er enhedsnormalen til Γ. Vektoren $\underset{\sim}{e}$ er en vilkårlig enhedsvektor.

Af korrespondensprincippet, se [23] , fås da umiddelbart, at der for et lineært viscoelastisk materiale tilsvarende gælder bevarelsesloven

$$e_k \oint_\Gamma \left(\frac{1}{2}\,\sigma^*_{ij}\,\varepsilon^*_{ij}\,n_k - u^*_{i,k}\,\sigma^*_{ij}\,n_j\right) ds = 0 \qquad (2.25)$$

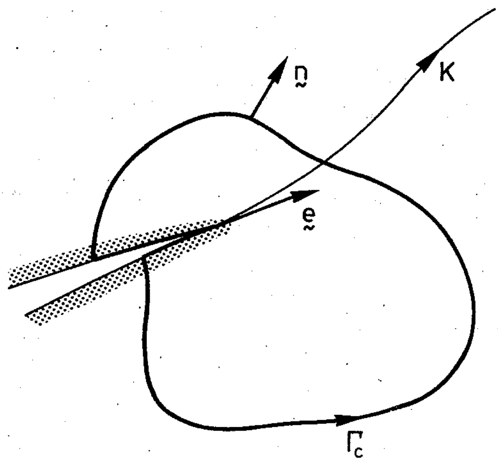
hvor σ^*_{ij} , ε^*_{ij} og u^*_i angiver den laplacetransformerede lineært viscoelastiske løsning, d.v.s. f.eks.

$$\sigma^*_{ij} = \underset{t \frown p}{\mathscr{L}}\,\sigma_{ij} \qquad (2.26)$$

hvor $\mathscr{L}$ er laplacetransformationen. Som anført af Gurtin i [15] betyder bevarelsesloven (2.25), at der for en stationær revne kan defineres følgende integrale

$$I^{o*} = e_k \int_{\Gamma_c} \left(\frac{1}{2}\,\sigma^*_{ij}\,\varepsilon^*_{ij}\,n_k - u^*_{i,k}\,\sigma^*_{ij}\,n_j\right) ds \qquad (2.27)$$

som er uafhængigt af kurven Γ_c som omslutter revnespidsen, og løber fra et punkt på den ene side til et punkt på den anden side af revnen. Vektoren $\underset{\sim}{e}$ er er en enhedsvektor som angiver retningen for en eventuel revneudbredelse langs den glatte udbredelseskurve K, se figur 2.4.



Figur 2.4. Det vejuafhængige integrale I er et <u>kurveintegrale</u> langs kurven Γ_c .

Det <u>vejuafhængige integrale</u> I som angivet i (2.27) kan analogt til J-integralet udregnes til

$$I^{o*} = \frac{\pi}{2} k_\alpha^* d_\alpha^* \tag{2.28}$$

eller ved anvendelse af <u>foldningsreglen</u>

$$I^o(t) = \frac{\pi}{2} \int_{o-}^{t-} k_\alpha(t-\tau)\, d_\alpha(\tau)\, d\tau \tag{2.29}$$

Funktionen I(t) eller en hvilken som helst af den afledede

$$I^m(t) = \frac{d^m}{dt^m} I^o(t) = \frac{\pi}{2} \int_{o-}^{t-} k_\alpha(t-\tau) \frac{d^m d_\alpha(\tau)}{d\tau^m} d\tau \qquad (2.30)$$

m = 1,2,..., kan da bruges som udgangspunkt for formulering af et <u>udbredelseskriterium</u> , som kan gives formen

$$I^m(t) = I^m_{kr} \quad , \quad m = 0,1,2,... \qquad (2.31)$$

hvor I^m_{kr} er en <u>kritisk værdi</u>. Begrundelsen for at foreslå netop disse kriterier er egentlig kun, at de har deres oprindelse i et <u>vejuafhængigigt integrale</u> , som har en vis lighed med <u>J-integralet</u> kendt fra den elastiske teori. Det bemærkes i øvrigt, at størrelserne I^m i dette tilfælde er <u>funktionaler af revnespids-parametrene</u> k_α og d_α og ikke blot funktioner af disse, som antaget i afsnit 2.1.

Det er på grund af funktionalformen for kriterierne (2.31) klart, at disse kun kan baseres på <u>modelbeskrivelsen</u> og ikke på nogen <u>makrobeskrivelse.</u> For de øvrige kriterier af funktionsform kan man derimod opfatte kriteriet enten som et <u>kriterium</u> for modelbeskrivelsen eller for den makrobeskrivelse, som er sammenfaldende med modelbeskrivelsen umiddelbart før en <u>fremrykning</u> af revnen.

Der er i det foregående angivet nogle ganske få gæt på formen af udbredelseskriteriet. Der kan naturligvis angives mange flere og sikkert også bedre gæt end de her angivne, og det overlades til læseren selv at gøre listen længere. For visse materialer og for visse belastningstilfælde, kan det ene kriterium være at foretrække, i andre tilfælde et andet.

Til sidst skal det bemærkes, at man formelt må stille det krav til et udbredelseskriterium for revner i lineært viscoelastiske materialer, at det giver det samme som <u>Griffith's kriterium</u> ved anvendelse på lineært elastiske materialer. Dette krav kan opfyldes af alle de i (2.23) angivne forslag ved anvendelse på enkeltmodeproblemer, men af kriterierne (2.31) anvendt på gen-nerelle problemer, kun for m = 1. Vi ledes herved til at kon-kludere, at det bedste gæt på udbredelseskriteriet for det gen-nerelle tilfælde er

$$\int_{o-}^{t-} k_\alpha(t-\tau) \frac{d\, d_\alpha(\tau)}{dt} dt = F_{kr}^1 \tag{2.32}$$

eller inspireret heraf og idet vi generaliserer det andet kri-terium i (2.23)

$$k_\alpha d_\alpha = F_{kr}^2 \tag{2.33}$$

Kriterierne (2.32) og (2.33) ses i øvrigt at være ensbetydende for rene spændingsrandværdiproblemer med konstante ydre laste.

2.5. Udbredelseskriterier baseret på opfyldelse af de termodynamiske betingelser.

I dette afsnit vil vi formulere nogle udbredelseskriteriet for revneproblemer i isotropt lineært viscoelastiske legemer base-ret på opfyldelse af de termodynamiske betingelser, som er omtalt i afsnit 2.3.

Det er her vist, at de termodynamiske betingelser er tilfreds-stillet hvis det betragtede plane revneudbredelsesproblem op-fylder ligningen

$$\underset{\sim}{e} \cdot \int_{\Gamma_c} (\rho\psi^i - f)\, \underset{\sim}{n}\, ds = G_{kr} \tag{2.34}$$

hvor $\underset{\sim}{e}$ er en enhedsvektor i revneudbredelsesretningen, og Γ_c er en kurve, som omslutter revnespidsen, forudsat at visse be-tingelser*) er opfyldt, bl.a. at der kan defineres en bevarel-seslov af formen

*) betingelserne er omtalt i detaljer i afsnit 2.3.

$$\underset{\sim}{v} \cdot \oint_{\Gamma} (\rho\psi^{i} - f)\, \underset{\sim}{n}\, ds = 0 \tag{2.35}$$

gældende for en hver vektor $\underset{\sim}{v}$ og en hver lukket kurve Γ, som forløber inden for det område i planen, over hvilket problemet er defineret.

Som omtalt i afsnit 2.3, vil vi kræve betingelsen (2.34) opfyldt for den makrobeskrivelse , som er sammenfaldende med modelbeskrivelsen umiddelbart før en fremrykning af revnen. Dette betyder, at vi lige så godt kan kræve betingelsen (2.34) opfyldt for modelbeskrivelsen, og da det er det simpleste i dette tilfælde, vil vi i det følgende udelukkende arbejde med denne.

Vi betragter nu en revne, som til tiden $t = 0$ er ankommet til positionen $s = s_o$ på den glatte udbredelseskurve K. Vi vil så ved at indsætte modelbeskrivelsen for de i (2.34) indgående størrelser undersøge hvilke revnespidstilstande, som opfylder(2.34), og dermed hvilke tilstande, som i henhold til (2.34) kan give anledning til en fremrykning af revnen.

I første omgang vil vi betragte et rent spændingsrandværdiproblem med konstante ydre laste. I dette tilfælde kan spændingerne i omegnen om den betragtede revnespids skrives, jvnf. resultaterne i [23]

$$\sigma_{ij}(t) = \sigma^{o}_{ij}\, \Delta(t) \tag{2.36}$$

hvor $\Delta(\cdot)$ er Heavisides enhedsfunktion. I omegnen om revnespidsen kan den Helmholtz fri energi $\rho\psi^{i}$ da skrives, jvnf. ligningen (1.92) og (1.94).

$$\rho\psi^{i} = \sigma^{o}_{ij}\, \sigma^{o}_{k\ell}\, K_{ijk\ell}(t) - \frac{1}{2}\, \sigma^{o}_{ij}\, \sigma^{o}_{k\ell}\, K_{ijk\ell}(2t) \tag{2.37}$$

Af Gurtins bevarelseslov (2.25) fås umiddelbart at

$$e_k \oint_{\Gamma} \left(\frac{1}{2}\, \sigma^{o}_{ij}\, \overset{*}{\varepsilon}_{ij}\, n_k - \overset{*}{u}_{i,k}\, \sigma^{o}_{ij}\, n_j \right) ds = 0 \tag{2.38}$$

og dermed

$$e_k \oint_\Gamma \left(\frac{1}{2}\,\sigma^o_{ij}\;\varepsilon_{ij}\;n_k - u_{ijk}\;\sigma^o_{ij}\;n_j\right) ds = 0 \tag{2.39}$$

Heraf ses, at der i dette tilfælde kan formuleres en bevarelseslov som lyder

$$e_k \oint_\Gamma (\rho\psi^i\;n_k - f_{kj}\;n_j)\;ds = 0 \tag{2.40}$$

$$\text{hvor } f_{kj}(t) = (2u_{i,k}(t) - 2u_{i,k}(t))\,\sigma^o_{ij} \tag{2.41}$$

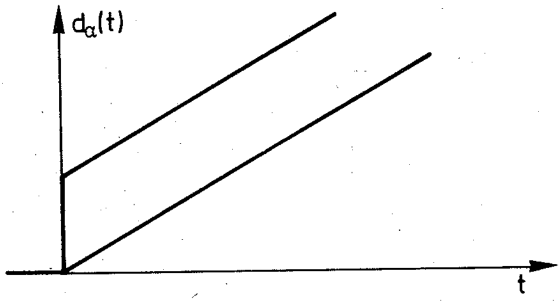
For spændingsrandværdiproblemer med konstante ydre laste kan der altså uden videre formuleres en bevarelseslov af formen (2.35). Ligningen (2.34) kan da opfattes som en udbredelsesbetingelse, som i dette tilfælde får formen

$$e_k \int_\Gamma (\rho\psi^i\;n_k - f_{kj}\;n_j)\;ds = G_{kr} \tag{2.42}$$

Dette integrale kan helt analogt til J-integralet for elastiske materialer, se appendix E, udtrykkes ved intensitetsfaktorerne $k_\alpha = k^o_\alpha\Delta(t)$ og deformationsfaktorerne $d_\alpha = d_\alpha(t)$. Udtrykket (2.42) kan da omskrives til

$$k^o_\alpha(2d_\alpha(t) - d_\alpha(2t)) = \frac{2}{\pi}\;G_{kr} \tag{2.43}$$

Dette er altså det udbredelseskriterium, man kommer til for rene spændingsrandværdiproblemer med konstante ydre laste, hvis man forlanger, at udbredelsesprocessen skal opfylde de termodynamiske betingelser. Det ses let, at det elastiske tilfælde (Griffith's kriterium) fremkommer som et specialtilfælde af (2.43). Desuden kan det også let indses, at tilfælde med rent viscos opførsel, eller både en viscos og elastisk opførsel, d.v.s. hvis $\dot{d}_\alpha$ er konstant for alle $t > 0$, se figur 2.5, ifølge kriteriet (2.43) aldrig kan give anledning til langsom revneudbredelse.

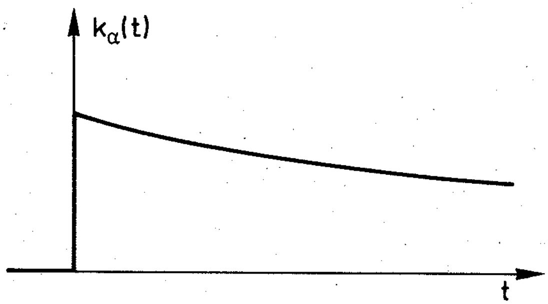


Figur 2.5. Hvis $\dot{d}_\alpha$ er konstant for alle $t > 0$ kan kriteriet (2.43) ikke give anledning til langsom revneudbredelse.

For spændingsrandværdiproblemer med varierende ydre laste og for flytningsrandværdiproblemer eller blandede randværdiproblemer, vil spændingsintensitetsfaktorerne generelt være tidsafhængige for $t > 0$, og kriteriet (2.43) kan derfor i princippet ikke anvendes på sådanne problemer. I mange tilfælde vil det imidlertid være sådan, at intensitetsfaktoren kun ændrer sig forsvindende lidt i løbet af det tidsrum, revnen står stille i en given position, og kriteriet (2.43) vil derfor i disse tilfælde med god tilnærmelse være ensbetydende med opfyldelse af de termodynamiske betingelser.

For flytningsrandværdiproblemer og blandende problemer hvor der må tages hensyn til ændringer af intensitetsfaktorerne i løbet af det tidsrum, revnen står stille i en given position, skal der i det følgende gives to udtryk, som hvis visse betingelser er opfyldt, med god tilnærmelse er ensbetydende med en tilfredsstillelse af de termodynamiske betingelser.

Det vil for flytningsrandværdiproblemer og blandede problemer som oftest være sådan, at spændingsintensitetsfaktorerne har et spring til tiden *) $t = 0$, og derefter numerisk set er stadigt aftagende at t , d.v.s. udviser et relaxationsforløb som skitseret i figur 2.6.



Figur 2.6. Typisk tidsligt forløb for spændingsintensitetsfaktorerne k_α .

Under antagelse af en sådan tidslig variation af spændingsintensitetsfaktorerne er udtrykket

$$W_2^\phi(t) = \frac{1}{2}\,\sigma_{ij}^o\,\sigma_{k\ell}^o\,K_{ijk\ell}(2t) - \\ - \sigma_{ij}^o\sigma_{k\ell}(t)\left(K_{ijk\ell}(2t) - K_{ijk\ell}(t)\right) \qquad (2.44)$$

hvor $\sigma_{ij}^o = \sigma_{ij}(0+)$, en øvreværdi for den Helmholtz fri energi $\rho\psi^i(t)$, se appendix F.

Hvis en øvreværdi som W_2^ϕ skal udnyttes til formulering af et ud-

*) Det antages som tidligere, at revnen ankommer til den betragtede position på udbredelseskurven til tiden $t = 0$.

bredelseskriterium af formen (2.34) , så kræver det bl.a. at hvert led i udtrykket for $W_2^{\emptyset}$ kan skrives som et produkt af et spændingsfelt og det dertil hørende tøjningsfelt. Vi modificerer derfor udtrykket (2.44) ved at indføre

$$\sigma_{ij}^{\tau} = \sigma_{ij}(\tau) \tag{2.45}$$

og

$$\begin{aligned} \varepsilon_{ij}^{\tau\prime}(t) &= \mathscr{K}_{ijk\ell}\, \sigma_{k\ell}^{\tau}\, \Delta(t) \\ &= \sigma_{k\ell}^{\tau}\, K_{ijk\ell}(t) \end{aligned} \tag{2.46}$$

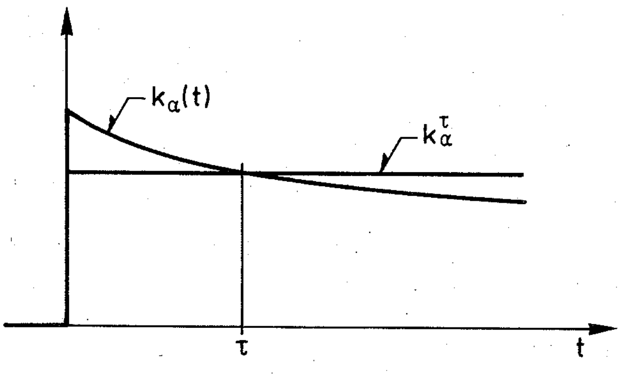
se figur 2.6 . Vi definerer da størrelsen

$$\begin{aligned} W_3^{\emptyset}(t) &= \frac{1}{2}\sigma_{ij}^{o}\,\sigma_{k\ell}^{o}\,K_{ijk\ell}(2t) - \\ &- \sigma_{ij}^{\tau}\,\sigma_{k\ell}^{\tau}\left(K_{ijk\ell}(2t) - K_{ijk\ell}(t)\right) \\ &= \frac{1}{2}\sigma_{ij}^{o}\,\varepsilon_{ij}^{o\prime}(2t) - \sigma_{ij}^{\tau}\,(\varepsilon_{ij}^{\tau\prime}(2t) - \varepsilon_{ij}^{\tau\prime}(t)) \end{aligned} \tag{2.47}$$

som for alle $t \leqq \tau$ opfylder

$$W_2^{\emptyset} \leqq W_3^{\emptyset} \tag{2.48}$$

og dermed er en øvreværdi for den fri energi $\rho\psi^{i}$.



Figur 2.7. Bestemmelse af størrelserne k_α^{τ} .

Lad $u_i^{\tau'}$ være det til spændingerne σ_{ij}^{τ} svarende flytningsfelt. Der kan da analogt til (2.40) ved hjælp af <u>Gurtins bevarelseslov</u> (2.25) formuleres bevarelsesloven

$$v_k \oint_{\Gamma} \left(W_3^{\emptyset} n_k - f_{kj}^{\emptyset 3} n_j \right) ds = 0 \tag{2.49}$$

hvor

$$f_{kj}^{\emptyset 3} = u_{i,k}^{o'}(2t)\ \sigma_{ij}^{o} - 2\left(u_{i,k}^{\tau'}(2t) - u_{i,k}^{\tau'}(t) \right) \sigma_{ij}^{\tau} \tag{2.50}$$

og dermed på grundlag heraf analogt til (2.42) formuleres følgende <u>kriterium</u>

$$e_k \int_{\Gamma_c} \left(w_3^{\emptyset} n_k - f_{kj}^{\emptyset 3} n_j \right) ds = G_{kr} \tag{2.51}$$

som analogt til (2.43) kan udregnes til

$$k_\alpha^o\, d_\alpha^{o'}(2t) - 2k_\alpha^\tau \left(d_\alpha^{\tau'}(2t) - d_\alpha^{\tau'}(t) \right) = \frac{2}{\pi} G_{kr}\,, \qquad t < \tau \tag{2.52}$$

hvor $k_\alpha^\tau = k_\alpha(\tau)$ og hvor $d_\alpha^{\tau'}(t)$ er de til spændingsintensitets-faktorerne $k_\alpha^\tau \Delta(t)$ svarende deformationsfaktorer.

På ganske tilsvarende måde kan der på grundlag af den i appendix F angivne <u>nedreværdi</u> for den fri energi formuleres følgende <u>kriterium</u>

$$k_\alpha^\tau \left(2d_\alpha^{\tau'}(2t) - d_\alpha^{\tau'}(2t) \right) = \frac{2}{\pi} G_{kr}\,, \quad t < \tau \tag{2.53}$$

Det ses let som en kontrol, at både (2.52) og (2.53) giver det samme som (2.43) i tilfælde af konstante spændinger.

Når man i et givet tilfælde benytter et af tilnærmelseskriterierne (2.52) eller (2.53) til bestemmelse af i hvor lang tid Δt revnen står stille i en given position på udbredelseskurven, er det klart, at parameteren τ, for at få den bedst mulige tilnærmelse, bør vælges så den ligger så tæt som muligt på løsningen Δt. Dette kan i praksis gøres ved at regne om én eller to gange.

APPENDIX A

Udregning af $P^i - \dot{K}$

Givet et legeme B, og et indre dellegeme ΔB^i heraf, som til tiden t er defineret over området $\Delta\Omega_t$ med randen $\partial\Delta\Omega_t$. Der gælder da, se ligningerne (1.3), (1.4) og (1.20).

$$P - \dot{K} = \int_{\partial\Delta\Omega_t} \dot{\underset{\sim}{x}} \cdot \underset{\sim}{T}\,\underset{\sim}{n}\,da + \int_{\Delta\Omega_t} \rho\,\dot{\underset{\sim}{x}} \cdot \underset{\sim}{b}\,dv - \left(\tfrac{1}{2}\int_{\Delta\Omega_t} \rho\,\dot{x}^2\,dv\right)^{\bullet} \tag{A.1}$$

Vi kan tænke os en hver kontinuummekanisk størrelse φ angivet i det <u>materielle billede</u> eller i det <u>rumlige billede</u> (Eulerbilledet), således at f.eks.

$$\varphi = F(X,t) \quad , \quad X \in \Delta B^i$$

eller

$$\varphi = f(\underset{\sim}{x},t) \quad , \quad \underset{\sim}{x} \in \Delta\Omega_t$$

Vi har da

$$\left(\int_{\Delta\Omega_t} \rho\,\varphi\,dv\right)^{\bullet} = \left(\int_{\Delta B^i} \varphi\,dm\right)^{\bullet} = \int_{\Delta B^i} \dot{\varphi}\,dm = \int_{\Delta\Omega_t} \rho\,\dot{\varphi}\,dv \tag{A.2}$$

Anvender vi dette på det sidste led i (A.1) fås

$$\left(\tfrac{1}{2}\int_{\Delta\Omega_t} \rho\,\dot{x}^2\,dv\right)^{\bullet} = \int_{\Delta\Omega_t} \rho\,\dot{\underset{\sim}{x}} \cdot \ddot{\underset{\sim}{x}}\,dv \tag{A.3}$$

Indsættes dette samt <u>impulsmomentsætningen</u>

$$\rho\,\ddot{\underset{\sim}{x}} = \operatorname{div}\underset{\sim}{T} + \rho\,\underset{\sim}{b} \tag{A.4}$$

I (A.1) fås

$$P^i - \dot{K} = \int_{\partial\Delta\Omega_t} \dot{\underset{\sim}{x}} \cdot \underset{\sim}{T}\,\underset{\sim}{n}\,da + \int_{\Delta\Omega_t} \rho\,\dot{\underset{\sim}{x}} \cdot \underset{\sim}{b}\,dv - \int_{\Delta\Omega_t} \dot{\underset{\sim}{x}} \cdot (\mathrm{div}\,\underset{\sim}{T} + \rho\,\underset{\sim}{b})\,dv$$

$$= \int_{\partial\Delta\Omega_t} \dot{\underset{\sim}{x}} \cdot \underset{\sim}{T}\,\underset{\sim}{n}\,da - \int_{\Delta\Omega_t} \dot{\underset{\sim}{x}} \cdot \mathrm{div}\,\underset{\sim}{T}\,dv \tag{A.5}$$

Vi får nu brug for identiteten, se Truesdell [17], app. II:

$$\mathrm{div}(\underset{\sim}{T}\,\dot{\underset{\sim}{x}}) = \dot{\underset{\sim}{x}} \cdot \mathrm{div}\,\underset{\sim}{T}^T + \mathrm{tr}(\underset{\sim}{T}\,\mathrm{grad}\,\dot{\underset{\sim}{x}}) \tag{A.6}$$

hvor grad $\dot{\underset{\sim}{x}}$ er den rumlige hastighedsgradient. Af Cauchy-Stokes dekompositionsteorien, se Truesdell [5], [17] eller Wang & Truesdell [13],

$$\mathrm{grad}\,\dot{\underset{\sim}{x}} = \underset{\sim}{D} + \underset{\sim}{W} \tag{A.7}$$

hvor $\underset{\sim}{D}$ er strækningstensoren og W er spintensoren fås da

$$\mathrm{tr}(\underset{\sim}{T}\,\mathrm{grad}\,\dot{\underset{\sim}{x}}) = \mathrm{tr}(\underset{\sim}{T}(\underset{\sim}{D} + \underset{\sim}{W})) = \mathrm{tr}(\underset{\sim}{T}\,\underset{\sim}{D}) \tag{A.8}$$

Det sidste følger bl.a. af, at $\underset{\sim}{T}$ og $\underset{\sim}{D}$ er symmetriske tensorer, medens $\underset{\sim}{W}$ er skæv. Indsættes (A.6) og (A.8) i (A.5), så fås umiddelbart ved anvendelse af divergenssætningen, at

$$P^i - \dot{K} = \int_{\Delta\Omega_t} w\,dv \tag{A.9}$$

hvor

$$w = \mathrm{tr}(\underset{\sim}{T}\,\underset{\sim}{D}) \tag{A.10}$$

APPENDIKS B

Repræsentation af lineær fysisk betingelse.

B.1 Historier

Restriktionen af en funktion $f(\tau)$ til tider τ' ikke større end tiden t kaldes historien af f op til tiden t. Historien betegnes $f^t(s)$ og er defineret ved

$$f^t(s) = f(t - s) \quad , \quad s \in [0;\infty[\tag{B.1}$$

Tidspunktet t tænkes fastholdt. I mekanikken spiller historier en fremtrædende rolle, fordi det er det forgangne og det øjeblikkelige, der bestemmer, hvad der skal ske i fremtiden.

B.2 Riesz's repræsentationssætning

Lad størrelsen g være et begrænset lineært funktional af funktionen $f(x)$, $x \in [a;b]$,

$$g = G\{f(x)\} \tag{B.2}$$

Riesz' repræsentationssætning, se Riesz og Nagy [25] , siger da, at det lineære funktional altid kan repræsenteres af et Riemann- - Stieltjes integral

$$g = \int_a^b f(x) \frac{dw(x)}{dx} dx \tag{B.3}$$

hvor funktionen w er begrænset i $[a;b]$.

B.3 Repræsentation af lineære fysiske betingelser

Lad os nu betragte to kontinuummekaniske størrelser f og g . Vi vil nu udlede den konstitutive ligning for g's afhængighed af f , i det tilfælde at denne antages at være lineær.

Vi antager nu, at størrelsen g er et lineært funktional af historien $f^t(s)$, $s \in [0;[$, altså

$$g(t) = G\{f^t(s)\} \quad , \qquad s \in [0;\infty[\tag{B.4}$$

Af Riesz's repræsentationssætning fås da

$$g(t) = \int_0^\infty f^t(s) \frac{dw(s)}{ds} ds$$

$$= \int_0^t f(t-s) \frac{dw(s)}{ds} ds \tag{B.5}$$

Det vil ofte være sådan, at $g(t)$ er et lineært funktional af den forgangne historie $f_+^t(s) = f^t(s)$ for $s \in]0;\infty[$ og en funktion af den øjeblikkelige værdi $f(t)$. I dette tilfælde fås, hvis afhængigheden skal være lineær,

$$g(t) = w_0 f(t) + \int_{0^+}^\infty f(t-s) \frac{dw(s)}{ds} ds \tag{B.6}$$

Ved partial integration og ved substitutionen $\tau = t-s$ fås af (B.6), idet vi antager, at $\lim_{t\to-\infty} f(t) = 0$

$$g(t) = w_0 f(t) - w(0^+)f(t) + \int_{-\infty}^{t-} w(t-\tau) \frac{df(\tau)}{d\tau} d\tau \tag{B.7}$$

Ved at definere

$$A(t) = w(t) + w_0 - w(0^+) \tag{B.8}$$

fås da

$$g(t) = \mathscr{A}\, f(t)$$

$$= \int_{-\infty}^{t^-} A(t-\tau)\, \frac{df(\tau)}{d\tau}\, d\tau \qquad \text{(B.9)}$$

Hvis $f(t)$ opfylder kravet

$$f(t) = 0 \quad \text{for alle} \quad t < 0 \qquad \text{(B.10)}$$

så fås

$$g(t) = \mathscr{A}\, f(t)$$

$$= \int_{0^-}^{t^-} A(t-\tau)\, \frac{df(\tau)}{d\tau}\, d\tau \qquad \text{(B.11)}$$

Operatoren $\mathscr{A}$ kaldes en stieltjesfoldning med kernen $A(\cdot)$. Vi har hermed vist, at enhver lineær konstitutiv relation mellem to kontinuummekaniske størrelser f og g kan udtrykkes ved en stieltjesfoldning som angivet i (B.9).

APPENDIX C

Udledelse af de konstitutive ligninger for lineært viscoelastisk materiale baseret på Gibbs fri energi.

Vi definerer Gibbs fri energi $\rho\varphi^i$ ud fra Helmholtz fri energi $\rho\psi^i$ og de infinitesimale spændinger og tøjninger ved

$$\rho\varphi^i = \rho\psi^i - \sigma_{ij}\,\varepsilon_{ij} \tag{C.1}$$

Udledelsen af de konstitutive ligninger baseres nu på Gibbs fri energi, idet vi følger idéerne fra udledelsen baseret på Helmholtz fri energi i afsnit 1.6. Udledelsen baseret på Gibbs fri energi svarer i øvrigt til den som er foretaget af Christensen i [16].

Den eneste særlige forskel fra udledelsen i afsnit 1.6 er, at vi her antager, at Gibbs fri energi $\rho\varphi^i(t)$ er et funktional af temperaturafvigelseshistorien $\zeta^t(s)$ og spændingshistorien $\sigma^t_{ij}(s)$, $s \in [0;\ \infty[$.

Det til (1.70) svarende udtryk for Gibbs fri energi er da

$$\begin{aligned}\rho\varphi^i(t) = {} & \int_{0-}^{t-} C^1_{ij}(t-\tau)\,\frac{d\,\sigma_{ij}(\tau)}{d\tau}\,d\tau + \int_{0-}^{t-} C^2(t-\tau)\,\frac{d\,\zeta(\tau)}{d\tau}\,d\tau\ + \\ & + \int_{0-}^{t-}\int_{0-}^{t-} D^{11}_{ijkl}(t-\tau,t-\eta)\,\frac{d\,\sigma_{ij}(\tau)}{d\tau}\,\frac{d\,\sigma_{kl}(\eta)}{d\eta}\,d\tau\,d\eta\ + \\ & + \int_{0-}^{t-}\int_{0-}^{t-} D^{12}_{ij}(t-\tau,t-\eta)\,\frac{d\,\sigma_{ij}(\tau)}{d\tau}\,\frac{d\,\zeta(\eta)}{d\eta}\,d\tau\,d\eta\ + \\ & + \int_{0-}^{t-}\int_{0-}^{t-} D^{22}(t-\tau,t-\eta)\,\frac{d\,\zeta(\tau)}{d\tau}\,\frac{d\,\zeta(\eta)}{d\eta}\,d\tau\,d\eta\end{aligned} \tag{C.2}$$

Indsættes definitionen (C.1) i den reducerede dissipationsulighed (1.71) fås

$$-\rho\dot{\varphi}^{i} - \rho\,\eta^{i}\dot{\zeta} - \dot{\sigma}_{ij}\,\varepsilon_{ij} + \frac{h_i\,\zeta_{,i}}{\theta_o} \geqq 0 \qquad (C.3)$$

Udtrykket (C.2) for den fri energi indsættes nu heri, og helt analogt til udledelsen i afsnit 1.6 fås der herved betingelserne

$$\varepsilon_{ij}(t) = -C^{1}_{ij}(0+) - 2\int_{0-}^{t-} D^{11}_{ijkl}(t-\tau,0+)\,\frac{d\,\sigma_{kl}(\tau)}{d\tau}\,d\tau + \\ - \int_{0-}^{t-} D^{12}_{ij}(0+,t-\tau)\,\frac{d\,\zeta(\tau)}{d\tau}\,d\tau \qquad (C.4)$$

$$\rho\,\eta^{i}(t) = -C^{2}(0+) - 2\int_{0-}^{t-} D^{22}(t-\tau,0+)\,\frac{d\,\zeta(\tau)}{d\tau}\,d\tau + \\ - \int_{0-}^{t-} D^{12}_{ij}(t-\tau,0+)\,\frac{d\,\sigma_{ij}(\tau)}{d\tau}\,d\tau \qquad (C.5)$$

samt

$$\frac{d\,C^{1}_{ij}(t)}{dt} = \frac{d\,C^{2}(t)}{dt} = 0 \qquad (C.6)$$

og

$$\lambda^{i} + \frac{h_i\,\zeta_{,i}}{\theta_o} \geqq 0 \qquad (C.7)$$

hvor λ^{i} er den indre dissipationshastighed givet ved

$$\lambda^{i}(t) = -\int_{0-}^{t-}\int_{0-}^{t-} \frac{\partial}{\partial t} D^{11}_{ijkl}(t-\tau,t-\eta)\,\frac{d\,\sigma_{ij}(\tau)}{d\tau}\,\frac{d\,\sigma_{kl}(\eta)}{d\eta}\,d\tau\,d\eta \;\cdot \\ - \int_{0-}^{t-}\int_{0-}^{t-} \frac{\partial}{\partial t} D^{12}_{ij}(t-\tau,t-\eta)\,\frac{d\sigma_{ij}(\tau)}{d\tau}\,\frac{d\zeta\,(\eta)}{d\eta}\,d\tau\,d\eta + \\ - \int_{0-}^{t-}\int_{0-}^{t-} \frac{\partial}{\partial t} D^{22}(t-\tau,t-\eta)\,\frac{d\,\zeta(\tau)}{d\tau}\,\frac{d\,\zeta(\eta)}{d\eta}\,d\tau\,d\eta \qquad (C.8)$$

Ligningerne (C.4) og (C.5) er de konstitutive ligninger for tøjningerne og den indre entropi. Af (C.4) ses, at funktionen $-D^{11}_{ijkl}(t,0+)$ svarer til krybningsfunktionen $K_{ijk\ell}(t)$ fra den isoterme teori. Antages svarende til (1.89)

$$-2D^{11}_{ijkl}(\tau,\eta) = K_{ijkl}(\tau+\eta) \tag{C.9}$$

så fås, at Gibbs fri energi $\rho\varphi^i$ og den indre dissipationshastighed λ^i under isoterme forhold kan skrives

$$\rho\varphi^i(t) = -\tfrac{1}{2}\int_{0-}^{t-}\int_{0-}^{t-} K_{ijkl}(2t-\tau-\eta)\,\frac{d\,\sigma_{ij}(\tau)}{d\tau}\,\frac{d\,\sigma_{kl}(\eta)}{d\eta}\,d\tau\,d\eta \tag{C.10}$$

$$\lambda^i(t) = \tfrac{1}{2}\int_{0-}^{t-}\int_{0-}^{t-} \frac{\partial}{\partial t}K_{ijkl}(2t-\tau-\eta)\,\frac{d\,\sigma_{ij}(\tau)}{d\tau}\,\frac{d\,\sigma_{kl}(\eta)}{d\eta}\,d\tau\,d\eta \tag{C.11}$$

APPENDIX D

Udledelse af de termodynamiske konstitutive ligninger for lineært viscoelastisk materiale v.h.a. modelrepresentation under antagelse af isoterme forhold.

D.1 Konstitutive basissæt

Lad os for simpelheds skyld betragte en enakset tilstand beskrevet ved sættet (σ,ε) bestående af de to til hinanden svarende spændings- og tøjningsstørrelser $\sigma = \sigma(t)$ og $\varepsilon = \varepsilon(t)$.

Som omtalt i Brincker [23] appendix C *) kan den simple, men relativt generelle konstitutive sammenhæng de to spændings- tøjningsstørrelser σ og ε imellem

$$\sum_{n=0}^{N} p_n \frac{d^n}{dt^n} \sigma(t) = \sum_{m=0}^{M} q_m \frac{d^m}{dt^m} \varepsilon(t) \tag{D.1}$$

$$P(\mathscr{D})\sigma(t) = Q(\mathscr{D})\varepsilon(t) \quad , \quad \mathscr{D} = \frac{d}{dt}$$

opfattes som resultatet af en sammenkobling af et endeligt antal af de to basisbetingelser

$$\sigma = E\varepsilon \quad , \quad E > 0 \tag{D.2}$$

$$\sigma = \eta \frac{d\varepsilon}{dt} \quad , \quad \eta > 0 \tag{D.3}$$

Den første basisbetingelse er betingelsen for et Hookeelement (fjeder) og beskriver en rent lineært elastisk opførsel, og den anden er betingelsen for et Newtonelement (vædskebremse) og beskriver en rent lineær viscos opførsel.

Spændings- og tøjningsrelationen på relaxationsform eller krybningsform

$$\sigma(t) = \mathscr{R}\, \varepsilon(t) \quad , \quad \varepsilon(t) = \mathscr{K}\, \sigma(t) \tag{D.4}$$

*) Sammenkoblingsregler, mekaniske modeller m.v. for de simple fysiske betingelser er omtalt her.

hvor $\mathscr{R}$ og $\mathscr{K}$ er Stieljes foldninger med kernerne $R(\cdot)$ h.h.v. $K(\cdot)$ fastlægges ved bestemmelse af kernerne som løsning til differentialligningerne

$$
\begin{aligned}
&P(\mathscr{D})R(t) = Q(\mathscr{D})\Delta(t) \\
&P(\mathscr{D})\Delta(t) = Q(\mathscr{D})K(t)
\end{aligned}
\tag{D.5}
$$

hvor $\Delta(\cdot)$ er Heavisides enhedsfunktion.

Energibevarelsessætningen og den reducerede dissipationsulighed på lokal form og under antagelse af isoterme forhold findes af ligningerne (1.50), (1.14) og (1.59), samt (1.58) til

$$\rho\dot{\psi}^{i} + \lambda = \sigma\dot{\varepsilon} \tag{D.6}$$

$$\lambda = \sigma\dot{\varepsilon} - \rho\dot{\psi}^{i} \geqq 0 \tag{D.7}$$

Vi vil antage, at det for en Hookebetingelse (D.2) gælder, at dissipationshastigheden λ er identisk med nul. Hermed fås det fuldstændige basissæt af termodynamiske konstitutive ligninger for Hookebetingelsen under isoterme forhold

$$
\begin{aligned}
&\sigma = E\varepsilon \quad , \quad E > 0 \\
&\rho\psi^{i} = \tfrac{1}{2}\sigma\varepsilon \\
&\lambda = 0
\end{aligned}
\tag{D.8}
$$

Tilsvarende fås for Newtonbetingelsen, idet det her antages, at den den Helmholtz fri energi $\rho\psi^{i}$ er identisk nul

$$
\begin{aligned}
&\sigma = \eta\dot{\varepsilon} \quad , \quad \eta > 0 \\
&\rho\psi^{i} = 0 \\
&\lambda = \sigma\dot{\varepsilon}
\end{aligned}
\tag{D.9}
$$

Det ses let, at de to basissæt (D.8) og (D.9) altid opfylder energibevarelsessætningen og dissipationsmuligheden (D.6) og (D.7).

I de næste to afsnit vil vi under antagelse af isoterme forhold udlede de konstitutive ligninger for den fri energi og dissipationshastigheden for et materiale hvis spændings- tøjningsrelation kan opfattes som dannet ved sammenkobling af et endeligt antal basiselementer. I det første afsnit tages der udgangspunkt i en parallelkobling af Maxwellbetingelser, og i det næste i en seriekobling af Kelvinbetingelser. Udledelsen følger stort set tankegangen i Staverman og Schwartzl's originale artikel [2].

D.2 Parallelkobling af Maxwellbetingelser

En Maxwellbetingelse er en seriekobling af basisbetingelserne (D.8) og (D.9), og det konstitutive sæt findes let til

$$\frac{1}{\eta}\sigma + \frac{1}{E}\dot{\sigma} = \dot{\varepsilon}$$

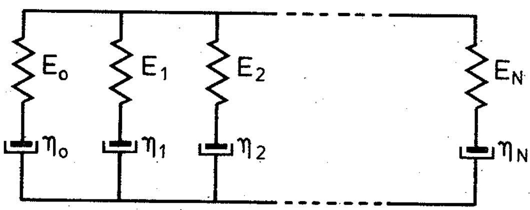
$$\rho\psi^{i} = \frac{\sigma^2}{2E} \tag{D.10}$$

$$\lambda = \frac{1}{\eta}\sigma^2$$

Maxwellbetingelsens relaxationsfunktion er

$$R(t) = E\, e^{-\mu t}\, \Delta(t) \quad , \quad \mu = \frac{E}{\eta} \tag{D.11}$$

Vi vil nu udlede de konstitutive ligninger for en parallelkobling af et endeligt antal Maxwellelementer. Vi vil antage, at der er tale om et faststof, hvorfor vi vil antage, at en af viscositeterne er uendelig, se fig. D.1.



Figur D.1. Mekanisk model af parallelkobling af N+1 Maxwellelementer.

Vi betragter da en parallelkobling af betingelserne

$$\left.\begin{aligned}
&\sigma_o = E_o\,\varepsilon_o \\
&\rho\psi_o^i = \frac{\sigma_o^2}{2E_o} \\
&\lambda_o = 0 \\
&\text{samt for } n = 1,2,\cdots, N \\
&\frac{1}{\eta_n}\,\sigma_n + \frac{1}{E_n}\,\dot{\sigma}_n = \dot{\varepsilon}_n \\
&\rho\psi_n^i = \frac{\sigma_n^2}{2E_n} \\
&\lambda_n = \frac{1}{\eta_n}\,\sigma^2
\end{aligned}\right\} \quad (D.12)$$

Spændings- tøjningsrelationen er

$$\left.\begin{aligned}
&\sigma(t) = \mathscr{R}\,\varepsilon(t) \\
&\text{hvor} \\
&R(t) = E_o\,\Delta(t) + \sum_{n=1}^{N} R_n(t) \\
&\quad = \left(E_o + \sum_{n=1}^{N} E_n e^{-\mu_n t}\right)\Delta(t) \quad , \quad \mu_n = \frac{E_n}{\eta_n}
\end{aligned}\right\} \quad (D.13)$$

Den totale fri energi $\rho\psi^i$ og den totale dissipationshastighed λ bestemmes ved addition af bidragene fra den enkelte Maxwellelementer, og der fås

$$\rho\psi^i = \tfrac{1}{2}E_o\varepsilon^2 + \tfrac{1}{2}\sum_{n=1}^{N}\frac{\sigma_n^2}{E_n}$$

$$= \tfrac{1}{2}E_o\varepsilon^2 + \tfrac{1}{2}\sum_{n=1}^{N} E_n \int_{o-}^{t-}\int_{o-}^{t-} e^{-\mu_n(t-\tau)}e^{-\mu_n(t-\eta)}\frac{d\varepsilon(\tau)}{d\tau}\,\frac{d\varepsilon(\eta)}{d\eta}\,d\tau d\eta$$

$$= \tfrac{1}{2}E_o\varepsilon^2 + \tfrac{1}{2}\int_{o-}^{t-}\int_{o-}^{t-} \sum_{n=1}^{N} E_n e^{-\mu_n(2t-\tau-\eta)} \frac{d\varepsilon(\tau)}{d\tau}\frac{d\varepsilon(\eta)}{d\eta}\, d\tau d\eta$$

$$= \tfrac{1}{2}\int_{o-}^{t-}\int_{o-}^{t-} R(2t-\tau-\eta)\frac{d\varepsilon(\tau)}{d\tau}\frac{d\varepsilon(\eta)}{d\eta}\, d\tau d\eta \qquad (D.14)$$

$$\lambda = \sum_{n=1}^{N} \frac{\sigma_n^2}{\eta_n}$$

$$= \sum_{n=1}^{N} \frac{E_n^2}{\eta_n}\int_{o-}^{t-}\int_{o-}^{t-} e^{-\mu_n(t-\tau)} e^{-\mu_n(t-\eta)}\frac{d\varepsilon(\tau)}{d\tau}\frac{d\varepsilon(\eta)}{d\eta}\, d\tau d\eta$$

$$= \sum_{n=1}^{N} \frac{E_n}{\eta_n}\int_{o-}^{t-}\int_{o-}^{t-} E_n e^{-\mu_n(2t-\tau-\eta)}\frac{d\varepsilon(\tau)}{d\tau}\frac{d\varepsilon(\eta)}{d\eta}\, d\tau d\eta$$

$$= -\tfrac{1}{2}\int_{o-}^{t-}\int_{o-}^{t-} \frac{\partial}{\partial t} R(2t-\tau-\eta)\frac{d\varepsilon(\tau)}{d\tau}\frac{d\varepsilon(\eta)}{d\eta}\, d\tau d\eta \qquad (D.15)$$

Det kontrolleres let, at (D.14) og (D.15) tilfredsstiller energibevarelsessætningen (D.6).

D.3 Seriekobling af Kelvinbetingelser

En Kelvinbetingelse er en parallelkobling af de to basisbetingelser (D.8) og (D.9), og det konstitutive sæt findes let til

$$\sigma = E\varepsilon + \eta\dot{\varepsilon}$$

$$\rho\psi^i = \tfrac{1}{2}E\varepsilon^2 \qquad (D.16)$$

$$\lambda = \eta\dot{\varepsilon}^2$$

Kelvinbetingelsens krybningsfunktion er

$$K(t) = \frac{1}{E}(1-e^{-\mu t}), \quad \mu = \frac{E}{\eta} \qquad (D.17)$$

Vi vil nu udlede de konstitutive ligninger for en seriekobling af et endeligt antal Kelvinelementer. Vi vil antage, at der er tale om et stof med en begyndelsesværdi for krybningsfunktionen, som er større end nul, og vi vil derfor antage, at en af viscositeterne er nul, se figur D.2.

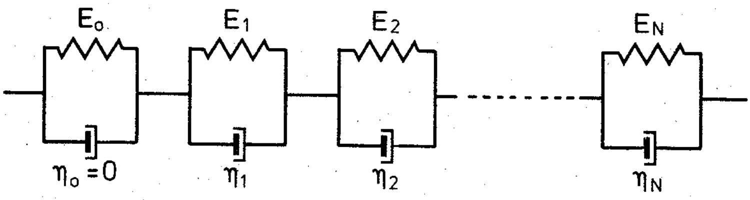


Fig. D.2. Mekanisk model af en seriekobling af N + 1 Kelvinbetingelser.

Vi betragter altså en seriekobling af betingelserne

$$\left.\begin{aligned}
&\sigma_o = E_o \, \varepsilon_o \\
&\rho\psi_o^i = \frac{\sigma_o^2}{2E_o} \\
&\lambda_o = 0 \\
&\text{samt for } n = 1,2,\cdots,N \\
&\sigma_n = E_n \varepsilon + \eta_n \dot{\varepsilon} \\
&\rho\psi_n^i = \tfrac{1}{2} E_n \, \varepsilon_n^2 \\
&\lambda_n = \eta_n \, \dot{\varepsilon}_n^2
\end{aligned}\right\} \quad (D.18)$$

Spændings- tøjningsrelationen er

$$\varepsilon(t) = \mathscr{K}\,\sigma(t)$$

hvor

$$K(t) = \frac{1}{E_o}\,\Delta(t) + \sum_{n=1}^{N} K_n(t)$$

$$= \left(\frac{1}{E_o} + \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{E_n}(1 - e^{-\mu_n t})\right)\Delta(t)\,,\mu_n = \frac{E_n}{\eta_n} \qquad \text{(D.19)}$$

Den totale fri energi $\rho\psi^i$ og den totale dissipationshastighed λ bestemmes ved addition af bidragene fra de enkelte Kelvinelementer.

Vi vil først bestemme bidraget for det n'te Kelvinelement, $n = 1,2,\cdots, N$

$$\rho\psi_n^i = \tfrac{1}{2}E_n\ \varepsilon_n^2$$

$$= \frac{1}{2E_n} \int_{o-}^{t-}\int_{o-}^{t-} (1 - e^{-\mu_n(t-\tau)})(1 - e^{-\mu_n(t-\eta)})\ \frac{d\sigma(\tau)}{d\tau}\ \frac{d\sigma(\eta)}{d\eta}\ d\tau d\eta$$

$$= \frac{\sigma^2}{2E_n} - \frac{\sigma}{E_n}\int_{o-}^{t-} e^{-\mu_n(t-\tau)}\ \frac{d\sigma(\tau)}{d\tau}\ d\tau\ +$$

$$+ \frac{1}{2E_n}\int_{o-}^{t-}\int_{o-}^{t-} e^{-\mu_n(t-\tau)}e^{-\mu_n(t-\eta)}\ \frac{d\sigma(\tau)}{d\tau}\ \frac{d\sigma(\eta)}{d\eta}\ d\tau d\eta$$

$$= \frac{\sigma}{E_n}\int_{o-}^{t-} (1 - e^{-\mu_n(t-\tau)})\ \frac{d\sigma(\tau)}{d\tau}\ d\tau\ +$$

$$- 1\ \frac{1}{2E_n}\int_{o-}^{t-}\int_{o-}^{t-} (1 - e^{-\mu_n(2t-\tau-\eta)})\ \frac{d\sigma(\tau)}{d\tau}\ \frac{d\sigma(\eta)}{d\eta}\ d\tau d\eta$$

$$= \sigma\ \varepsilon_n - \tfrac{1}{2}\int_{o-}^{t-}\int_{o-}^{t-} K_n(2t - \tau - \eta)\ \frac{d\sigma(\tau)}{d\tau}\ \frac{d\sigma(\eta)}{d\eta}\ d\tau d\eta \qquad \text{(D.20)}$$

og dermed

$$\rho\psi^{i} = \frac{\sigma^2}{2E_o} + \sum_{n=1}^{N} \sigma\, \varepsilon_n - \tfrac{1}{2} \sum_{n=1}^{N} \int_{o-}^{t-} \int_{o-}^{t-} K_n(2t - \tau - \eta) \frac{d\sigma(\tau)}{d\tau} \frac{d\sigma(\eta)}{d\eta}\, d\tau d\eta$$

$$= \sigma\, \varepsilon - \tfrac{1}{2} \int_{o-}^{t-} \int_{o-}^{t-} K(2t - \tau - \eta) \frac{d\sigma(\tau)}{d\tau} \frac{d\sigma(\eta)}{d\eta}\, d\tau d\eta \qquad \text{(D.21)}$$

Tilsvarende findes for dissipationshastigheden, idet

$$\dot{\varepsilon}_n = \frac{d}{d\tau} \int_{o-}^{t} K_n(t - \tau) \frac{d\sigma(\tau)}{d\tau}\, d\tau$$

$$= \int_{o-}^{t} \frac{\partial}{\partial t} K_n(t - \tau) \frac{d\sigma(\tau)}{d\tau}\, d\tau$$

$$= \frac{1}{\eta_n} \int_{o-}^{t} e^{-\mu_n(t-\tau)} \frac{d\sigma(\tau)}{d\tau}\, d\tau \qquad \text{(D.22)}$$

at

$$\lambda_n = \frac{1}{\eta_n} \dot{\varepsilon}_n^2$$

$$= \frac{1}{\eta_n} \int_{o-}^{t} \int_{o-}^{t} e^{-\mu_n(t-\tau)} e^{-\mu_n(t-\eta)} \frac{d\sigma(\tau)}{d\tau} \frac{d\sigma(\eta)}{d\eta}\, d\tau d\eta$$

$$= \frac{1}{\eta_n} \int_{o-}^{t} \int_{o-}^{t} e^{-\mu_n(2t - \tau - \eta)} \frac{d\sigma(\tau)}{d\tau} \frac{d\sigma(\eta)}{d\eta}\, d\tau d\eta$$

$$= \frac{1}{\eta_n} \int_{o-}^{t} \int_{o-}^{t} \frac{\partial}{\partial t} \frac{\eta_n}{2E_n}\left(1 - e^{-\mu_n(2t - \tau - \eta)}\right) \frac{d\sigma(\tau)}{d\tau} \frac{d\sigma(\eta)}{d\eta}\, d\tau d\eta$$

$$= \tfrac{1}{2} \int_{o-}^{t} \int_{o-}^{t} \frac{\partial}{\partial t} K_n(2t - \tau - \eta) \frac{d\sigma(\tau)}{d\tau} \frac{d\sigma(\eta)}{d\eta}\, d\tau d\eta \qquad \text{(D.23)}$$

og dermed

$$\lambda = \tfrac{1}{2} \sum_{n=1}^{N} \int_{0-}^{t} \int_{0-}^{t} \frac{\partial}{\partial t} K_n(2t - \tau - \eta) \frac{d\sigma(\tau)}{d\tau} \frac{d\sigma(\eta)}{d\eta} \, d\tau d\eta$$

$$= \tfrac{1}{2} \int_{0-}^{t} \int_{0-}^{t} \frac{\partial}{\partial t} K(2t - \tau - \eta) \frac{d\sigma(\tau)}{d\tau} \frac{d\sigma(\eta)}{d\eta} \, d\tau d\eta \qquad \text{(D.24)}$$

Det kontrolleres også her let, at (D.21) og (D.24) tilfredsstiller energibevarelsessætningen (D.6).

<u>Gibbs fri energi</u> $\rho\varphi^i$ er defineret ved

$$\rho\varphi^i = \rho\psi^i - \sigma \cdot \varepsilon \qquad \text{(D.25)}$$

og udtrykket for <u>Gibbs fri energi</u> findes da umiddelbart af (D.21) til

$$\rho\varphi^i = -\tfrac{1}{2} \int_{0-}^{t} \int_{0-}^{t} K(2t - \tau - \eta) \frac{d\sigma(\tau)}{d\tau} \frac{d\sigma(\eta)}{d\eta} \, d\tau d\eta \qquad \text{(D.26)}$$

D.4 Generel anisotropi

Udtrykkene for den fri energi og dissipationshastigheden, som i det forrige afsnit er udledt for enaksede tilstande, kan relativt let generaliseres til det tredimensionale tilfælde.

Betragtes den generelle spændings- tøjningsrelation

$$\sigma_{ij} = \int_{0-}^{t} R_{ijkl}(t - \tau) \frac{d\,\varepsilon_{kl}(\tau)}{d\tau} \, d\tau$$

$$= E^{o}_{ijkl} \, \varepsilon_{kl} + \sum_{n=1}^{N} E^{n}_{ijkl} \int_{0-}^{t} e^{-\mu_n(t-\tau)} \frac{d\,\varepsilon_{kl}(\tau)}{d\tau} \, d\tau \qquad \text{(D.27)}$$

hvor den ijkl'te relaxationsfunktion $R_{ijkl}(\cdot)$ opfattes som <u>relaxationsfunktionen</u> for en <u>parallelkobling</u> af et endeligt antal <u>Maxwell-betingelser</u>, så kan det indses, at den fri energi kan skrives som

$$\rho\psi^{i} = \tfrac{1}{2}C^{o}_{ijkl}\ \sigma^{o}_{ij}\ \sigma^{o}_{ij} + \tfrac{1}{2}\sum_{n=1}^{N} C^{n}_{ijkl}\ \sigma^{n}_{ij}\ \sigma^{n}_{kl} \tag{D.28}$$

hvor de formelle spændinger σ^{n}_{ij} er defineret ved

$$\begin{aligned} \sigma^{o}_{ij} &= E^{o}_{ijkl}\ \varepsilon_{kl} \\ \sigma^{n}_{ij} &= E^{n}_{ijkl} \int_{o-}^{t} e^{-\mu_n(t-\tau)} \frac{d\ \varepsilon_{kl}(\tau)}{d\tau}\, d\tau\ ,\quad n = 1,2,\cdots,N \end{aligned} \tag{D.29}$$

og C^{n}_{ijkl} , $n = 1,2,\cdots,N$ er de kartetiske komponenter for tensoren $\underset{\sim}{C}_n$ defineret ved

$$\underset{\sim}{C}_n = \underset{\sim}{E}_n^{-1} \tag{D.30}$$

hvor $\underset{\sim}{E}_n$ er en fjerdeordens tensor med de kartetiske komponenter E^{n}_{ijkl}.

Ved hjælp af (D.28) udledes da som for det enaksede tilfælde relativt let

$$\rho\psi^{i} = \tfrac{1}{2}\int_{o-}^{t}\int_{o-}^{t} R_{ijkl}(2t-\tau-\eta)\ \frac{d\ \varepsilon_{ij}(\tau)}{d\tau}\ \frac{d\ \varepsilon_{kl}(\eta)}{d\eta}\ d\tau d\eta \tag{D.31}$$

og

$$\lambda = -\tfrac{1}{2}\int_{o-}^{t}\int_{o-}^{t} \frac{\partial}{\partial t} R_{ijkl}(2t-\tau-\eta)\ \frac{d\ \varepsilon_{ij}(\tau)}{d\tau}\ \frac{d\ \varepsilon_{kl}(\eta)}{d\eta}\ d\tau d\eta \tag{D.32}$$

På ganske tilsvarende måde kan den fri energi og dissipationshastigheden findes ud fra spændingerne, idet den ijkl'te <u>krybningsfunktion</u> opfattes som krybningsfunktionen for en <u>seriekobling</u> af et endeligt antal <u>Kelvinbetingelser</u>

$$\rho\psi^{i} = \sigma_{ij}\ \varepsilon_{ij} - \tfrac{1}{2}\int_{o}^{t}\int_{o-}^{t} K_{ijkl}(2t-\tau-\eta)\ \frac{d\ \sigma_{ij}(\tau)}{d\tau}\ \frac{d\ \sigma_{kl}(\eta)}{d\eta}\ d\tau d\eta \tag{D.33}$$

og

$$\lambda = \tfrac{1}{2} \int_{o-}^{t} \int_{o-}^{t} \frac{\partial}{\partial t} K_{ijkl}(2t - \tau - \eta) \frac{d\,\sigma_{ij}(\tau)}{d\tau} \frac{d\,\sigma_{kl}(\eta)}{d\eta}\, d\tau d\eta \tag{D.34}$$

D.5 Generelle netværk af betingelser

De foregående overvejelser har været baseret på to specielle netværkskonstruktioner, nemlig en parallelkobling af Maxwellbetingelser og en seriekobling af Kelvinbetingelser.

Vi vil nu betragte et vilkårligt netværk af basisbetingelserne (D.8) og (D.9). Som Staverman og Schwartzl bemærker i deres artikel [2], må det undersøges, om de termodynamiske egenskaber altid er entydigt fastlagt ved relaxationsfunktionen og krybningsfunktionen. Det er nemlig en kendsgerning, at der kan konstrueres forskellige netværker, som har samme ydre mekaniske egenskaber, d.v.s samme relaxationsfunktion og krybningsfunktion, og det er jo ikke af denne grund sikkert, at disse forskellige netværker repræsenterer de samme termodynamiske egenskaber.

Staverman og Schwartzl betragter netværket som et mekanisk system snarere end som her et algebraisk system af betingelser, og de viser, at to forskellige systemer ikke altid er termodynamisk ækvivalente, hvis de er mekanisk ækvivalente, med mindre der stilles visse fysiske betingelser til de led, som kæder de forskellige fjedre og vædskebremser sammen i den mekaniske model.

Disse ekstrabetingelser til sammenkædningsleddene i den mekaniske model, som Staverman og Schwartzl opstiller, svarer helt til de algebraiske sammenkoblingsbetingelser, som er omtalt i Brincker [23].

Det kan derfor konkluderes, at hvis den fysiske betingelse for sammenhængen mellem spændinger og tøjninger er opbygget algebraisk ved hjælp af basisbetingelserne (D.2) og (D.3), som omtalt i Brincker [23], så vil to mekanisk ækvivalente netværk altid være termodynamisk ækvivalente; d.v.s. at de termodynamiske egenskaber altid er entydigt fastlagt ved relaxationsfunktionerne eller krybningsfunktionerne, og at de termodynamiske egenskaber derfor altid er givet ved (D.31) og (D.32), samt (D.33) og (D.34).

APPENDIX E

J-integralet for elastiske materialer.

Vi vil nu udlede udtrykket for J-integralet for plane isoterme revneproblemer i elastiske legemer under antagelse af infinitesimale tøjninger. Udledelsen følger stort set Rice [8] og Hutchinson [10] .

Vi vil tage udgangspunt i den formulering af energibevarelsessætningen , som er givet i (2.14) , som for et elastisk materiale hvor $\Lambda^i \equiv 0$, får formen

$$P^i - \dot{K} = \dot{\Psi}^i = v\, G_{kr} \tag{E.1}$$

Lad det betragtede legeme være defineret over området Ω i planen. Vi får da , se ligning (1.44)

$$P^i - \dot{K} = \int_\Omega \sigma_{ij}\, \dot{\varepsilon}_{ij}\, da \tag{E.2}$$

$$\Psi^i = \int_\Omega W\, da \;,\; W = \rho\psi^i \tag{E.3}$$

hvor tøjningsenergitætheden W opfylder

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial W}{\partial \varepsilon_{ij}} \tag{E.4}$$

Vi vil først udlede en bevarelseslov for quasistatiske *) forhold. Lad Γ være randen for et delområde Ω_Γ af Ω . Idet vi bru-

---

*) Der kan udledes en tilsvarende bevarelseslov for ikke quasistatiske forhold, se Gurtin [15].

ger (E.4), divergensretningen, ligevægtsligningerne, og sammenhængen mellem tøjningsfelt og flytningsfelt fås, at der for en vilkårlig fast enhedsvektor $\underset{\sim}{e}$ gælder

$$\begin{aligned}
\underset{\sim}{e} \cdot \oint_{\Gamma} W \underset{\sim}{n}\, ds &= \oint_{\Gamma} (W\underset{\sim}{e}) \cdot \underset{\sim}{n}\, ds \\
&= e_k \int_{\Omega_\Gamma} W_{,k}\, da \\
&= e_k \int_{\Gamma} \sigma_{ij}\, \varepsilon_{ij,k}\, da \\
&= e_k \int_{\Omega_\Gamma} (\sigma_{ij}\, u_{i,k})_{,j}\, da \\
&= e_k \oint_{\Gamma} u_{i,k}\, \sigma_{ij}\, n_j\, ds \\
&= e \cdot \oint_{\Gamma} \nabla \underset{\sim}{u}^T \underset{\sim}{\Sigma}\, \underset{\sim}{n}\, ds
\end{aligned} \tag{E.5}$$

hvor $\nabla\underset{\sim}{u}$ er gradienten af flytningsvektoren, $\underset{\sim}{\Sigma}$ er spændingstensoren, og $\underset{\sim}{n}$ er en enhedsnormal til den lukkede kurve Γ. For en hver lukket kurve Γ i Ω gælder altså følgende bevarelseslov

$$\underset{\sim}{e} \cdot \oint_{\Gamma} (W\underset{\sim}{n} - \nabla\underset{\sim}{u}^T\, \underset{\sim}{\Sigma}\, \underset{\sim}{n})\, ds = 0 \tag{E.6}$$

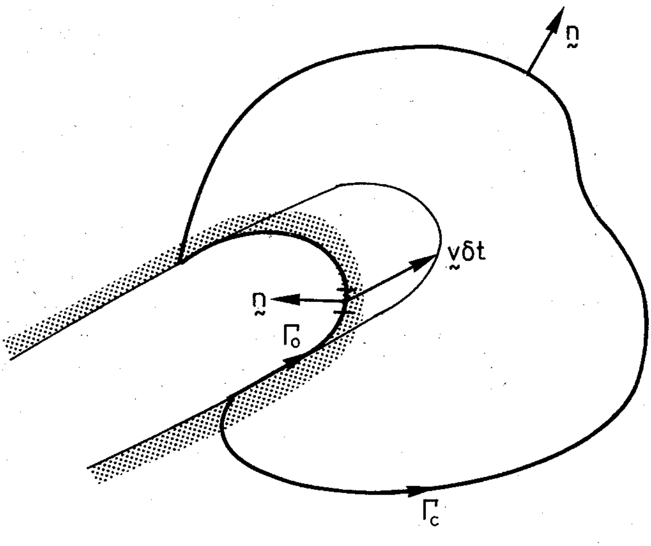
Herefter vil vi nu bruge venstresiden i (E.1). Idet området Ω afhænger af positionen $s_o = s_o(t)$ for den betragtede revnespids på udbredelseskurven fås

$$P^i - \dot{K} - \dot{\Psi}^i = \int_{\Omega} \sigma_{ij}\, \dot{\varepsilon}_{ij}\, da - \frac{d}{dt} \int_{\Omega(s_o(t))} W\, da \tag{E.7}$$

Det sidste led er lidt vanskeligt at udregne. For en hver "revne" af endelig bredde, som udbreder sig i materialet med hastigheden $\underset{\sim}{v}$, se figur E.1, gælder imidlertid

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega(s_o(t))} W \, da = \int_{\Omega} \dot{W} \, da + \underset{\sim}{v} \cdot \int_{\Gamma_o} W\underset{\sim}{n} \, ds \tag{E.8}$$

hvor $\underset{\sim}{n}$ er den udadrettede enhedsnormal til "revneranden" , og hvor Γ_o er en kurve ,som løber langs den betragtede "revnes" overflade fra et punkt på den ene side til et punkt på den anden side af revnen.



Figur E.1. "Revne" af endelig bredde, samt kurverne Γ_o og Γ_i .

Lad nu Γ_c være en kurve, som forløber gennem indre punkter i Ω fra et punkt på den ene side til et punkt på den anden side af "revnen", sådan at vi kan definere den lukkede kurve $\Gamma = \Gamma_o \cup \Gamma_c$.

Antages så, at revneranden er spændingsfri, så fås af (E.6) og (E.8) at

$$\frac{d}{dt}\int_{\Omega} W \, da = \int_{\Omega} \dot{W} \, da - \underset{\sim}{v} \cdot \int_{\Gamma_c} (W\underset{\sim}{n} - \nabla \underset{\sim}{u}^T \underset{\approx}{\Sigma} \underset{\sim}{n}) \, ds \tag{E.9}$$

Indsættes dette i den globale energibevarelsesbetingelse (E.1), så fås ved anvendelse af energibevarelsessætningen på lokal form, idet den indre dissipation er nul, betingelsen

$$\underset{\sim}{e} \cdot \int_{\Gamma_c} (W\underset{\sim}{n} - \nabla \underset{\sim}{u}^T \underset{\approx}{\Sigma} \underset{\sim}{n}) = G_{kr} \tag{E.10}$$

hvor $\underset{\sim}{e}$ er en enhedsvektor i revneudbredelsens retning. Da udtrykket (E.10) gælder for en hver "revne" af endelig bredde og en hver kurve Γ_c, som omslutter enden af "revnen", så sluttes heraf, at udtrykket også gælder i grænsen for bredden gående mod nul, og altså også for skarpe revner, se Rice [24].

For en hver revnespids kan vi altså definere J-integralet

$$J = \int_{\Gamma_c} (W\underset{\sim}{n} - \nabla \underset{\sim}{u}^T \underset{\approx}{\Sigma} \underset{\sim}{n}) \, ds \; , \tag{E.11}$$

og den globale energibalanceligning (E.1) får da formen

$$J = G_{kr} \tag{E.12}$$

Dette udtryk fastlægger mængden af de tilstande, som kan give anledning til revneudbredelse, og udgør derfor et udbredelseskriterium for elastiske materialer.

Det er velkendt, at J-integralet for lineært elastiske materialer kan udregnes til

$$J = \frac{\pi}{8} \frac{\alpha+1}{\mu} \left(k_1^2 + k_2^2\right) \tag{E.13}$$

hvor μ er forskydningsmodulen og k_1 , k_2 er de elastiske spændingsintensitetsfaktorer. Størrelsen α er defineret ved at

$$\frac{\alpha+1}{8\mu} = \begin{cases} \dfrac{1-\nu^2}{E} & \text{for plan def. tilst.} \\ \dfrac{1}{E} & \text{for plan spænd. tilst.} \end{cases} \tag{E.14}$$

Der henvises i øvrigt til M. Gurtin [20] , hvor der er givet en mere stringent udledelse af udtrykket for J-integralet end den der er givet her, også gældende for tilfælde med endelige tøjninger. Det understreges desuden her, hvad der også fremgår af ovenstående udledelse, at J-integralet kun er vejuafhængigt såfremt den betragtede revne er retlinet omkring revnespidsen.

APPENDIX F

Tilnærmelser til den fri energi.

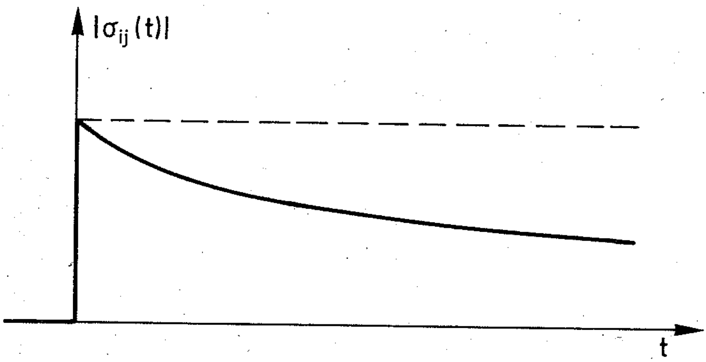
I det følgende vil vi angive nogle tilnærmelser til den fri energi $\rho\psi^{i}(t)$ i det tilfælde hvor spændingerne $\sigma_{ij} = \sigma_{ij}(t)$ kan skrives

$$\sigma_{ij}(t) = \sigma^{o}_{ij}\ \Delta(t) - \sigma^{1}_{ij}(t) \tag{F.1}$$

hvor $\Delta(\cdot)$ er Heavisides enhedsfunktion, og hvor funktionen $\sigma^{1}_{ij}(t)$ er nul for $t = 0$, og i øvrigt opfylder betingelsen

$$\frac{\partial}{\partial t}\ |\sigma^{o}_{ij}\Delta(t) - \sigma^{1}_{ij}(t)| \leqq 0 \tag{F.2}$$

for alle $t \in\ ]0;\infty[$.



Figur F.1. De betragtede spændingshistorier $|\sigma_{ij}(t)|$ har et spring til tiden $t = 0$ og er ikke-voksende for $t\in]0;\infty[$.

De tilsvarende tøjninger findes af

$$\varepsilon_{ij}(t) = \mathscr{K}_{ijk\ell}\, \sigma_{k\ell}(t)$$

$$= K_{ijk\ell}(t)\, \sigma^{o}_{k\ell} - \varepsilon^{1}_{ij}(t) \qquad (F.3)$$

hvor

$$\varepsilon^{1}_{ij}(t) = \mathscr{K}_{ijk\ell}\, \sigma^{1}_{k\ell}(t) \qquad (F.4)$$

hvor $\mathscr{K}_{ijk\ell}$ er en <u>Stieltjesfoldning</u> med krybingskernen $K_{ijk\ell}(\cdot)$. Den tilsvarende relaxationskerne er $R_{ijk\ell}(\cdot)$. Vi tager udgangspunkt i udtrykkene (1.92) og (1.94), som udtrykker den fri energi $\rho\psi^{i}$ ved spændingerne

$$\rho\psi^{i}(t) = \sigma_{ij}\, \mathscr{K}_{ijk\ell}\sigma_{k\ell} + $$

$$- \frac{1}{2} \int_{o-}^{t} \int_{o-}^{t} K_{ijk\ell}(2t-\tau-\eta)\, \frac{d\sigma_{ij}(\tau)}{d\tau}\, \frac{d\sigma_{k\ell}(\eta)}{d\eta}\, d\tau d\eta \qquad (F.5)$$

F.1. Øvreværdier for den fri energi.

Lad os først betragte et éndimensionalt problem. Den fri energi udtrykt ved spændingerne er da

$$\rho\psi^{i}(t) = \sigma\, \mathscr{K}\, \sigma - \frac{1}{2} \int_{o-}^{t} \int_{o-}^{t} K(2t-\tau-\eta)\, \frac{d\sigma(\tau)}{d\tau}\, \frac{d\sigma(\eta)}{d\eta}\, d\tau d\eta \qquad (F.6)$$

Først bestemmer vi en øvreværdi for det sidste led i (F.6). Ved at tilnærme udtrykket

$$- \rho\varphi^{i}(t) = \frac{1}{2} \int_{0-}^{t} \int_{0-}^{t} K(2t-\tau-\eta) \left(\sigma^{o}\delta(\tau) + \right.$$

$$\left. - \frac{d\sigma^{1}(\tau)}{d\tau}\right) \left(\sigma^{o}\delta(\eta) - \frac{d\sigma^{1}(\eta)}{d\eta}\right) d\tau d\eta \qquad (F.7)$$

med udtrykket

$$U_1^n = \frac{1}{2} K(2t) \; (\sigma^{o})^2 + \frac{1}{2} \sigma^1 \int_{0-}^{t} K(t-\tau) \frac{d\sigma^1(\tau)}{d\tau} d\tau +$$

$$- \sigma^{o} K(2t) \sigma^1 \qquad (F.8)$$

for hvilket det for alle t $\geqq$ gælder at

$$U_1^n \leqq - \rho\varphi^{i} \qquad (F.9)$$

så kan det ved nogle omskrivninger af (F.7), bl.a. ved anvendelse af (F.1) , (F.3) og (F.4) , ses at der kan defineres følgende øvreværdi for den fri energi

$$W_1^{\emptyset} = \sigma \varepsilon - \frac{1}{2} \sigma^{o}\sigma K(2t) + \frac{1}{2} (\sigma^{o} - \sigma) (\sigma^{o}K(2t) + \varepsilon - \sigma^{o}K(t)) \qquad (F.10)$$

hvor $\sigma = \sigma(t)$ og $\varepsilon = \varepsilon(t)$. Det ses let, at $W_1^{\emptyset}$ passer eksakt i grænserne $t \to 0$ og $t \to \infty$. Udtrykket kan yderligere tilnærmes ved at erstatte $\varepsilon = \varepsilon(t)$ med $\sigma^{o}K(t)$. Herved fås øvreværdien

$$W_2^{\emptyset} = \frac{1}{2} (\sigma^{o})^2 K(2t) - \sigma^{o}\sigma (K(2t) - K(t)) \qquad (F.11)$$

Dette udtryk passer kun eksakt i grænsen $t \to 0$, men er for moderat relaxerende spændinger en god tilnærmelse for passende små værdier af t.

Det til (F.11) svarende udtryk for det tredimensionale tilfælde er

$$W_2^{\emptyset} = \frac{1}{2}\,\sigma_{ij}^{o}\,\sigma_{k\ell}^{o}\,K_{ijk\ell}(2t) - \sigma_{ij}^{o}\,\sigma_{k\ell}\Big(K_{ijk\ell}(2t) - K_{ijk\ell}(t)\Big) \tag{F.12}$$

F.2. Nedreværdier for den fri energi.

Det er under de givne antagelser meget nemt at bestemme en nedreværdi for den fri energi $\rho\psi^{i}$. Det ses umiddelbart, at det for alle $t \geq 0$ gælder at

$$\sigma_{ij}\,\sigma_{k\ell}\,K_{ijk\ell}(t) \leqq \sigma_{ij}\,\mathcal{K}_{ijk\ell}\,\sigma_{k\ell} \tag{F.13}$$

og

$$- \frac{1}{2}\,\sigma_{ij}\,\sigma_{k\ell}\,K_{ijk\ell}(2t) \leqq$$

$$- \frac{1}{2}\int_{o-}^{t}\int_{o-}^{t} K_{ijk\ell}(2t-\tau-\eta)\,\frac{d\sigma_{ij}(\tau)}{d\tau}\,\frac{d\sigma_{k\ell}(\eta)}{d\eta}\,d\tau d\eta \tag{F.14}$$

og dermed at udtrykket

$$W_i^{n} = \sigma_{ij}\,\sigma_{k\ell}\,K_{ijk\ell}(t) - \frac{1}{2}\,\sigma_{ij}\,\sigma_{k\ell}\,K_{ijk\ell}(2t)$$

$$= \frac{1}{2}\,\sigma_{ij}\,\sigma_{k\ell}\,K_{ijk\ell}(t) - \frac{1}{2}\,\sigma_{ij}\,\sigma_{k\ell}\Big(K_{ijk\ell}(2t) - K_{ijk\ell}(t)\Big) \tag{F.15}$$

er en <u>nedreværdi</u> for den <u>fri energi</u> . Som det ses, er udtrykket eksakt i grænserne $t \to 0$ og $t \to \infty$.

RESUME

Rapportens hovedtema er problemerne omkring indførelsen af udbredelseskriterier og revnemodeller for lineært viscoelastiske revneudbredelsesproblemer.

Det første kapitel i rapporten er forbeholdt det termodynamiske grundlag for indførelsen af revneudbredelseskriterier. Da legemets overflade ved en revneudbredelsesproces ikke er nogen konstant punktmængde, må legemet ved en sådan proces behandles som et hele, d.v.s. ved hjælp af de globale termodynamiske ligninger hvori også overfladebidragene er medtaget. De styrende ligninger opstilles både på global form og lokal form (feltligninger), og de termodynamiske betingelser for isoterme revneudbredelsesprocesser angives. De konstitutive ligninger for spændingerne, entropien, den fri energi og dissipationen udledes for lineært viscoelastisk materiale.

I kapitel 2 påvises nødvendigheden af indførelsen af en revnemodel, og der argumenteres for indførelsen af en specifik model med en skridtvis fremrykning af revnen (antagelse om diskretiseret medium), men med en bibeholdelse af den lineære beskrivelse omkring revnespidsen. Denne model er simpel at arbejde med, idet den muliggør anvendelse af nogle enkle generelle løsninger, som er fundet i en tidligere rapport [23] . Den videre analyse er foretaget under antagelse af modellen med skridtvis fremrykning, og der angives forskellige gæt på udbredelseskriteriet, samt udbredelseskriterier, som enten eksakt eller med tilnærmelse svarer til opfyldelse af de tidligere opstillede termodynamiske betingelser for isoterm revneudbredelse.

SUMMARY

The main theme of this report is the problems involved with the introduction of crackmodels and criteria for crack growth in linear viscoelastic materials.

In the first chapter the basic concepts of thermodynamics necessary for introduction of crack propagation criteria are mentioned. While crack growth is taking place in a body, the surface of this body no longer defines a fixed set of bodypoints. This means, that such a body has to be treated as a whole, by means of global thermodynamical equations also involving the surface contributions. The governing equation is given both in global form and in local form (field equations), and the thermodynamical conditions for isothermal processes of crack propagation is given. The constitutive equations for stress, entropi, the free energy, and the dissipation are derived for linear viscoelastic materials.

In chapter two the necessity of the introduction of crackmodels is pointed out, and a specific crackmodel is recommended, that is the crackmodel of stepwise crackpropagation (assumption of discrete media), but still with the linear description for the fields around the crack tip. It is a model which is comfortable to work with, because it makes possible a direct application of some simple but general crack tip solutions found in the report [23] . In the further analysis this model is assumed. and some crack propagation criteria is given; some based on simple guesses, and some based on exact or approximate satisfaction of the thermodynamical condition given in the first chapter for isotermal processes of crack propagation.

REFERENCER.

[1] R. Shuttleworth: The surface tension of solids. Phys. soc. Lond., 63A, 1950, 444-457.

[2] A.J. Staverman and F. Schwarzl: Thermodynamics of viscoelastic behavior (model theory). Nederlandse Akademie van Wetenschappen, Vol LV, series B, 1952, 474-492.

[3] A.W. Adamson: Physical chemistry of surfaces. Interscience Publishers, 1960.

[4] S. Breuer and T. Onat: On the determination of the free energy in linear viscoelastic solids. Z. angew. math. phys., 15, 1964, 184-191.

[5] C. Truesdell: The elements of continuum mechanics. Springer-Verlag, 1966.

[6] G.C. Benson and K.S. Yun: Surface energy and surface tension of crystaline solids. In the solid-Gas Interface, ed. E. Alison Flood, Marcel Dekker, Inc., New York, 1967.

[7] R.M. Christensen and P.M. Naghdi: Linear non-isothermal viscoelastic solids. Acta Mechanica, 3/1, 1967, 1-12.

[8] J.R. Rice: A path-independent integral and the approximate analysis of strain concentrations by botches and cracks. J. Appl. Mech., 35, 1968, 379-386.

[9] R.M. Christensen: Theory of viscoelasticity, an introduction. Academic Press, 1971.

[10] J.W. Hutchinson: Nonlinear fracture mechanics. Department of solid Mechanics, The Technical University of Denmark, 1972.

[11] B. Budiansky and J. Rice: Conserration laws and energy - release notes. J. Appl. Mech., 1973, 101-203.

[12] M.P. Wunk: Slow growth of cracks in a rate sensitive tresca solid.
Engineering fracture Mechanics, 5, 1973, 605-626.

[13] C.C. Wang and C. Truesdell: Introduction to rational elasticity.
Noordhoff international Publishing, Leyden 1973.

[14] R.A. Schapery: A theory of crack iniation and growth in viscoelastic media. Part I, part II and part III.
International Journal of Fracture, part I: 11:1, 1975, 141-158, part II: 11:3, 1975, 369-387, part III: 11:4, 1975, 549-562.

[15] M.E. Gurtin: On a path-indepent integral for elasto--dynamics.
International Journal of Fracture, 12, 1976, 643-644.

[16] R.M Christensen: A thermodymical criterion for the glass-transition temperature.
Transactions of the society of rheology, 21:2, 1977, 163-181.

[17] C. Truesdell: A first course in rational continuum mechanics. Vol 1, general concepts.
Acadimic Press, New York, 1977.

[18] L.F. Nielsen: Crack propagation in linear-viscoelastic materials.
Bygningsstatiske meddelelser, 49:1, 1978.

[19] R.M. Christensen: A rate dependent criterion for crack growth.
International Journal of Fracture, 15:1, 1979, 3-21.

[20] M.E. Gurtin: On the energy - release rate in quasi--static elastic crack propagation.
Journal of Elasticity, 9:2, 1979, 187-195.

[21] L.N. McCartney: Crack growth laws for a variety of viscoelastic solids using energy and COD fracture criteria.
International Journal of Fracture, 15:1, 1979, 31-40.

[22] L.F. Nielsen: Crack failure at dead, ramp and combined loaded viscoelastic materials.
First international conference on wood fracture, Bauff, Alberta, Canada, 1978. Proceedings 1979, 187. Western Forest products Laboratory, University of British Columbia, Vancouver, Canada.

[23] R. Brincker: Plane revneudbredelsesproblemer i lineært viscoelastiske materialer. Løsning af plane lineært viscoelastiske randværdiproblemer med kendt revneudbredelsesforløb.
Afd. for Bærende Konstruktioner, serie R, No. 131, 1982.

[24] J.R. Rice: Mathematical analysis in the mechanics of fracture.
In Fracture, Vol. 2, 191-311, ed. H. Liebowitz. Academic Press, 1968.

[25] F. Riesz and B. Sz.-Nagy: Functional analysis. Ungar, New York, 1955.

Stikordsregister

AFDELINGEN FOR BÆRENDE KONSTRUKTIONER
DANMARKS TEKNISKE HØJSKOLE

Department of Structural Engineering
Technical University of Denmark, DK-2800 Lyngby

SERIE R

(Tidligere: Rapporter)

R 115. PEDERSEN, MAX ELGAARD: En generel beregningsmetode for betontværsnit. 1980.
R 116. PEDERSEN, MAX ELGAARD: Kipstabilitet af armerede betonbjælker. 1980. Uds.
R 117. BRYDER, KAJ L.: Optimeringsmetoder for 2-dimensionale legemer af ideal-plastisk materiale. 1980.
R 118. DUKOW, EWTIM N.: Optimale Projektierung von vorgespannten Brückenträgern. 1980.
R 119. PEDERSEN, HENNING: Optimering af jernbetonplader. 1980.
R 120. BACH, FINN, M.P. NIELSEN and M.W. BRÆSTRUP: Shear Tests on Reinforced Concrete T-beams. Series V, U, X, B and S. 1980.
R 121. Resumeoversigt 1979. Summaries of Papers 1979. 1980.
R 122. NIELSEN, J.Aa., F. JOHNSEN og N.J. GIMSING: Trykkede pladefelters bæreevne. 1980.
R 123. KRAGERUP, JAN: Undersøgelse af stålnormens metoder til bestemmelse af bæreevnen af geometrisk imperfekte stålsøjler. 1980.
R 124. HANSEN, SVEND OLE: Vindbelastede skorstene. 1. del. Matematiske modeller. 1980. Uds.
R 125. HANSEN, SVEND OLE: Vindbelastede skorstene. 2. del. Stigsnæs skorstenen. 1980. Uds.
R 126. GIMSING, NIELS J.: Four Papers on Cable Supported Bridges. 1980.
R 127. SVENSSON, SVEN EILIF og JAN KRAGERUP: Interaktiv bæreevne af sammensatte søjler. 1980.
R 128. GIMSING, NIELS J. og JØRGEN GIMSING: Analysis of Erection Procedure for Bridges with Combined Cable Systems. Cable Net Bridge Concept. 1980.
R 129. ROSTAM, STEEN og EIGIL STEEN PEDERSEN: Partially Prestressed Concrete Bridges. Danish Experience. 1980.
R 130. BRØNDUM-NIELSEN, TROELS: Stress Analysis of Cracked Arbitrary Concrete Section under Service Load. 1981.
R 131. BRINCKER, RUNE: Plane revneudvidelsesproblemer i lineært viscoelastiske materialer. Løsning af plane lineært viscoelastiske randværdiproblemer med kendt revneudbredelsesforløb. 1982.
R 132. BRINCKER, RUNE: Plane revneudbredelsesproblemer i lineært viscoelastiske materialer. Revnemodeller og udbredelseskriterier. 1983.
R 133. Reserveret.
R 134. ABK's informationsdag 1981. 1981.
R 135. Resumeoversigt 1980. Summaries of Papers 1980. 1981.
R 136. BACH, FINN og M.P. NIELSEN: Nedreværdiløsninger for jernbetonplader. 1981.
R 137. Publication pending.

R 138. NIELSEN, LEIF OTTO og PETER NITTEGAARD-NIELSEN: Elementmetodeberegninger på mikrodatamat. 1981.
R 139. MONDORF, P.E.: Concrete Bridges. Literature Index. 1981.
R 140. NIELSEN, METTE THIEL: Lamb's Problem. Internal Harmonic Point Load in a Half-Space. 1981.
R 141. JENSEN, JESPER FRØBERT: Plasticitetsteoretiske løsninger for skiver og bjælker af jernbeton. 1982.
R 142. MØLLLMANN, H.: Thin-Walled Elastic Beams with Finite Displacements. 1981.
R 143. KRAGERUP, JAN: Five Notes on Plate Buckling. 1982.
R 144. NIELSEN, LEIF OTTO: Konstitutiv modellering af friktionsdæmpning. 1982.
R 145. NIELSEN, LEIF OTTO: Materiale med friktion til numeriske beregninger. 1982.
R 146. Resuméoversigt 1981. Summary of Papers 1981. 1982.
R 147. AGERSKOV, H. and J. BJØRNBAK-HANSEN: Bolted End Plate Connections in Round Bar Steel Structures. 1982.
R 148. NIELSEN, LEIF OTTO: Svingninger med friktionsdæmpning. 1982.
R 149. PEDERSEN, CARL: Stability Properties and Non-Linear Behaviour of Thin-Walled Elastic Beams of Open Cross-Section. Part 1: Basic Analysis. 1982.
R 150. PEDERSEN, CARL: Stability Properties and Non-Linear Behaviour of Thin-Walled Elastic Beams of Open Cross-Section. Part 2: Numerical Examples. 1982.
R 151. KRENCHEL,HERBERT and HANS WINDBERG JENSEN: Organic Reinforcing Fibres for Cement and Concrete. 1982.
R 152. THIEL, METTE: Dynamic Interaction between Soil and Foundation. 1982.
R 153. THIEL, METTE: Soil-Pile Interaction in Horizontal Vibration. 1982.
R 154. RIBERHOLT, H. og PER GOLTERMANN: Sømmede træbjælker. 1982.
R 155. JENSEN, JENS HENNING: Forkammede armeringsstængers forankring, specielt ved vederlag. 1. del. 1982.
R 156. JENSEN, JENS HENNING: Forkammede armeringsstængers forankring, specielt ved vederlag. 2. del. Appendix A til F. 1982.
R 157. ARPE, ROBERT and CLAES DYRBYE: Elasto-Plastic Response to Stochastic Earthquakes. 1983.
R 158. WALD, FRANTISEK: Non-Linear Analysis of Steel Frames (with Special Consideration of Deflection). 1983.
R 159. BRÆSTRUP, MIKAEL W.: Ten Lectures on Concrete Plasticity. Course given in Nanjing, China, October 1982. 1983.
R 160. FEDDERSEN, BENT og M.P. NIELSEN: Opbøjet spændarmering som forskydningsarmering. 1983.
R 161. KRAGERUP, JAN: Buckling of Rectangular Unstiffened Steel Plates in Compression. 1983.
R 162. FEDDERSEN, BENT og M.P. NIELSEN: Revneteorier for enaksede spændingstilstande. 1983.
R 163. Reserveret.
R 164. GIMSING, NIELS J.: Preliminary Design and Optimization of Cable Systems for Bridges. 1983.

Abonnement 1.7.1982 - 30.6.1983 Kr. 100.-.
Subscription rate 1.7.1982 - 30.6.1983 D.kr. 100.-.

Hvis De ikke allerede modtager Afdelingens resumeoversigt ved udgivelsen, kan Afdelingen tilbyde at tilsende næste års resumeoversigt, når den udgives, dersom De udfylder og returnerer nedenstående kupon.

Returneres til
Afdelingen for Bærende Konstruktioner
Danmarks tekniske Højskole
Bygning 118
2800 Lyngby

Fremtidig tilsendelse af resumeoversigter udbedes af
(bedes udfyldt med blokbogstaver):

Stilling og navn: ....

Adresse: ....

Postnr. og -distrikt: ....

The Department has pleasure in offering to send you a next year's list of summaries, free of charge. If you do not already receive it upon publication, kindly complete and return the coupon below.

To be returned to:
Department of Structural Engineering
Technical University of Denmark
Building 118
DK-2800 Lyngby, Denmark.

The undersigned wishes to receive the Department's
List of Summaries:
(Please complete in block letters)

Title and name ....

Address...

Postal No. and district.................................

Country...