



Afdelingen for Bærende Konstruktioner
Department of Structural Engineering
Danmarks Tekniske Højskole · Technical University of Denmark

VRIDNING AF ARMEREDE NORMAL –
OG
HØJSTYRKEBETONBJÆLKER

Jan Behrendt Ibsø & Lars Juel Rasmussen

Serie R

No 296

1992

**VRIDNING AF ARMEREDE NORMAL –
OG
HØJSTYRKEBETONBJÆLKER**

Jan Behrendt Ibsø¹⁾ & Lars Juel Rasmussen²⁾

1) Ph.D.-studerende ved Afdelingen for Bærende Konstruktioner,
Danmarks tekniske Højskole, Lyngby, Danmark.

2) Ph.D.-studerende ved Department of Civil Engineering,
University of Queensland, Brisbane, Australia.

Forord

Denne rapport bygger på et eksamensprojekt udført ved Afdelingen for Bærende Konstruktioner på Danmarks tekniske Højskole i Lyngby.

Rapporten er en del af et større forskningsprojekt : " Høj kvalitetsbeton i 90'erne " , som er finansieret af Industri og Handelsstyrelsen.

Vi takker de medarbejdere ved Afdelingen for Bærende Konstruktioner, som har hjulpet til ved udarbejdelsen af denne rapport.

Danmarks tekniske Højskole, Lyngby 1992

Lars Juel Rasmussen

Jan Behrendt Ibsø

Vridning af armerede normal- og højstyrkebetonbjælker

Copyright © by Jan Behrendt Ibsø & Lars Juel Rasmussen, 1992

Tryk:

Afdelingen for Bærende Konstruktioner

Danmarks Tekniske Højskole

Lyngby

ISBN 87-7740-117-4

Resumé

Denne rapport omhandler eksperimentelle og teoretiske studier af vridningspåvirkede, armerede betonbjælker.

Den eksperimentelle del består af en forsøgsserie af 12 vridningsforsøg med totalt overarmerede højstyrkebetonbjælker. Betonstyrkerne varierer mellem 36 MPa og 110 MPa, mens forholdet mellem bøjle- og længdearmeringen holdes konstant i serien.

Resultaterne fra forsøgsserien samt resultater fra 11 andre forsøgsserier med bjælker udført af normalstyrkebeton sammenholdes med plasticitetsteoretiske beregninger. Forsøgsbjælkernes vridningsbæreevner er dels beregnet efter teorien beskrevet i B. Feddersens licentiatprojekt [90.1], dels efter en simplificeret beregningsmetode, der bygger på Bredt's formel.

Det er herved fundet, at den bedste overensstemmelse mellem teori og forsøg opnås, hvis dæklaget ikke medtages i vridningsberegningen.

Der er givet et forslag til værdien af effektivitetsfaktoren ved beregning uden dæklag for betonstyrker op til 110 MPa. Med dette forslag bliver middelværdien af forholdet mellem beregnede og målte vridningsbæreevner for 119 vridningsforsøg lig 0.995 med en spredning på ca. 16 %. Den foreslåede funktion for effektivitetsfaktoren afhænger kun af betonens enaksede trykstyrke.

Den eksperimentelle del har vist, at man med fordel kan anvende højstyrkebeton. Udover en større bæreevne vil brugen af højstyrkebeton for et givet tværsnit og et givet vridningsmoment medføre større vridningsstivhed, mindre revnevidder og mindre armeringsspændinger i brugstilstanden sammenlignet med normalstyrkebetonbjælker.

Vridningsberegninger i.h.t. den danske norm for betonkonstruktioner, DS 411, og den fælles europæiske norm for betonkonstruktioner, EC 2, er ligeledes behandlet i denne rapport, og beregningerne er sammenlignet med forsøgsresultater.

Indholdsfortegnelse

	<u>side</u>
Forord	
Synopsis	
Symbolliste	
1 Indledning	1-2
2 Teoretiske og fysiske forudsætninger	
2.1 Generel plasticitetsteori	
2.1.1 Flydebetingelsen	3
2.1.2 Normalitetsbetingelsen	4
2.1.3 Statiske og geometriske betingelser	4-6
2.1.4 Konstitutive betingelser	7
2.1.5 Ekstremalprincipperne	7-8
2.2 Beton	
2.2.1 Betons brudbetingelse	8-10
2.2.2 Betons enaksede trykstyrke	11-13
2.2.3 Betons arbejdskurve	13-14
2.3 Armering	15-16
2.4 Plasticitetsteori for armeret beton	16-18
2.5 Effektivitetsfaktoren	18-19
3 Teori for bjælker påvirket til ren vridning	
3.1 Indledning	20
3.2 Plasticitetsteoretisk nedreværdiløsning	
3.2.1 Bjælkebeskrivelse	21-23

3.2.2	Statisk tilladelig spændingsfordeling	23–27
3.2.3	Normaltarmerede bjælker	28–31
3.2.4	Overarmerede bjælker	31–32
3.2.5	Gyldighedsområder	32–33
3.2.6	Bestemmelse af β_l	34–42
3.2.7	Beregningsudtryk	42–44
3.2.8	Beregning med dæklag	45
3.3	Simplificering af beregningsudtryk – Bredts formel	46–52
3.4	Geometrisk mulig brudfigur	53–56
3.5	Effektivitetsfaktoren ved vridning	57–61
3.6	Andre tværsnit og armeringsudformninger	62–64
4	Beregning i.h.t. normer	
4.1	Den danske norm for beton– konstruktioner, DS 411	65–67
4.2	Den fælles europæiske norm for beton– konstruktioner, EC 2	68–71
5	Forsøgsprogram	
5.1	Indledning	72
5.2	Elementudformning	72–73
5.2.1	Overvejelser ved udformning af bjælketværsnit og armeringsarrangement	73–76

5.3	Materialer	
5.3.1	Beton	
5.3.1.1	De indgående bestanddele	77–78
5.3.1.2	Betonrecepter	79
5.3.2	Armering	80
5.4	Tildannelse af forsøgselementerne	81–83
5.5	Forsøgsopstillingen	83–89
5.6	Instrumentering	
5.6.1	Bjælkens vinkeldrejning	90–91
5.6.2	Længdearmeringsspænding	92–93
5.6.3	Bøjlearmeringsspænding	94–95
5.6.4	Middeltøjningsrosetter	96–97
5.6.5	Bjælkens længdeændring	98
5.6.6	Dæklagsafskalning	99
5.6.7	Revneudvikling	99–100
5.7	Forsøgsgang	100–101

6 Vurdering af de opnåede forsøgsresultater

6.1	Indledning	102
6.2	Betonstyrker	103–108
6.3	Armeringsspændinger	
6.3.1	Målte flydespændinger	109–110
6.3.2	Kalibrering af armeringsgauge	110–112
6.3.2.1	Kalibrering af længdearmeringsgauge	112–115
6.3.2.2	Kalibrering af bøjlearmeringsgauge	115–117

6.3.3	Længdearmeringsspændinger	117–121
6.3.4	Bøjlearmeringsspændinger	122–125
6.4	Revneudvikling	
6.4.1	Revnedannelse	126–132
6.4.2	Revnevidder	132–133
6.5	Bjælkernes deformationer	
6.5.1	Vinkeldrejning og rotation	134–138
6.5.2	Længdeændring	139–141
6.6	Vridningsbæreevnen	
6.6.1	Definition af brudlast	142
6.6.2	Brudform	143–146
6.6.3	Målte bæreevner	147–148
6.6.4	Bestemmelse af effektivitetsfaktoren ud fra de udførte forsøg	149–157
6.6.5	Teori vurderet ved de udførte forsøg	158–163
6.7	Sammenfatning over de udførte forsøg	163–165
7 Vridningsbæreevnen vurderet ved forsøg		
7.1	Beskrivelse af tværsnitsudformninger	166
7.1.1	Forsøg af J. S. Nielsen	167
7.1.2	Forsøg af F. Leonhardt et al.	168
7.1.3	Forsøg af R. A. Swann	168–169
7.1.4	Forsøg af G. S. Pandit	169
7.1.5	Forsøg af P. Lampert et al.	169
7.1.6	Forsøg af A. M. McMullen et al.	170
7.1.7	Forsøg af N. Jackson et al.	170
7.1.8	Forsøg af K. T. S. R. Iyengar et al.	170–171

7.2	Teori vurderet ved andre forsøg	
7.2.1	Beregning uden dæklag	172–176
7.2.2	Simplificeret beregningsmetode med dæklag	177–179
7.2.3	Samlet vurdering af teorierne ud fra andre forsøg	180–181
7.3	Normer vurderet ved andre forsøg	
7.3.1	Beregningsprincip	182–186
7.3.2	Beregning i.h.t. DS 411	187–189
7.3.3	Beregning i.h.t. EC 2	190–191
8	Konklusion	192–193
9	Dimensioneringsvejledning	194–196
10	Referenceliste	197–203

Symbolliste

a_w	Bøjleafstand.
b	Bjælkebredde.
b_e	Effektiv bjælkebredde.
c	– Dæklag. – Betons kohæsion.
c_o, c_u, c_v og c_h	Se figur 3.2 .
c'	Dæklag til længdearmeringen, $c' = c + d_w$.
d	Diameter af cylindre til tryk- og spaltetrækforsøg.
d_ℓ	Diameter af længdearmeringsstang.
d_w	Diameter af bøjlearmeringsstang.
f_c, f_{ck}	Betons enaksede trykstyrke. (Karakteristisk værdi).
f_{cd}	Betons regningsmæssige trykstyrke.
f_{cp}	Betons ideal-plastiske trykstyrke, defineret ved $f_{cp} = \nu f_c$.
f_t	Betones enaksede trækstyrke.
$f_{t\ell}, f_{tw}$	Armeret betons enaksede trækstyrke, se formel (3.28) og (3.29).

f_{tp}	Betons ideal-plastiske trækstyrke, defineret ved $f_{tp} = \rho f_c = \nu_{ten} f_t$.
f_v	Betons forskydningsstyrke.
f_y	Armeringens trækflydespænding.
f_y^*	Armeringens trykflydespænding.
f_{yl}	Længdearmeringens trækflydespænding.
f_{yw}	Bøjlearmeringens trækflydespænding.
h	– Bjælkehøjde. – Højde af legemer til trykforsøg.
h_e	Effektiv bjælkehøjde.
i	Antal længdearmeringsstænger.
k	– h_e/b_e – Konstant, der indgår i $\nu = k/\sqrt{f_c}$.
k_g	Gaugefaktor.
l	Φ_w/Φ_ℓ .
$q_i (\bar{q})$	Generaliserede plastiske tøjninger.
t	Tykkelse af legeme.
t_ℓ	Optimal skivetykkelse.
t_o	Tykkelse af det effektive tværsnit ved ren vridning.

t_p	Dimensionsløs bæreevne , defineret ved $t_p = T_p / b_e^3 f_c$.
t_{pc}	Dimensionsløs bæreevne af betonen.
t_{pl}	Dimensionsløs bæreevne af længdearmingen.
t_{pw}	Dimensionsløs bæreevne af tværearmeringen.
u	Omkreds af det effektive tværsnit.
A_o	Areal ved brug af Bredt's formel $A_o = (b_e - t_o)(h_e - t_o)$.
A_{ef}	Areal af det effektive tværsnit.
A_l	Samlet areal af længdearmering.
A_w	Areal af en bøjlearmeringsstang.
A_{wl}	Bøjlearmeringsareal pr. længdeenhed, defineret ved $A_{wl} = A_w / a_w$.
D	Plastisk arbejde, dissipation.
E_s	Ståls elasticitetsmodul.
K_l	Kalibreringsfaktor for længdearmingen.
K_w	Kalibreringsfaktor for bøjlearmeringen.
$Q_i (\mathcal{Q})$	Generaliserede spændinger.

S_{ef}	Statisk moment om tyngdepunktet af kræfterne i det effektive tværsnit.
T	Vridningsmoment.
T_d	Regningsmæssigt vridningsmoment.
T_{dc}	Bæreevnen af beton i.h.t. EC 2.
T_{dw}	Flydebæreevnen af bøjlearmeringen i.h.t. EC 2.
T_E	Forsøgs­mæssigt bestemt vridnings­bæreevne.
T_p	Beregnet vridnings­bæreevne.
W	Specifikt plastisk arbejde.
β	t_o/b_e .
β_ℓ	t_ℓ/b_e .
β_w	Øvre grænse for β_ℓ i den simplificerede beregningsmetode.
γ	– Sikkerhedsfaktor, se formel (3.19). – Vinkel med bjælkens længdeakse, se f.eks. formel (3.68)
ϵ_1	Hovedtræktøjning
ϵ_2	Hovedtryktøjning
ϵ_c	Tøjning i beton.
ϵ_{cu}	Betonens brudtøjning.

ϵ_o	Tøjning i beton svarende til toppunktet af arbejdskurven.
ϵ_s	Tøjning i armering.
ϵ_y	Armeringens flydetøjning.
η	Rotationsvektor.
η_ℓ	Φ_ℓ / ν_t .
η_w	Φ_w / ν_t .
θ	Betontrykkets vinkel med vandret.
κ	$\kappa = \cot \theta$
λ	Konstant i normalitetsbetingelsen, se formel (2.3).
ν	Effektivitetsfaktor, som multipliceret med f_c angiver f_{cp} .
ν_E	Effektivitetsfaktoren for ren vridning bestemt ved forsøg.
ν_t	Effektivitetsfaktoren ved vridning (rektangulært tværsnit).
ν_{ten}	Effektivitetsfaktor, som multipliceret med f_t angiver f_{tp} .
ν_t^*	Effektivitetsfaktoren ved vridning (vilkaarligt tværsnit).

ρ	Effektivitetsfaktor, som multipliceret med f_c angiver f_{tp} .
σ	Spænding.
σ_c	Spænding i beton.
σ_s	Spænding i armering.
τ	Forskydningsspænding.
τ_t	Forskydningsspænding knyttet til vridning.
φ	– Betons friktionsvinkel. – Bjælkens vinkeldrejning.
Φ_ℓ	Mekanisk længdearmeringsgrad defineret ved $\Phi_\ell = \frac{A_\ell f_y \ell}{b_e h_e f_c} .$
Φ_w	Mekanisk bøjlearmeringsgrad defineret ved $\Phi_w = \frac{2A_w f_y w}{a_w b_e f_c} .$

1 Indledning

Ren vridning forekommer kun sjældent i praksis. Der vil næsten altid være tale om kombinerede påvirkninger, ofte kombineret vridning og bøjning. For brokonstruktioner udgør vridning en væsentlig del af belastningen p.g.a. ekscentriske påvirkninger. For betonbroer ønsker man i nogle tilfælde at minimere egenvægten, og i denne sammenhæng har højstyrkebeton særlig interesse.

Den danske betonnorm tillader kun, at betontrykstyrker op til 50 MPa tages i regning. Dette skyldes, at man ikke har en tilstrækkelig viden om højstyrkebetons opførsel, specielt hvad angår betonens brudsejhed. Højstyrkebeton har nogle egenskaber, som kan udvide anvendelsesområderne for beton. F.eks. er højstyrkebetonen tættere og dermed mere modstandsdygtig overfor kemiske angreb og karbonatisering. Derudover beskytter højstyrkebeton bedre armeringen mod korrosion. I de senere år er forskningen inden for højstyrkebeton øget, men påvirkningen ren vridning har endnu ikke været undersøgt for armerede højstyrkebetonbjælker, og det har ikke været muligt at finde litteratur, der omhandler forsøg med armerede højstyrkebetonbjælker.

Det primære formål med dette projekt er at undersøge betontrykstyrkens indflydelse på vridningsbæreevnen af armerede højstyrkebetonbjælker ved hjælp af forsøg, men andre forhold, som har betydning i brugstilstanden, vil også blive analyseret. Dette drejer sig f.eks. om vinkeldrejninger og længdeændringer af bjælken samt beskrivelse af revneform og revnevidder. Der vil blive foretaget en sammenligning mellem normalstyrkebeton og højstyrkebeton på baggrund af de udførte forsøg. I forsøgsserien benyttes der overarmerede bjælker, og det er kun betontrykstyrken, der varierer.

Som udgangspunkt for projektet anvendes plasticitetsteorien for armerede beton. Teorien har den fordel, at det er en generel teori for brudberegning af beton og armeret beton, og dermed også en beregningsmodel, der kan benyttes for problemer, hvor der ikke eksisterer færdige beregningsudtryk. Teorien indebærer den fordel, at der opnås en frihed med hensyn til armeringsføringen, herunder fordelingen af armeringen.

Den eksperimentelle del, som er præsenteret i rapporten er et led i et omfattende forsøgsprogram, der er blevet gennemført de senere år ved Afdelingen for Bærende Konstruktioner på Danmarks tekniske Højskole, for at opnå en større viden omkring højstyrkebetonens deformations- og brudforhold.

2 Teoretiske og fysiske forudsætninger

2.1 Generel plasticitetsteori

I dette afsnit vil hovedresultaterne fra den generelle plasticitetsteori kort blive beskrevet. En mere detaljeret fremstilling af plasticitetsteorien findes f.eks. i P. Lange-Hansen [77.2] og M. P. Nielsen et al. [77.3].

I teorien indføres generaliserede spændinger og tøjninger til beskrivelse af det betragtede legeme. De generaliserede spændinger, benævnt Q_i ($i = 1, 2, \dots, n$), og de generaliserede tøjninger, benævnt q_i , vælges således, at summen $W = \sum_{i=1}^n Q_i q_i$ repræsenterer det pågældende legemes specifikke plastiske arbejde eller dissipationen pr. volumenenhed, arealenhed eller længdeenhed af legemet. Det må kræves, at $W \geq 0$.

2.1.1 Flydebetingelsen

Et ideal-plastisk materiale er defineret ved et materiale, hvori der ikke forekommer deformationer for spændinger mindre end en vis øvre grænse for spændingerne, kaldet flydespændingen. For spændinger lig med flydespændingen kan deformationerne være vilkårligt store.

For et legeme af ideal-plastisk materiale beskrives flydebetingelsen ved følgende ligning

$$f(Q_i) = f(Q_1, Q_2, \dots, Q_n) = 0 \quad (2.1)$$

Funktionsudtrykket vælges således, at den generaliserede spændingskombination kan optages for $f < 0$, mens den ikke kan optages for $f > 0$. For $f = 0$ flyder materialet og plastiske deformationer, d.v.s. blivende deformationer, kan forekomme.

Den grafiske afbildning af funktionsudtrykket (2.1) benævnes flydefluden.

2.1.2 Normalitetsbetingelsen

Et legemes plastiske arbejde er bestemt ved

$$D = \int_V W \, dV = \int_V (Q_1 q_1 + Q_2 q_2 + \dots + Q_n q_n) \, dV \quad (2.2)$$

D benævnes dissipationen.

Flydefladen forudsættes at være differentiabel og konveks uden plane flader og spidser. Von Mises's hypotese vedrørende det maksimale arbejde giver under disse forudsætninger følgende ligning

$$q_i = \lambda \frac{\partial f}{\partial Q_i} \quad (2.3)$$

, hvor λ er en positiv konstant.

Af ligning (2.3) fremgår det, at den generaliserede tøjningsvektor

$\bar{q} = (q_1, q_2, \dots, q_n)$ er en udadrettet normal til flydefladen.

Betingelsen (2.3) benævnes derfor normalitetsbetingelsen.

2.1.3 Statiske og geometriske betingelser

Spændingerne i et retvinklet (x,y,z) – koordinatsystem kan samles i spændingsmatricen \bar{S} defineret ved

$$\bar{S} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{bmatrix} \quad (2.4)$$

Ligevægtsligningerne for dette spændingssystem er givet ved

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + \rho f_x = 0 \quad (2.5)$$

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + \rho f_y = 0 \quad (2.6)$$

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \rho f_z = 0 \quad (2.7)$$

, hvor ρ er legemets massefylde og $\vec{f} = (f_x, f_y, f_z)$ er massekraften regnet pr. masseenhed af legemet. Som eksempel på massekræfter kan nævnes tyngdekraften, accelerationskræfter og magnetiske kræfter.

Langs randen af legemet gælder betingelsen $\bar{p} = \bar{S} \cdot \vec{n}$, hvor \bar{p} er spændingsvektoren langs randen, og \vec{n} er den udadrettede enhedsnormal til randen. Spændingsvektoren \bar{p} hidrører fra ydre kræfter virkende på legemets overflade (overfladekræfter).

Tøjningmatricen er i (x, y, z) – koordinatsystem defineret ved

$$\bar{\epsilon} = \begin{bmatrix} \epsilon_x & \epsilon_{xy} & \epsilon_{xz} \\ \epsilon_{xy} & \epsilon_y & \epsilon_{yz} \\ \epsilon_{xz} & \epsilon_{yz} & \epsilon_z \end{bmatrix} \quad (2.8)$$

Sammenhængen mellem flytningsvektorens koordinaterne u_x , u_y og u_z og tøjningerne er defineret ved

$$\epsilon_x = \frac{\partial u_x}{\partial x} \quad (2.9)$$

$$\epsilon_y = \frac{\partial u_y}{\partial y} \quad (2.10)$$

$$\epsilon_z = \frac{\partial u_z}{\partial z} \quad (2.11)$$

$$\gamma_{xy} = 2 \epsilon_{xy} = \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \quad (2.12)$$

$$\gamma_{xz} = 2 \epsilon_{xz} = \frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} \quad (2.13)$$

$$\gamma_{yz} = 2 \epsilon_{yz} = \frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y} \quad (2.14)$$

, idet γ_{xy} , γ_{xz} , og γ_{yz} er vinkelændringer mellem linier parallel med koordinataksene.

De geometriske betingelser, kaldet kompatibilitetsbetingelserne udtrykkes ved nedenstående ligninger

$$\frac{\partial^2 \epsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \epsilon_y}{\partial x^2} = 2 \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} \quad (2.15)$$

$$\frac{\partial^2 \epsilon_y}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \epsilon_z}{\partial y^2} = 2 \frac{\partial^2 \gamma_{yz}}{\partial y \partial z} \quad (2.16)$$

$$\frac{\partial^2 \epsilon_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \epsilon_x}{\partial z^2} = 2 \frac{\partial^2 \gamma_{xz}}{\partial x \partial z} \quad (2.17)$$

$$\frac{\partial^2 \epsilon_x}{\partial y \partial z} = \frac{\partial}{\partial x} \left(-\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} \right) \quad (2.18)$$

$$\frac{\partial^2 \epsilon_y}{\partial x \partial z} = \frac{\partial}{\partial y} \left(-\frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} + \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} \right) \quad (2.19)$$

$$\frac{\partial^2 \epsilon_z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial z} \left(-\frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} + \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} \right) \quad (2.20)$$

2.1.4 Konstitutive betingelser

For at kunne bestemme et legemes virkemåde fuldstændigt kræves der tillige kendskab til sammenhængen mellem spændinger og tøjninger. Denne sammenhæng benævnes de konstitutive betingelser eller fysiske betingelser. I de konstitutive betingelser indgår materialets fysiske egenskaber, og sidstnævnte kan kun bestemmes ved forsøg.

2.1.5 Ekstremalprincipperne

Plasticitetsteoriens ekstremalprincipper omfatter nedreværdi -, øvreværdi - og entydighedssætningen for ideal-plastiske materialer.

Der indføres følgende definitioner

– *En statisk tilladelig spændingsfordeling* er en spændingsfordeling, der opfylder ligevægtsligningerne og de statiske randbetingelser, (se afsnit 2.1.3). Kompatibilitetsbetingelserne og de geometriske randbetingelser behøver nødvendigvis ikke at være opfyldt, (se afsnit 2.1.3).

– *En sikker spændingstilstand* er en spændingstilstand, der overalt opfylder kravet $f < 0$, (se afsnit 2.1.1).

– *En kinematisk mulig brudfigur* er en deformationstilstand, der opfylder normalitetsbetingelsen, kompatibilitetsbetingelserne og de geometriske randbetingelser.

– *Flydelasten* defineres som den belastning, for hvilken spændingstilvæksterne overalt i legemet er nul.

Under forudsætning af normalitetsbetingelsen og med de ovennævnte definitioner lyder plasticitetsteoriens hovedsætninger således

Nedreværdisætningen :

En belastning bestemt på basis af en statisk tilladelig og sikker spændingsfordeling er mindre end eller lig med flydelasten.

Øvreværdisætningen :

En belastning, der er fundet ved anvendelse af arbejdsligningen på en kinematisk mulig brudfigur, er større end eller lig med flydelasten.

Entydighedssætningen :

En belastning, som er bestemt både ved anvendelse af nedre- og øvreværdisætningen, er lig med flydelasten.

2.2 Beton

I dette afsnit vil nogle af betonens vigtigste fysiske egenskaber kort blive beskrevet.

2.2.1 Betons brudbetingelse

Beton betragtes som et modificeret Coulomb materiale. En nærmere beskrivelse af Coulomb's brudhypotese er givet i M. P. Nielsen [84.1].

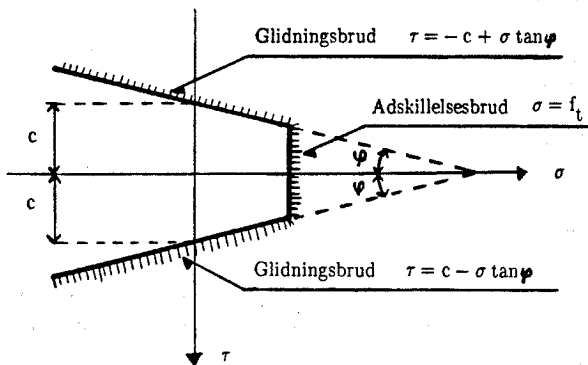
Coulomb's modificerede brudbetingelse består af to delbetingelser, som er

$$|\tau| - c + \sigma \tan \varphi = 0 \quad (2.21)$$

og

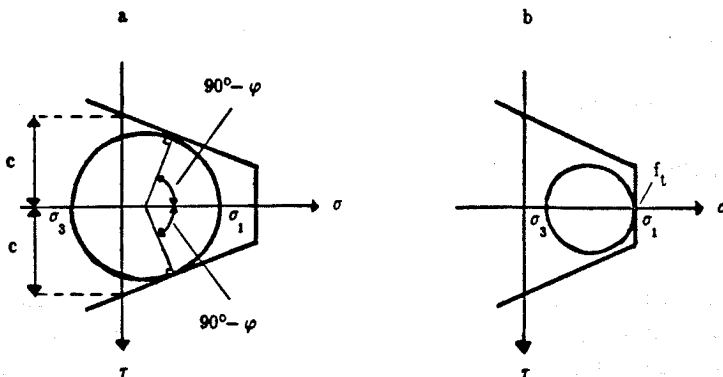
$$\sigma - f_t = 0 \quad (2.22)$$

(2.21) svarer til glidningsbruddet, og (2.22) svarer til adskillelsesbruddet. τ og σ er forskydnings- og normalspændingen i brudsnittet, mens c , φ og f_t er henholdsvis betonens kohæsion, friktionsvinkel og enakset trækstyrke. Figur 2.1 viser brudbetingelsen i et $\sigma - \tau$ -koordinatsystem.



Figur 2.1 : Brudkriterium for et modificeret Coulomb materiale.

Hovedspændingerne, defineret ved $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$, indføres. Figur 2.2 viser brudbetingelserne, idet en cirkel med diameteren $\sigma_1 - \sigma_3$ er indtegnet.



Figur 2.2 : Mohr's cirkel ved glidningsbrud (a) og adskillelsesbrud (b).

Af figur 2.2.a findes, at glidningsbrudbetingelsen bliver

$$\frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_3) = c \cdot \cos\varphi - \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_3) \sin\varphi \quad (2.23)$$

Indføres variabelen, k , givet ved

$$k = \frac{1 + \sin\varphi}{1 - \sin\varphi} \quad (2.24)$$

kan betingelsen for glidningsbrud skrives

$$k \sigma_1 - \sigma_3 = 2 c \sqrt{k} \quad (2.25)$$

Parametrene, som indgår i Coulomb's modificerede brudhypotese, fastlægges ved forsøg. Disse har vist, at friktionsvinklen tilnærmelsesvis kan regnes konstant lig med værdien $\varphi = 37^\circ$, hvilket svarer til $k = 4$ ifølge (2.24).

Idet et enakset tryk, hvor $\sigma_1 = \sigma_2 = 0$ og $\sigma_3 = -f_c$, altid vil give et glidningsbrud, kan c bestemmes af ligning (2.25).

$$c = \frac{f_c}{2 \sqrt{k}} \quad (2.26)$$

Dermed bliver den endelige brudbetingelse for glidningsbrud

$$4\sigma_1 - \sigma_3 = f_c \quad (2.27)$$

og for adskillelsesbrud, (se figur 2.2.b)

$$\sigma_1 = f_t \quad (2.28)$$

Af ovenstående fås, at en given betons brudforhold kan beskrives ved kendskab til denne betons styrkeparametre f_c og f_t . Kendskab til betonens enaksede trykstyrke vil imidlertid være tilstrækkelig, idet der gælder følgende sammenhæng mellem træk- og trykstyrken

$$f_t \approx \sqrt{0.1 f_c} \quad (2.29)$$

Betons forskydningsstyrke, f_v , er $f_v = f_t$, idet forskydningsbruddet er et adskillelsesbrud.

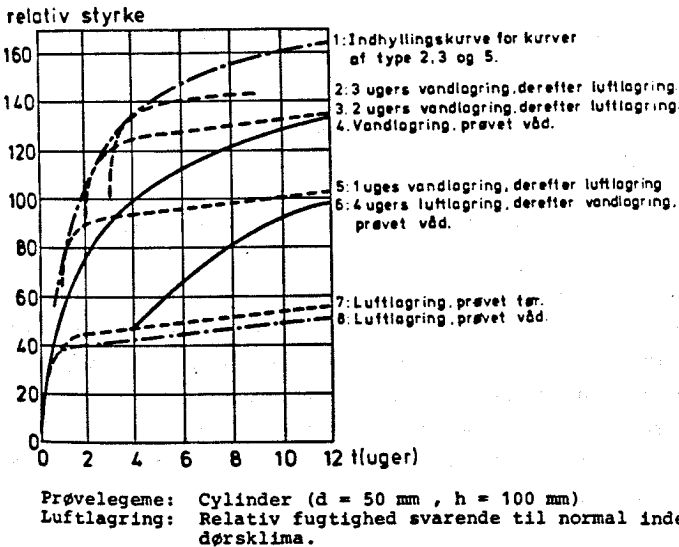
2.2.2 Betons ensaksede trykstyrke

Som det fremgår af afsnit 2.2.1 er den ensaksede trykstyrke en af de vigtigste af betonens materialeparametre, idet denne parameter er den væsentligste ved beskrivelsen af betons brudforhold.

Betonens trykstyrke bestemmes ved et forsøg, hvor et prøvelegeme påføres en enakset trykspændingstilstand. Den målte trykstyrke stemmer normalt ikke overens med den trykstyrke, der optræder i f.eks. en bjælke, hvilket blandt andet skyldes forskelle i udstøbning, komprimering og hærdningsforhold.

Den forsøgs-mæssigt bestemte trykstyrke er derfor nærmere en referencestyrke, ud fra hvilken en aktuel bjælkes styrkeniveau kan vurderes, end det er en reel styrkeparameter.

Betons styrke varierer med f.eks. sammensætningen, komprimeringen, fugtigheden, temperaturen og alderen (hærdningsgraden). Fugtighedens indflydelse på styrkeudviklingen er vist på figur 2.3 .

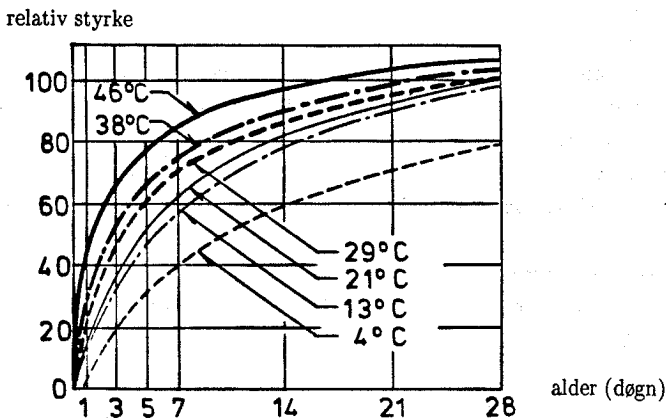


Figur 2.3 : Lagringsforholdenes indflydelse på den relative styrke.

(Efter E. Suenson [31.1]).

Kurverne i figur 2.3 kan dog kun anvendes som en kvalitativ vurdering af fugtighedens indflydelse.

På figur 2.4 er vist lagringstemperaturens indflydelse på styrken.



Figur 2.4 : Lagringstemperaturens indflydelse på styrken.

(Efter A. M. Neville [81.1]).

Af ovenstående fremgår det, at for at få en så pålidelig referencestykke som mulig, bør prøvelegemerne til fastlæggelse af referencestykket og den aktuelle bjælke nøje følge hinanden under støbning, lagringsperiode og på afprøvningsdagen.

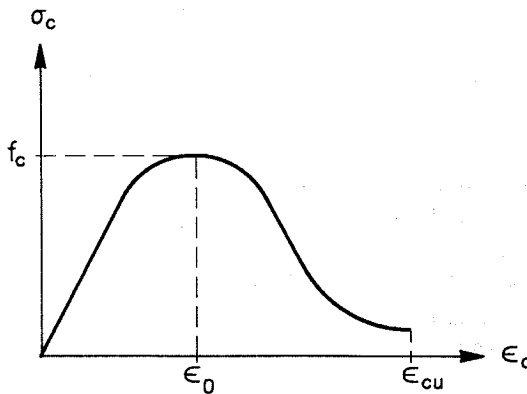
Den måde, hvorpå referencestykket måles, d.v.s. prøveomstændighederne, såsom især prøvelegemets form og størrelse samt belastningens hastighed og varighed, har ligeledes væsentlig betydning. Den danske norm for betonkonstruktioner, DS 411 [84.2] foreskriver, at trykstyrken bestemmes på cylinderformede prøvelegemer med diameteren 150 mm og en højde på 300 mm. Ved brug af andre prøvelegemer kan følgende omregningstabell benyttes.

prøvelegeme	dimensioner, mm		omregningsfaktor
	diameter	højde	
cylinder	100	200	0,95
cylinder	250	500	1,00
terning		100	0,70
terning		150	0,70
terning		200	0,75
terning		300	0,80

Tabel 2.1 : Omregningsfaktorer for forskellige prøvelegemetyper.
(Efter DS 411 [84.2]).

2.2.3 Betons arbejdskurve

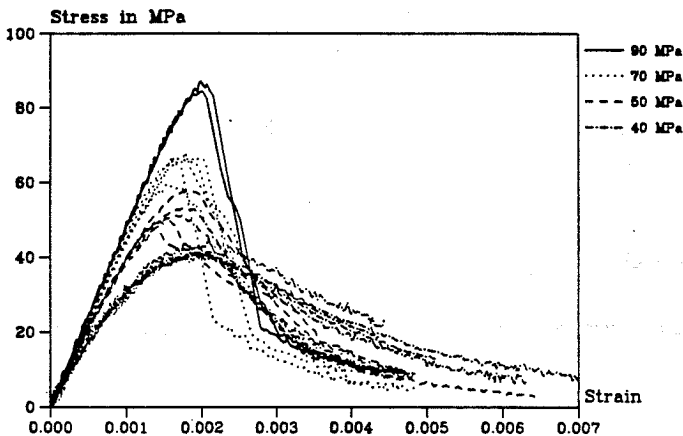
På figur 2.5 er vist det principielle udseende af en arbejdskurve for beton under enakset tryk.



Figur 2.5 : Principiel trykarbejdskurve for beton under enakset tryk.

Arbejdskurven består af en opadgående og en nedadgående gren, og toppunktet benævnes betonens trykstyrke, f_c , svarende til tøjningen, ϵ_0 . Det bemærkes, at betonen

ved brud ikke har sin maksimale trykstyrke. Brudtøjningen, ϵ_{cu} , afhænger af trykstyrken, idet brudtøjningen aftager med voksende betonstyrker. Sidstnævnte forhold er illustreret på figur 2.6, hvor nogle forsøgsmæssigt bestemte arbejdskurver for beton under enakset tryk op til 90 MPa er vist.



Figur 2.6 : Arbejdskurver for beton med forskellige styrker under enakset tryk. (Efter N. H. Olsen [90.2]).

Som det ses, stiger betonens elasticitetsmodul med voksende betonstyrker, og derudover vil det lineære stykke af den opadgående gren ligeledes stige.

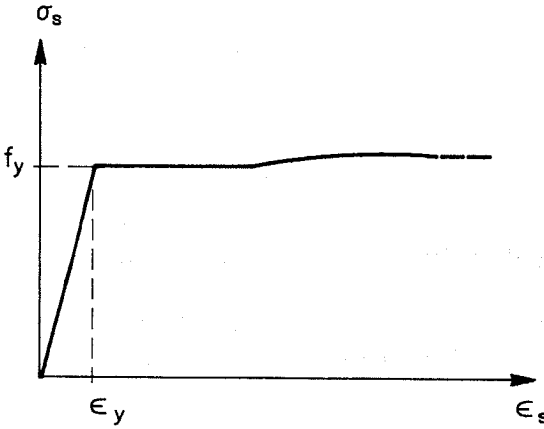
Betonens nedadgående gren udviser størst ideal-plastiske egenskaber for små værdier af trykstyrken. For stigende betonstyrker bliver den nedadgående gren af arbejdslinien stejlere, og det betyder, at betonen får en øget sprødhed, idet betonens brudtøjning samtidig aftager, se figur 2.6. Brudkarakteristikken ændres derfor for voksende betonstyrker.

Ved små betonstyrker vil bruddet i betonen ske ved brud i cementpastaen, således at brudlinierne går uden om tilslagspartiklerne. For store betonstyrker er det derimod tilslagets brudstyrke, der bestemmer den maksimale betonstyrke, idet vedhæftningen er af en sådan størrelsesorden, at der i betonen kan opbygges spændingskoncentrationer, der spalter tilslagspartiklerne, hvilket netop er karakteristisk for højstyrkebeton og den altafgørende årsag til højstyrkebetonens sprødhed.

2.3 Armering

Idet betonens trækstyrke kun udgør en brøkdel af trykstyrken, indlægges der armering i betonen til optagelse af eventuelle trækspændinger.

På figur 2.7 er vist en generel arbejdskurve for en armering med udpræget flydning påvirket til enakset træk.

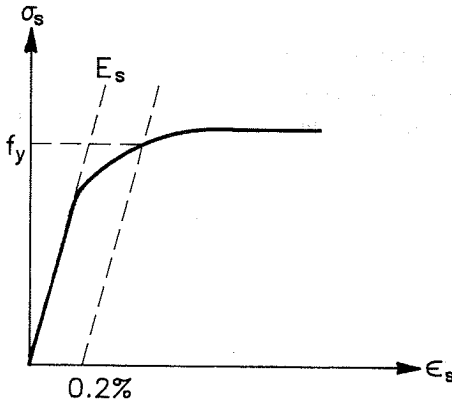


Figur 2.7 : Typisk arbejdskurve for en armering med udpræget flydning.

For armeringer med udpræget flydning vil overgangen fra det lineærelastiske til det ideal-plastiske område være forholdsvis brat. Armeringen vil, efter en kort overgang med ideal-plastiske egenskaber, igen få en spændingstilvækst på grund af tøjningshærdning. Denne tøjningshærdning vil variere fra armeringstype til armeringstype. Armeringstyper, der er karakteriseret ved en arbejdskurve som vist på figur 2.7, er kamstål og Fe 360. Den jævnt fordelte forlængelse efter brud vil for Fe 360 være ca. 25 %, mens den for svejsbare kamstål er ca. 10 % og ikke-svejsbare kamstål større end 3 %.

For armeringstyper uden udpræget flydning vil overgangen mellem det lineærelastiske og det plastiske område være glidende, se figur 2.8 . Flydespændingen defineres i dette tilfælde, som den spænding, der hører til 0.2 % - tøjningen. Armeringstyper der falder ind under denne gruppe er f.eks. tentorstål. Brudforlængelsen vil for tentorstål

normalt være væsentlig mindre end for kamstål.



Figur 2.8 : Typisk arbejdskurve for en armering uden udpræget flydning.

Armeringskurven, der hører til trykpåvirkningen, vil ikke blive behandlet her, men det skal nævnes, at trykflydespændingen normalt svarer til trækflydespændingen, men i enkelte tilfælde er den lavere end trækflydespændingen.

2.4 Plasticitetsteori for armeret beton

Betingelsen for at benytte nedre – og øvre værdisætningerne, (se afsnit 2.1.5) er, at materialet er ideal-plastisk.

Som det fremgår af figur 2.7, vil en armering med udpræget flydning og stor brudforlængelse tilnærmelsesvis opfylde denne betingelse. Til trods for at den ideal-plastiske sammenhæng ikke er eksakt opfyldt for armeringen, bl.a. på grund af tøjningshærdning, vil det være en tilnærmelse på den sikre side at benytte den ideal-plastiske model, karakteriseret ved trækflydespændingen f_y og trykflydespændingen f_y^* . Armeringen regnes kun at optage træk – og trykspændinger i længderetningen, d.v.s., at evt. forskydningsspændinger i armeringen negligeres. Ifølge nedreværdiprincippet vil en beregning baseret på, at der kun regnes med træk – og trykspændinger efter armeringens længderetning føre til en sikker spændingsfordeling i armeringen.

I de tilfælde, hvor et armeret betonlegemes bæreevne således primært er styret af armeringen, kan plasticitetsteorien anvendes uden problemer. Dette gælder f.eks. for bjælker, plader og skiver med små armeringsgrader.

Derimod vil det i de tilfælde, hvor betonens styrkeforhold er afgørende for bæreevnen, ikke være indlysende at bruge teorien for ideal-plastiske materialer, (se afsnit 2.2.3 figur 2.5).

Forsøg har imidlertid vist, at benyttes der en reduceret betonstyrke i de plastiske beregningsudtryk, er der en særdeles god overensstemmelse mellem teori og forsøg. Teoretisk kan dette udtrykkes ved, at den reduktion af betonstyrken, der skal benyttes, er bestemt af kravet om, at det indre arbejde i brudstadiet, for henholdsvis den virkelige konstruktion og den ideal-plastiske model, skal være identisk.

Af ovenstående fås betonens ideal-plastiske styrker med hensyn til tryk og træk

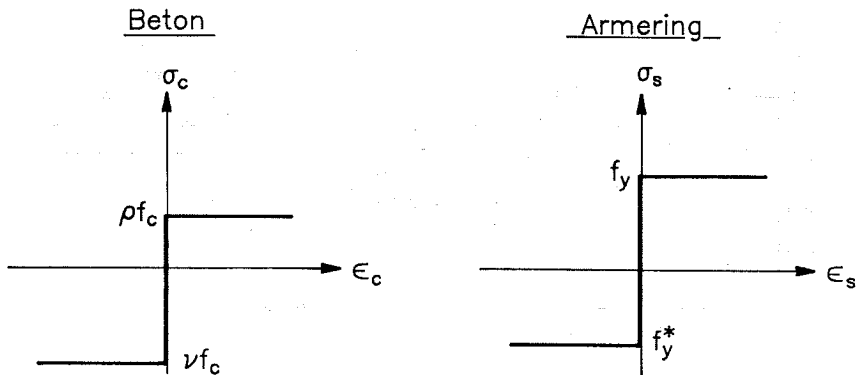
$$f_{cp} = \nu f_c \quad (2.30)$$

og

$$f_{tp} = \nu_{ten} f_t = \rho f_c \quad (2.31)$$

, hvor størrelserne ν , ν_{ten} og ρ kaldes effektivitetsfaktorerne, mens f_c og f_t er betonens enaksede tryk- og trækstyrke.

Dermed fås for de enaksede påvirkninger for henholdsvis beton og armering arbejdskurverne vist på figur 2.9.

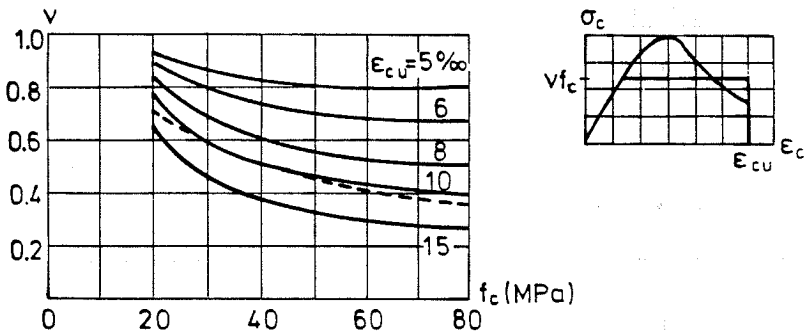


Figur 2.9 : De plastiske styrker ved enaksede påvirkninger for hhv. beton og armering.

Er bæreevnen primært styret af armeringen og betonens trykstyrke, kan betonens trækstyrke negligeres, det vil sige $\rho = 0$.

2.5 Effektivitetsfaktoren

I langt de fleste tilfælde har betonens trækstyrke, og dermed ρ , ingen indflydelse på bæreevnen. Normalt er bæreevnen således styret af flydning i armeringen og betonens trykstyrke, hvorfor betonens trækstyrke ikke spiller nogen rolle i brudstadiet. Det er kun for meget små armeringsgrader, at trækstyrken har en indflydelse, men disse tilfælde har ofte ingen praktisk betydning p.g.a. normregler vedrørende minimumsarmering. Derfor knytter interessen sig specielt til værdien af ν , som er den korrektionsfaktor, der tager højde for, at betonen ikke opfører sig idealplastisk under trykpåvirkning. En vurdering af effektivitetsfaktorens værdi kan fås ved sammenligning af den virkelige og den idealplastiske arbejdskurve for beton under enakset tryk, og for disse kræve, at de skal have samme indre arbejde, d.v.s. samme areal under kurven. En sådan sammenligning er foretaget af H. Exner [79.1]. Resultatet fremgår af figur 2.10.



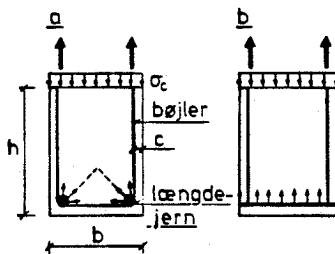
Figur 2.10 : Sammenligning mellem virkelig og idealplastisk arbejdskurve for beton.

Som det ses af figuren afhænger ν både af betonens trykstyrke og brudtøjningen ϵ_{cu} . ν 's afhængighed af f_c skyldes, at arbejdskurven for de stærkere betoner, i forhold til de svagere, falder relativt hurtigere efter passagen af toppunktet, se figur 2.6. Sammenhængen mellem ν og f_c kan tilnærmelsesvis beskrives v.h.a. en potensfunktion.

Det er kun for tilfældene ren bøjning og bøjning med normalkraft, at effektivitetsfaktoren kan bestemmes analytisk, netop fordi man i disse tilfælde kender tøjningstilstanden og dermed brudtøjningen. I alle andre tilfælde, f.eks. ren forskydning og ren vridning, er tøjningstilstanden for kompliceret til, at der kan opstilles analytiske udtryk til fastlæggelse af ν , og der kræves derfor forsøg til bestemmelse af effektivitetsfaktoren.

Effektivitetsfaktoren vil udover materialeafhængigheden, også være en funktion af belastningsforhold, geometri og armeringsforhold, og disse mange variable besværliggør en generel bestemmelse af ν .

Armeringsføringens indflydelse på ν er illustreret på figur 2.11, idet der med armeringsarrangementet vist på figur 2.11.a opstår trykkoncentrationer i betonen ved de længdearmeringsstænger, der er placeret i bøjlernes hjørner, mens dette ikke er tilfældet for armeringsudformningen vist i figur 2.11.b, hvor trykket fordeles jævnt v.h.a. tværlpladen.



Figur 2.11 : Forskellige armeringsudformninger.

ν vil være størst for armeringsudformningen vist i figur 2.11.b, idet der generelt gælder, at jo mere homogen tøjningstilstanden er i betonen, desto større er ν .

3 Teori for bjælker påvirket til ren vridning

3.1 Indledning

Teorien, der beskrives i dette afsnit, bygger på B. Feddersens licentiatprojekt [90.1] samt B. Feddersen og M. P. Nielsen [83.1], hvor der gives en plasticitetsteoretisk nedreværdiløsning for armerede betonbjælker med rektangulært tværsnit påvirket til ren vridning. I afsnittet angives det også, hvordan vridningsbæreevnen kan bestemmes ved anvendelse af den danske norm for betonkonstruktioner, DS 411 [84.2].

En brudmekanisme, der dog kun er geometrisk mulig under specielle forudsætninger, er angivet i afsnit 3.3, og en beregning af andre tværsnit omtales kort i afsnit 3.6.

I afsnit 3.5 ses der nærmere på de forhold, der har indflydelse på effektivitetsfaktoren ved vridning.

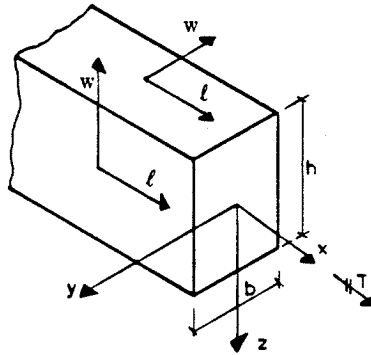
3.2 Plasticitetsteoretisk nedreværdiløsning

Til opstilling af en nedreværdiløsning kræves en statisk tilladelig og sikker spændingsfordeling. Der antages en jævn fordeling af forskydningsspændinger langs et tyndfliget tværsnit med konstant tykkelse, og som statisk tilladelig spændingsfordeling i bjælkens længderetning regnes med et skrå betontryk (diagonaltryk). Med denne spændingsfordeling opstilles ligevægtsligningerne i de enkelte armeringstilfælde.

Det vil i det følgende vise sig, at en udnyttelse af hele tværsnittet ikke i alle tilfælde giver den maksimale vridningsbæreevne, og for at opnå den optimale løsning stilles der derfor visse krav til tykkelsen af det tyndfligede tværsnit.

3.2.1 Bjælkebeskrivelse

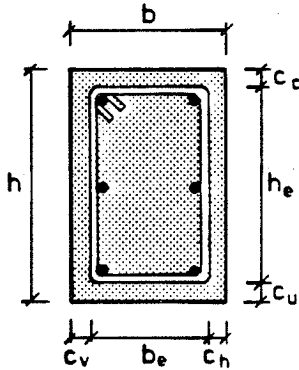
Den armerede betonbjælke beskrives i et (x,y,z) – koordinatsystem med x –aksen i bjælkens længderetning og sammenfaldende med bjælkens tyngdepunktslinie. Der indlægges endvidere et lokalt (ℓ,w) – koordinatsystem på bjælkens rande, således at ℓ –aksen er parallel med x –aksen, og (ℓ,w) – koordinatsystemet beskriver en omløbsretning mod uret, som vist på figur 3.1 .



Figur 3.1 : Bjælkebeskrivelse.

Bjælken tænkes belastet med et vridningsmoment T , parallel med x –aksen. T forudsættes at være konstant gennem hele bjælken.

Tværsnitsdata for bjælken fremgår af figur 3.2 .



Figur 3.2 : Bjælkens tværsnit.

Med de på figur 3.2 angivne dimensionsparametre defineres bjælkens effektive bredde hhv. højde ved

$$b_e = b - c_v - c_h \quad (3.1)$$

og

$$h_e = h - c_o - c_u \quad (3.2)$$

Bjælkens effektive højde–breddeforhold defineres ved

$$k = \frac{h_e}{b_e} \quad (3.3)$$

Bjælkens sider navngives, således at den effektive højde er større end eller lig den effektive bredde, hvilket betyder, at k altid vil være større end eller lig 1.

Armeringen regnes at bestå af lodrette bøjler med en indbyrdes afstand på a_w og af en længdearmering symmetrisk fordelt omkring bjælkets tværsnittets geometriske tyngdepunkt. Armeringsretningerne er således sammenfaldende med (ℓ, w) – retningerne.

Bøjlearmeringens areal pr. længdeenhed betegnes $A_{w\ell}$. Benævnes arealet af de

stænger, der benyttes som bøjler, A_w , gælder det, at $A_w \ell = \frac{A_w}{a_w}$.

Længdearmeringens samlede areal betegnes A_ℓ . Bøjlearmeringens trækflydespænding er f_{yw} , længdearmeringens trækflydespænding er $f_{y\ell}$, og betonen regnes at have den ideal-plastiske trykstyrke $\nu_t f_c$.

Bjælkens mekaniske længdearmeringsgrad er defineret ved

$$\Phi_\ell = \frac{A_\ell f_{y\ell}}{b_e h_e f_c} \quad (3.4)$$

, mens bjælkens mekaniske bøjlearmeringsgrad defineres ved

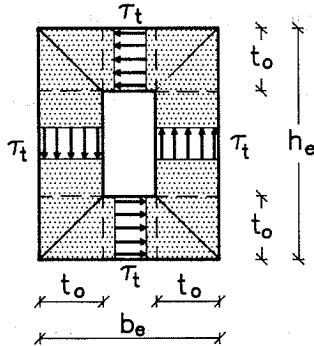
$$\Phi_w = \frac{2A_w \ell f_{yw}}{b_e f_c} = \frac{2A_w f_{yw}}{a_w b_e f_c} \quad (3.5)$$

Forholdet mellem de to armeringsgrader, kaldet det mekaniske bøjle-længdearmeringsgradsforhold, betegnes

$$\ell = \frac{\Phi_w}{\Phi_\ell} \quad (3.6)$$

3.2.2 Statisk tilladelig spændingsfordeling

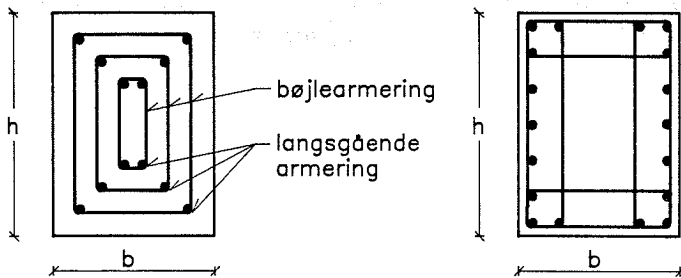
Forskydningsspændingerne, τ_t , hidrørende fra vridningsmomentet regnes ved brud at være jævnt fordelt over tykkelsen t_o , langs tværsnittets omkreds, som vist på figur 3.3. Dette område kaldes det effektive tværsnit.



Figur 3.3 : Effektivt tyndfliget tværsnit med jævnt fordelt forskydningspændinger.

Som det ses af figur 3.3, regnes det effektive tværsnit højest til bjællernes yderside, hvilket skyldes, at dæklaget, når brudstadiet nås, ikke i alle tilfælde kan regnes aktivt ved spændingsoptagelsen. Ved nogle vridningsforsøg har man således observeret afskalning af dæklaget, enten i form af hjørneafskalning eller en afskalning, hvor store dele af dæklaget evt. det hele, skubbes ud. Det har hidtil ikke været muligt at opstille beregningsudtryk til bestemmelse af, hvornår afskalning finder sted, hvilket primært skyldes, at forsøgsrapporter kun i begrænset omfang indeholder oplysninger om dæklagsafskalning. I afsnit 5 vil der i forbindelse med vurderingen af de opnåede forsøgsresultater gives en mere detaljeret analyse af dæklagets betydning for vridningsbæreevnen.

Når bjælken er revnet, kan den anførte spændingstilstand vist på figur 3.3 ikke regnes at være statisk tilladelig. Med de sædvanlige udformninger af armeringen, f.eks. som den på figur 3.2 viste, vil overgangsbetingelserne mellem områderne med tykkelsen t_o således ikke være eksakt opfyldt. Armeringsudformninger, der derimod opfylder disse betingelser, er illustreret på figur 3.4.



Figur 3.4 : Armeringsudformninger der opfylder teoriens forudsætninger.

I det følgende opfattes spændingsfordelingen i figur 3.3 dog som værende statistisk tilladelig, hvilket i virkeligheden kun gælder for t_0 lille, eller $k \rightarrow \infty$, d.v.s. for skivelig-nende bjælker.

Vridningsligevægt i brudstadiet medfører, jvf. figur 3.3

$$\begin{aligned}
 T_p = & \tau_t (h_e - 2t_0) 2t_0 \left(\frac{1}{2}b_e - \frac{1}{2}t_0\right) \\
 & + \tau_t (b_e - 2t_0) 2t_0 \left(\frac{1}{2}h_e - \frac{1}{2}t_0\right) \\
 & + \tau_t 4 \frac{1}{2} t_0^2 \left(\frac{1}{2}h_e - \frac{1}{3}t_0\right) \\
 & + \tau_t 4 \frac{1}{2} t_0^2 \left(\frac{1}{2}b_e - \frac{1}{3}t_0\right)
 \end{aligned} \quad (3.7)$$

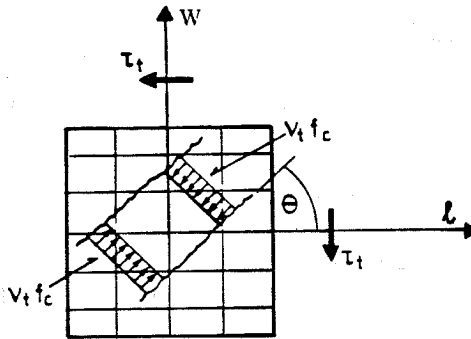
De to sidste bidrag i (3.7) hidrører fra trekantområderne ved tværsnittets hjørner, se figur 3.3 . Indføres i (3.7), det effektive højde-breddeforhold, k , og den dimensionsløse tykkelse af det effektive tværsnit, β , defineret ved

$$\beta = \frac{t_0}{b_e} \quad (3.8)$$

fås

$$T_p = 2\beta\tau_t b_e^3 \left[\frac{4}{3}\beta^2 - (1+k)\beta + k \right] \quad (3.9)$$

Et skiveelement af bjælken vist på figur 3.3 betragtes. For dette skiveelement regnes flydebetingelserne for armerede betonskiver udledt af M. P. Nielsen [84.1] gældende, således at den statisk tilladelige spændingsfordeling vist i figur 3.5 kan regnes at optræde.



Figur 3.5 : Statisk tilladelig spændingsfordeling i bjælkens længderetning.

Om spændingsfordelingen angivet i figur 3.5 gælder det, at tykkelsen af det effektive tværsnit netop antager en sådan værdi, at det enaksede betontryk har værdien $\nu_t f_c$.

Idet σ_{cl} og σ_{cw} betegner betonspændinger efter henholdsvis l - og w -aksen, samt θ er den vinkel det enaksede betontryk danner med l -aksen ved brud, fås følgende betonspændinger i (l, w) - koordinatsystem

$$\sigma_{cl} = -\nu_t f_c \cos^2 \theta \quad (3.10)$$

$$\sigma_{cw} = -\nu_t f_c \sin^2 \theta \quad (3.11)$$

$$|\tau_{clw}| = \nu_t f_c \sin \theta \cos \theta \quad (3.12)$$

Intern forskydningsligevægt i bjælken kræver

$$\tau_t = |\tau_{clw}| = \nu_t f_c \sin \theta \cos \theta \quad (3.13)$$

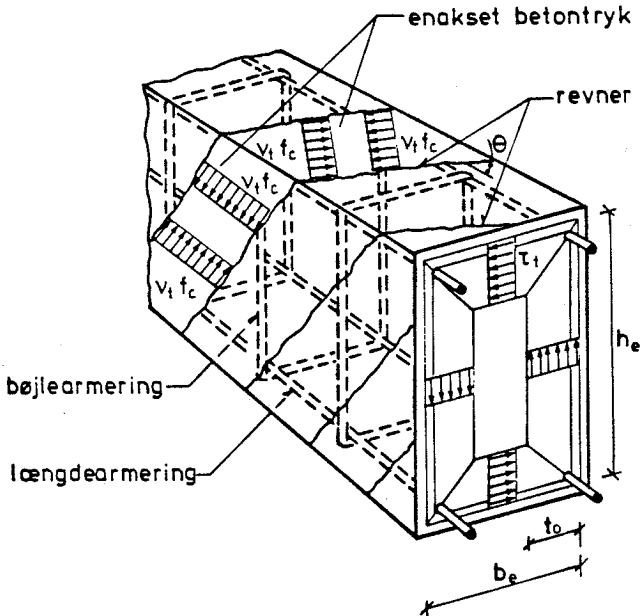
Indsættes dette udtryk for τ_t i (3.9) ændres denne til

$$T_p = 2\nu_t f_c b_e^3 \beta \left[\frac{4}{3}\beta^2 - (1+k)\beta + k \right] \cos \theta \sin \theta \quad (3.14)$$

Den dimensionsløse vridningsbæreevne defineres herefter ved

$$t_p = \frac{T_p}{b_e^3 f_c} = 2\nu_t \beta \left[\frac{4}{3}\beta^2 - (1+k)\beta + k \right] \cos \theta \sin \theta \quad (3.15)$$

Den statisk tilladelige spændingsfordeling i bjælken som helhed er illustreret på figur 3.6. Det bemærkes, at betontrykkets vinkel ikke nødvendigvis svarer til revnernes vinkel.



Figur 3.6 : Statisk tilladelig spændingsfordeling i bjælken som helhed.

3.2.3 Normaltarmerede bjælker

Flyder al armering ved brud, defineres bjælken som værende normaltarmet. Betragtes et snit vinkelret på x -aksen, se figur 3.1, findes ved projektion efter x -aksen følgende ligevægtsligning

$$A_{\ell} f_{y\ell} = 2(b_e + h_e - 2t_o)t_o \nu_t f_c \cos^2 \theta \quad (3.16)$$

, hvor $A_{ef} = 2(b_e + h_e - 2t_o)t_o$ er arealet af det effektive tværsnit.

I (3.16) medregnes kun den del af armeringen, der er symmetrisk fordelt om tværsnittets geometriske tyngdepunkt. Anvendes der forskellige armeringstyper, f.eks. i form af både slap og forspændt armering, erstattes $A_{\ell} f_{y\ell}$ med $\sum_{i=1}^n A_{\ell}^i f_{y\ell}^i$.

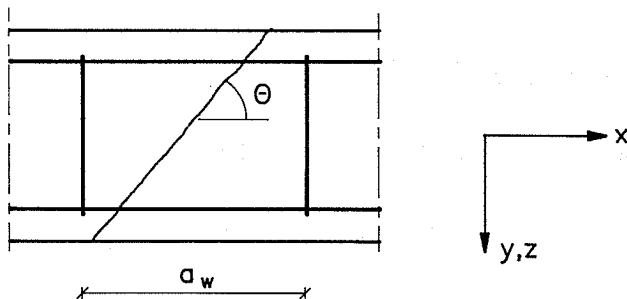
Indføres i (3.16) den mekaniske længdearmeringsgrad, Φ_{ℓ} , samt k og β findes

$$\Phi_{\ell} k = 2\nu_t \beta (1 + k - 2\beta) \cos^2 \theta \quad (3.17)$$

Betragtes et snit vinkelret på z -aksen, findes ved projektion efter z -aksen ligevægtsligningen

$$A_{w\ell} f_{yw} = \nu_t f_c t_o \sin^2 \theta \quad (3.18)$$

(3.16) og (3.18) udgør de styrende ligevægtsligninger i det normaltarmerede tilfælde. Ligning (3.18) gælder kun under forudsætning af, at bøjleafstanden ikke er for stor. Hvis bøjleafstanden er for stor, kan en revne dannes tværs over bjælkens højde eller bredde uden at krydse en bøjle, som vist på figur 3.7.



Figur 3.7 : Revne ved bjælkens overflade.

Som det fremgår af figuren, vil der kunne overføres trækspændinger til længdearmingen, men ikke til bøjlearmingen. Bruddet vil i dette tilfælde svare til det brud, som ville forekomme, hvis bjælken ingen bøjlearmering havde. Som en tilnærmelse kan følgende ulighed benyttes til bestemmelse af den maksimale bøjleafstand

$$a_w \leq \gamma \cot \theta b_e \quad (3.19)$$

, hvor γ er en sikkerhedsfaktor mindre end 1, og θ er betontrykkets vinkel med vandret ved brud. Det skal nævnes, at DS 411 foreslår $\gamma = 0.7$.

Indføres Φ_w og β i (3.18) findes

$$\Phi_w = 2\nu_t \beta \sin^2 \theta \quad (3.20)$$

Omskrives (3.20) til

$$\cos^2 \theta = 1 - \frac{\Phi_w}{2\nu_t \beta} \quad (3.21)$$

, og indsættes i (3.17) fås

$$\Phi_{\ell} k = 2(1 + k - 2\beta) \left(1 - \frac{\Phi_w}{2\nu_t \beta}\right) \beta \nu_t \quad (3.22)$$

Løses (3.22) med hensyn til β fås, idet størrelsen ℓ indføres,

$$\beta = \frac{1}{4\nu_t} \left[(1 + k)\nu_t + \ell \Phi_{\ell} - \sqrt{((1 + k)\nu_t - \ell \Phi_{\ell})^2 - 4\nu_t \Phi_{\ell} k} \right] \quad (3.23)$$

(3.23) bestemmer således den dimensionsløse tykkelse af det effektive tværsnit i det normaltarmerede område, svarende til, at $\sigma_c = \nu_t f_c$. Ved division af (3.17) op i (3.20) findes følgende udtryk til bestemmelse af θ

$$\tan^2 \theta = -\frac{\ell}{k} (1 + k - 2\beta) \quad (3.24)$$

For den dimensionsløse vridningsbæreevne haves, idet (3.9) og (3.13) er anvendt

$$t_p = \nu_t \beta \left(\frac{4}{3} \beta^2 - (1 + k)\beta + k \right) \sin 2\theta \quad (3.25)$$

Ved trigonometriske omformninger samt ved anvendelse af (3.20) kan (3.25) ændres til alene at afhænge af β

$$t_p = \left(\frac{4}{3} \beta^2 - (1 + k)\beta + k \right) \sqrt{\ell \Phi_{\ell} (2\nu_t \beta - \ell \Phi_{\ell})} \quad (3.26)$$

Den dimensionsløse vridningsbæreevne bestemt ved (3.26) ses efter nogle omskrivninger at stemme overens med den af M. P. Nielsen [84.1] angivne flydebetingelse for armerede betonskiver alene påvirket til forskydning. Denne lyder

$$\tau_t = \sqrt{f_{tw} f_{t\ell}} \quad (3.27)$$

hvor

$$f_{tw} = \frac{A_w \ell f_{yw}}{t_o} \quad (3.28)$$

og

$$f_{t\ell} = \frac{A_{\ell} f_{y\ell}}{2t_o(h_e + b_e - 2t_o)} \quad (3.29)$$

, og herefter kan vridningsbæreevnen bestemmes af (3.9). Den optimale værdi af t_o bestemmes af ligningen

$$\sigma_c = f_{t\ell} + f_{t_w} = \nu_t f_c \quad (3.30)$$

3.2.4 Overarmerede bjælker

Der kan fremkomme tre former for overarmering. Flyder længdearmeringen, men ikke bøjlearmeringen, er bjælken overarmeret efter bøjleretningen (OAB). Flyder bøjlearmeringen, men ikke længdearmeringen, er bjælken overarmeret efter længderetningen (OAL). Disse to armeringstilfælde benævnes under et partielt overarmering (OAP). Endelig haves armeringstilfældet, hvori bjælken er totalt overarmeret (OAT), som svarer til, at hverken bøjler eller længdearmering flyder ved brud.

Bjælken defineres som værende overarmeret, når β har nået en vis grænseværdi,

β_{ℓ} . Det vil i det følgende vise sig, at β_{ℓ} ikke i alle tilfælde vil være lig $\frac{1}{2}$, hvilket skyldes, at denne værdi for β_{ℓ} ikke altid giver den maksimale vridningsbæreevne. Det bemærkes, at $\beta_{\ell} = \frac{1}{2}$ svarer til, at hele tværsnittet $b_e \times h_e$ udnyttes.

Den dimensionsløse vridningsbæreevne i det overarmerede tilfælde er således

$$t_p = 2\nu_t \beta_{\ell} \left[\frac{4}{3} \beta_{\ell}^2 - (1+k)\beta_{\ell} + k \right] \cos \theta \sin \theta \quad (3.31)$$

I de tre overarmerede tilfælde fås følgende ligevægtsligninger til bestemmelse af θ

$$\text{OAB} : \Phi_{\ell} k = 2(1+k-2\beta_{\ell})\nu_t \beta_{\ell} \cos^2 \theta \quad (3.32)$$

$$\text{OAL} : \Phi_w = 2\nu_t \beta_{\ell} \sin^2 \theta \quad (3.33)$$

$$\text{OAT} : \theta = 45^\circ \quad (3.34)$$

(3.32) og (3.33) udgør de styrende ligninger i (OAP). I armeringstilfældet (OAT) udgør θ en fri parameter, som kan bestemmes ved maksimering af t_p med hensyn til θ . For den dimensionsløse vridningsbæreevne fås således

OAB :

$$t_p = \frac{[\frac{4}{3}\beta_\ell^2 - (1+k)\beta_\ell + k]}{1+k-2\beta_\ell} \sqrt{\Phi_\ell k [2(1+k-2\beta_\ell)\nu_t\beta_\ell - \Phi_\ell k]} \quad (3.35)$$

OAL :

$$t_p = [\frac{4}{3}\beta_\ell^2 - (1+k)\beta_\ell + k] \sqrt{\Phi_w(2\nu_t\beta_\ell - \Phi_w)} \quad (3.36)$$

OAT :

$$t_p = \nu_t\beta_\ell [\frac{4}{3}\beta_\ell^2 - (1+k)\beta_\ell + k] \quad (3.37)$$

3.2.5 Gyldighedsområder

Bjælken regnes at være normalt armeret, hvis β bestemt ved (3.23) opfylder kravet

$$\beta \leq \beta_\ell \quad (3.38)$$

Indsættes (3.38) i (3.23) findes

$$\eta_\ell k \leq (1+k-2\beta_\ell)(2\beta_\ell - \eta_w) \quad (3.39)$$

, som er betingelsen for normalt armerede bjælker. Der er i (3.39) indført de effektive mekaniske armeringsgrader i hhv. længde- og bøjleretningen bestemt ved

$$\eta_\ell = \frac{\Phi_\ell}{\nu_t} \quad (3.40)$$

og

$$\eta_w = \frac{\Phi_w}{\nu_t} \quad (3.41)$$

Indsættes $\ell = \frac{\eta_w}{\eta_\ell}$ i (3.39) fås

$$\eta_\ell \leq \frac{2\beta_\ell (1 + k - 2\beta_\ell)}{(1 - k - 2\beta_\ell)\ell + k} \quad (3.42)$$

Er (3.39) eller (3.42) ikke opfyldt, er bjælken overarmeret, d.v.s. $\beta = \beta_\ell$.

Er bjælken totalt overarmeret findes θ at være lig 45° . Hermed fås af udtrykkene (3.32) og (3.33) følgende krav at skulle være opfyldt, for at bjælken kan regnes totalt overarmeret:

$$\left\{ \begin{array}{l} \Phi_\ell > \frac{(1 + k - 2\beta_\ell)\nu_t\beta_\ell}{k} \\ \Phi_w > \nu_t\beta_\ell \end{array} \right\} \quad (3.43)$$

Af (3.43) følger, at bjælken er overarmeret efter længderetningen, når

$$\left\{ \begin{array}{l} \Phi_\ell > \frac{(1 + k - 2\beta_\ell)\nu_t\beta_\ell}{k} \\ \Phi_w \leq \nu_t\beta_\ell \end{array} \right\} \quad (3.44)$$

mens den er overarmeret efter bøjleretningen, når

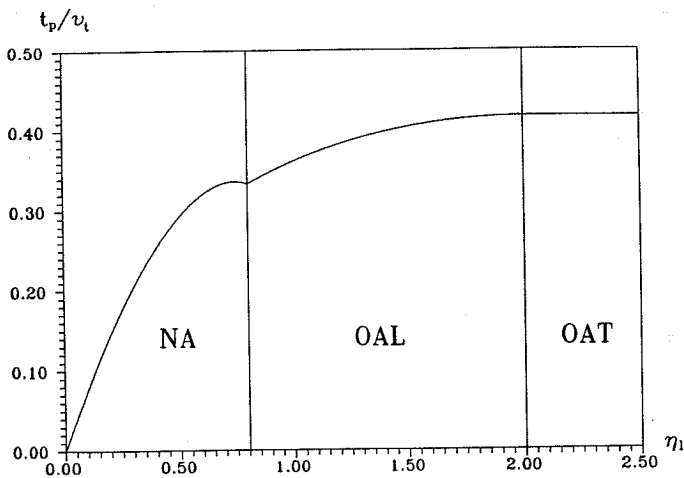
$$\left\{ \begin{array}{l} \Phi_\ell \leq \frac{(1 + k - 2\beta_\ell)\nu_t\beta_\ell}{k} \\ \Phi_w > \nu_t\beta_\ell \end{array} \right\} \quad (3.45)$$

3.2.6 Bestemmelse af β_ℓ .

Det ses umiddelbart, at β_ℓ må ligge i intervallet

$$0 \leq \beta_\ell \leq \frac{1}{2}$$

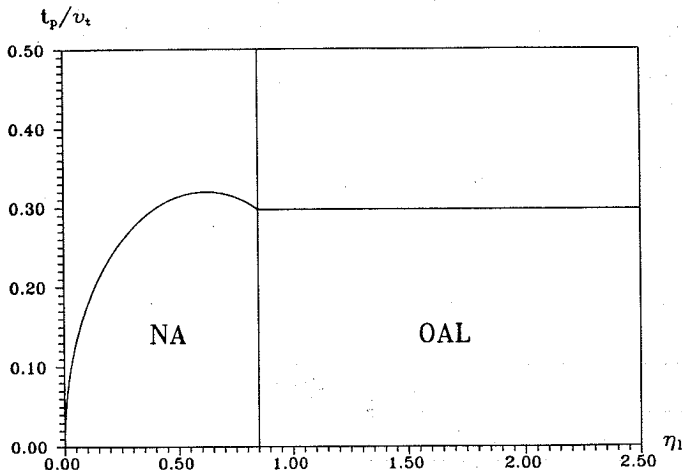
I figur 3.8 er en bæreevnekurve optegnet, som svarer til $\beta_\ell = \frac{1}{2}$. Bæreevnen, $\frac{t_p}{v_t}$, der er optegnet som funktion af η_ℓ , gælder for bjælker med parameterverdierne $k = 2$ og $\ell = \frac{1}{4}$.



Figur 3.8 : Snit i bæreevnefladen med parameterverdierne $k = 2$, $\ell = \frac{1}{4}$ og $\beta_\ell = \frac{1}{2}$.

Som det ses af figur 3.8, har bæreevnekurven et lokalt maksimum i det

normaltarmerede område. Dette forekommer fysisk set urimeligt, idet der må gælde, at bæreevnen aldrig kan mindskes ved en forøgelse af armeringsmængden. På figur 3.9 er en bæreevnekurve, hvor η_w er fastholdt, optegnet som funktion af η_ℓ , og det ses også på denne kurve, at værdien $\beta_\ell = \frac{1}{2}$ ikke giver den optimale nedrevværdiløsning. For at undgå denne manglende monoton i bæreevnekurven, indføres som tidligere nævnt en øvre grænse for β i det normaltarmerede område, nemlig β_ℓ . Værdien af β_ℓ vil i det følgende blive bestemt ved den værdi for β , der netop svarer til det lokale maksimumspunkt, se figur 3.9.



Figur 3.9 : Snit i bæreevneflade med parameterverdierne $k = 2$, $\eta_w = 0.15$ og $\beta_\ell = \frac{1}{2}$.

Indsættes (3.23) i (3.26), kan det lokale maksimumspunkt for bæreevnekurven findes som en løsning til $\frac{\partial t_p}{\partial \beta} = 0$ for fastholdt η_w . Hermed fås følgende ligning til bestemmelse af β_ℓ

$$20\beta_\ell^2 - [9(1+k) + 8\eta_w]\beta_\ell + 3(\eta_w + k + k\eta_w) = 0 \quad (3.46)$$

Løses (3.46) med hensyn til β_ℓ fås

$$\beta_\ell = \frac{1}{40} [x - \sqrt{x^2 - 240(\eta_w + k + \eta_w k)}] \quad (3.47)$$

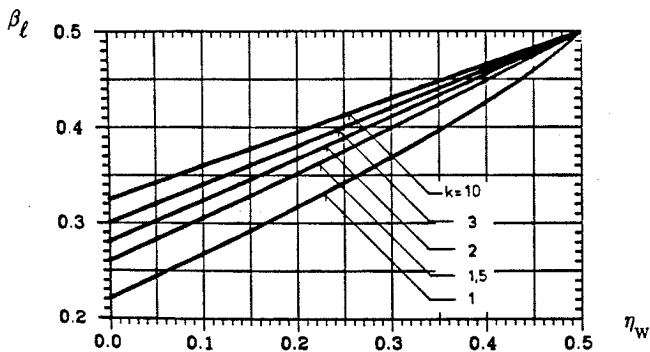
, hvor

$$x = 9(1 + k) + 8\eta_w \quad (3.48)$$

En undersøgelse af, hvornår β_ℓ vil være mindre end $\frac{1}{2}$, d.v.s., hvornår et lokalt maksimum vil optræde på bæreevnekurven, viser, at dette altid vil være tilfældet, når $\eta_w \leq \frac{1}{2}$. Hermed haves følgende udtryk til bestemmelse af β_ℓ

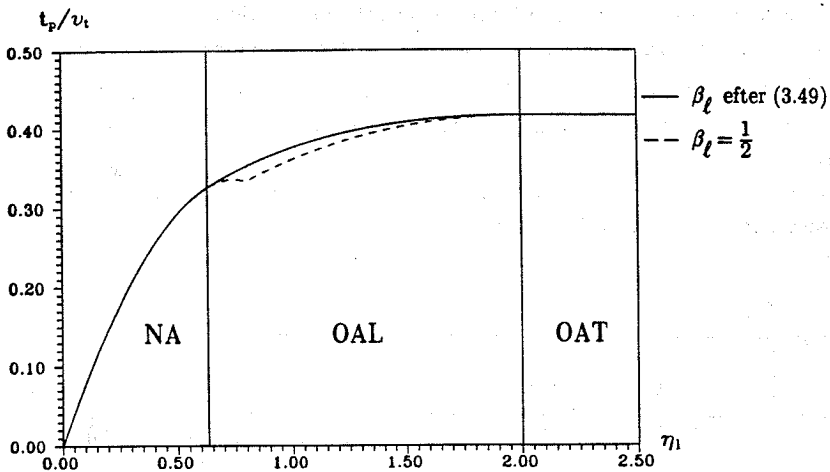
$$\beta_\ell = \left\{ \begin{array}{ll} \frac{1}{40} [x - \sqrt{x^2 - 240(\eta_w + k + k\eta_w)}] & \text{for } \eta_w < \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \text{for } \eta_w \geq \frac{1}{2} \end{array} \right\} \quad (3.49)$$

I figur 3.10 er funktionsudtrykket (3.49) vist grafisk.

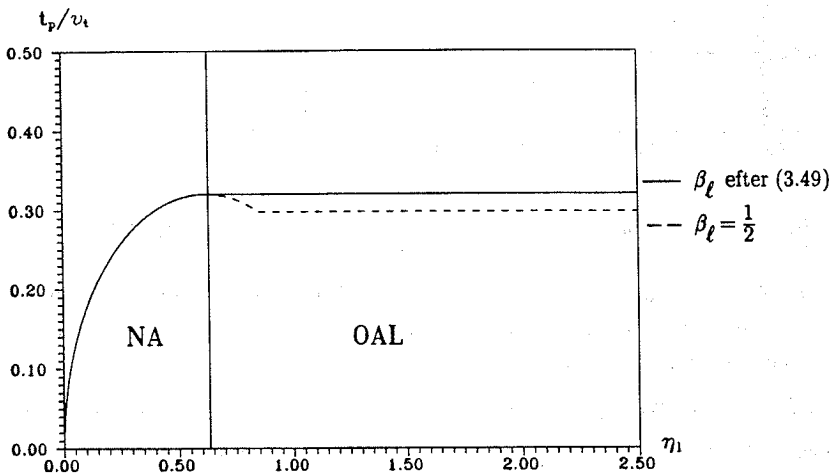


Figur 3.10 : Kurver til bestemmelse af β_ℓ .

Anvendes nu β_ℓ givet ved (3.49) til at optegne bæreevnekurverne vist i hhv. figur 3.8 og 3.9, ændres disse til de på hhv. figur 3.11 og 3.12 viste



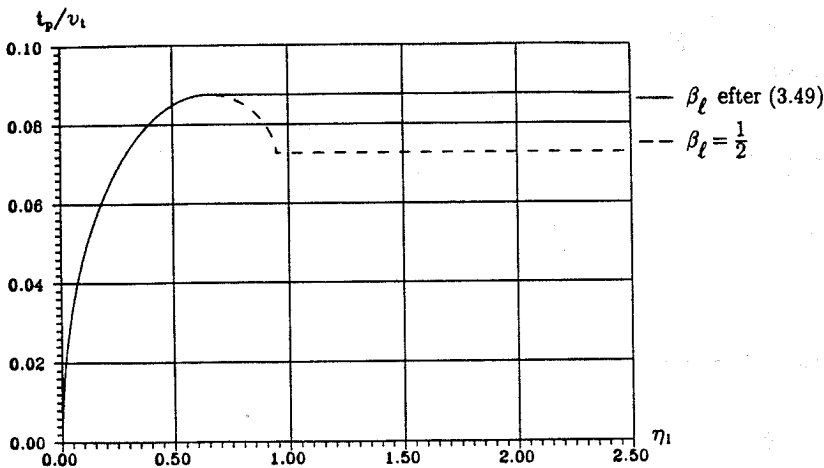
Figur 3.11 : Snit i bæreevneflade med parameterværdierne $k = 2$, $\ell = \frac{1}{4}$.



Figur 3.12 : Snit i bæreevneflade med parameterværdierne $k = 2$, $\eta_w = 0.15$.

Som det fremgår af figurene, er kravet om monotoni nu opfyldt.

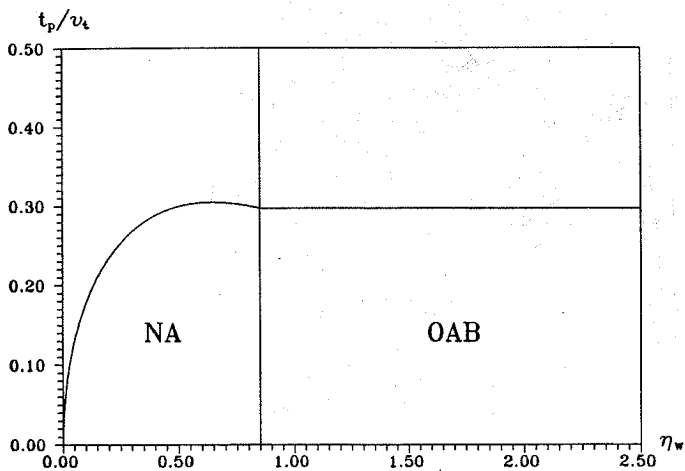
Bæreevneforøgelsen i procent, der opnås ved benyttelse af formel (3.49) i stedet for $\beta_\ell = \frac{1}{2}$, stiger for faldende værdier af det effektive højde-breddeforhold k og for faldende værdier af den effektive mekaniske bøjlearmeringsgrad η_w . For en bjælke, der er overarmeret efter længderetningen, og har parameterværdierne $k = 1$ og $\eta_w = 0.05$, d.v.s. en bjælke med kvadratisk tværsnit og relativ lidt bøjlearmering, opnås således en bæreevneforøgelse på ca. 20 %, se figur 3.13 .



Figur 3.13 : Snit i bæreevneflade med parameterværdierne $k = 1$ og $\eta_w = 0.05$.

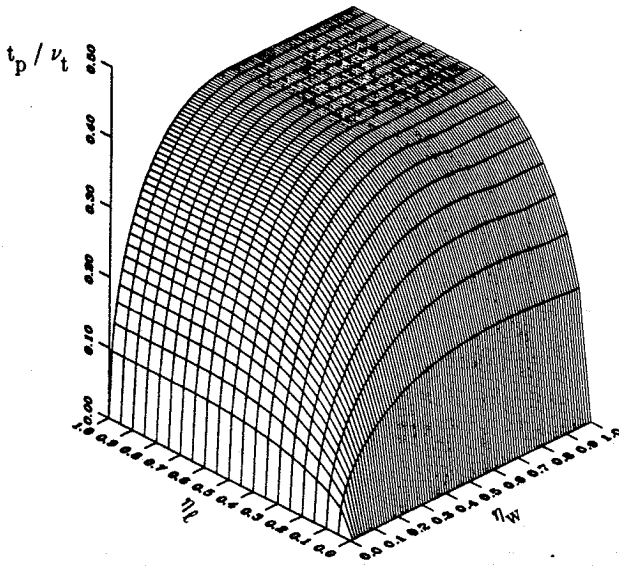
Det skal bemærkes, at den her anvendte beregningsmetode til bestemmelse af β_ℓ kun sikrer optimering af bæreevnen for bjælker, der er overarmeret efter længderetningen eller totalt overarmeret.

I det tilfælde, hvor $\eta_w > \frac{1}{2}$, og bjælken er overarmeret efter bøjleretningen, se formel (3.45), giver formel (3.49) værdien $\beta_\ell = \frac{1}{2}$. Optegnes nu bæreevnekurven med en fastholdt værdi af η_ℓ , se figur 3.14, fremgår det, at kurven har et lokalt maksimum i det normaltarmerede område.

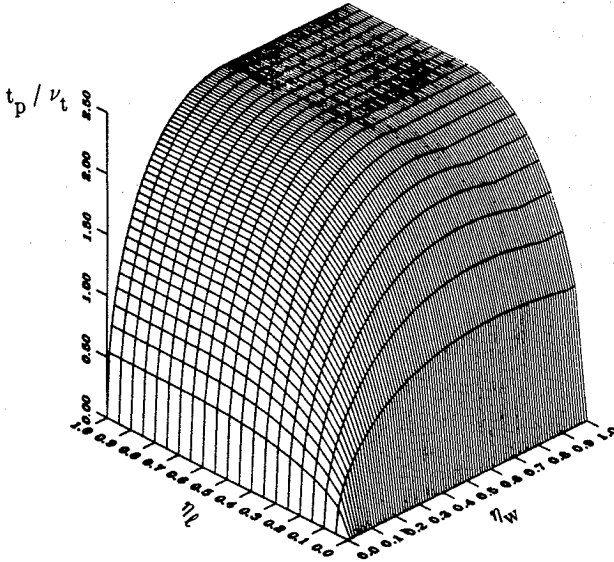


Figur 3.14 : Snit i bæreevneflade med parameterværdierne $k = 2$, $\eta_\ell = 0.15$ og β_ℓ efter (3.49).

En rumlig fremstilling af forholdene er vist på figur 3.15 og 3.16, som udgør bæreevnefladerne for hhv. $k = 2$ og $k = 10$. På akserne i den vandrette plan haves η_ℓ og η_w , og på akserne ud af planen er bæreevnen, $\frac{t_p}{v_t}$, angivet. Fladerne er optegnet v.h.a. programsystemet SURFER, idet programmerne "OAL" og "OAB", se [91.1], er anvendt til beregning af snitkurverne.



Figur 3.15 : Bæreevneflade for $k = 2$.



Figur 3.16 : Bæreevneflade for $k = 10$.

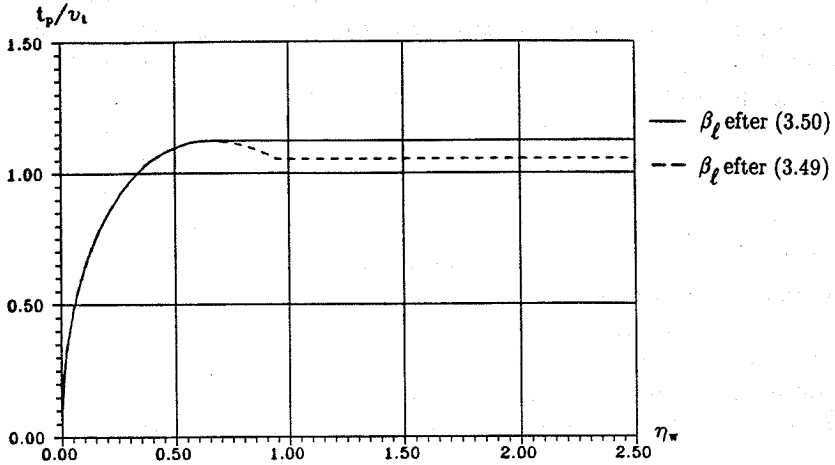
På figurene svarer frembringerkurverne parallel med η_ℓ -aksen til den fuldt optrukne kurve i figur 3.12, mens frembringerkurverne parallel med η_w -aksen svarer til kurven angivet i figur 3.14. Bæreevnekurverne svarende til $\ell = \text{konstant}$, se f.eks. figur 3.11, udgør på figurene 3.15 og 3.16 rumlige kurver, hvis projektioner på η_ℓ, η_w -planen er rette linier bestemt ved udtryk på formen $\eta_w = \eta_\ell \cdot \ell$. Det ses på bæreevnefladerne, at der optræder lokale maksima i η_w -retningen, mens den ønskede monoton derimod er opnået i η_ℓ -retningen. Derudover bemærkes, at for $k = 10$ er forskellen mellem maksimumspunkterne og den konstante værdi af bæreevnen for $\eta_w = 1.0$ større end tilfældet er for $k = 2$. Dette giver sig udtryk i, at frembringerkurverne parallel med η_w -aksen krummer mere for $k = 10$ end for $k = 2$. Med andre ord øges fejlen, der begås ved at benytte β_ℓ givet ved (3.49), med stigende værdier for k . Af bæreevnekurven fremgår det endvidere, at de lokale ekstrema er fladere for små værdier af η_ℓ , men til gengæld er forskellen mellem toppunkt og den konstante værdi af bæreevnen større.

Optimeringen af vridningsbæreevnen i η_w -retningen foretages ved at indføre en tilsvarende begrænsning β'_ℓ , af den effektive tykkelse i armeringstilfældet (OAB). β'_ℓ kan findes som en løsning til $\frac{\partial t_p}{\partial \eta_w} = 0$ for fastholdt η_ℓ , idet t_p er givet ved (3.26) og β ved (3.23). Dette fører til den i formel (3.50) givne 4. grads algebraiske ligning i β .

$$64\beta^4 - 96\beta^3(1+k) + 2\beta^2 [25(1+k)^2 + 4\eta_\ell k] - 3\beta [3(1+k)^3 + 2k(1+k) + \frac{8}{3}(1+k)\eta_\ell k] + 3\eta_\ell k(1+k^2) + 3k(1+k)^2 = 0 \quad (3.50)$$

Den analytiske løsning til formel (3.50) gives ikke her.

I [90.4] er ligningen løst iterativt i nogle udvalgte tilfælde, og det viser sig, at bæreevneforøgelsen i procent stiger for stigende værdier af det effektive højde-breddeforhold k og for faldende værdier af den effektive mekaniske længdearmeringsgrad η_ℓ . På figur 3.17 er bæreevnekurven for hhv. den efter formel (3.49) bestemte værdi af β_ℓ og den efter formel (3.50) optimerede værdi af β optegnet. Kurven gælder for $k = 10$ og $\eta_\ell = 0.05$, d.v.s en skivlignende bjælke med næsten ingen længdearmering, og en optimering i bøjleretningen giver i dette tilfælde en bæreevneforøgelse på ca. 7 %.



Figur 3.17 : Snit i bæreevneflade med parameterværdierne $k = 10$ og $\eta_{\ell} = 0.05$.

3.2.7 Beregningsudtryk

I dette afsnit samles resultaterne, således at den fuldstændige nedreværdiløsning, for en massiv, rektangulær bjælke med en armeringsudformning som den i figur 3.2 viste, opstilles. Som beskrevet i det foregående afsnit er nedreværdiløsningen for overarmerede bjælker optimal i armeringstilfældene (OAL) og (OAT), mens den for bjælker, der er overarmeret efter bøjleretningen (OAB) er en ganske god tilnærmelse til den optimale løsning.

Til bestemmelse af grænseværdien for den dimensionsløse tykkelse af det effektive tværsnit haves

$$\beta_{\ell} = \left\{ \begin{array}{ll} \frac{1}{40} [x - \sqrt{x^2 - 240(\eta_w + k + k\eta_w)}] & \text{for } \eta_w < \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \text{for } \eta_w \geq \frac{1}{2} \end{array} \right\} \quad (3.51)$$

, hvor $x = 9(1 + k) + 8\eta_w$ (3.52)

og $\eta_w = \frac{\Phi_w}{\nu_t}$

Ved hjælp af tabel 3.1 på næste side kan værdierne for θ , β og t_p fastlægges, og vridningsbæreevnen kan dermed bestemmes af

$$T_p = b_e^3 f_c t_p \quad (3.53)$$

tilfælde	betingelse	θ	β	t_p
NA	$\Phi_\ell \leq \frac{1}{k}(1+k-2\beta)(2\nu_\ell\beta_\ell - \Phi_w)$	$\text{Arctan} \left[\frac{\ell}{k}(1+k-2\beta) \right]$	$\frac{1}{4\nu_\ell} \left[(1+k)\nu_\ell + \Phi_w - \sqrt{[(1+k)\nu_\ell - \Phi_w]^2 - 4\nu_\ell\Phi_\ell k} \right]$	$\left[\frac{4}{3}\beta_\ell^2 - (1+k)\beta + k \right] \sqrt{\Phi_w(2\nu_\ell\beta_\ell - \Phi_w)}$
OAL	$\Phi_\ell > \frac{1}{k}(1+k-2\beta)(2\nu_\ell\beta_\ell - \Phi_w)$ $\Phi_\ell > \frac{(1+k-2\beta)\nu_\ell\beta_\ell}{k}$ $\Phi_w \leq \nu_\ell\beta_\ell$	$\text{Arctan} \left[\frac{\Phi_w}{2\nu_\ell\beta_\ell - \Phi_w} \right]$	β_ℓ	$\left[\frac{4}{3}\beta_\ell^2 - (1+k)\beta_\ell + k \right] \sqrt{\Phi_w(2\nu_\ell\beta_\ell - \Phi_w)}$
OAB	$\Phi_\ell > \nu_\ell - \Phi_w$ $\Phi_\ell \leq \frac{1}{2}\nu_\ell$ $\Phi_w > \frac{1}{2}\nu_\ell$	$\text{Arctan} \left[\frac{\nu_\ell - \Phi_\ell}{\Phi_\ell} \right]$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2} \left(k - \frac{1}{3} \right) \sqrt{\Phi_\ell(\nu_\ell - \Phi_w)}$
OAT	$\Phi_\ell > \frac{1}{2}\nu_\ell$ $\Phi_w > \frac{1}{2}\nu_\ell$	45°	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4} \nu_\ell \left(k - \frac{1}{3} \right)$

Tabel 3.1: Udtryk til bestemmelse af armeringstilfælde, θ , β og t_p for en massiv rektangulær bjælke med en armeringsudformning som vist i figur 3.2.

3.2.8 Beregning med dæklag

I afsnit 3.2.1 til 3.2.7 er der opstillet ligninger til bestemmelse af vridningsbæreevnen, hvor dæklaget ikke medregnes som en del af det effektive tværsnit. Medregnes derimod hele dæklaget til det effektive tværsnit, kan teorien givet i afsnit 3.2.1 – 3.2.7 umiddelbart anvendes, idet man indsætter

$$b_e = b \quad (3.54)$$

og

$$h_e = h \quad (3.55)$$

i alle formler.

Det bemærkes, at regnes hele dæklaget hørende med til det effektive tværsnit, som ved beregning af f.eks. ren bøjning, opnås en konsekvent beregningsmetode til kombineret vridning og bøjning.

3.3 Simplificeret beregningsudtryk – Bredts formel

I det følgende beskrives en tilnærmelsesmetode, der er på den sikre i forhold til nedreværdiløsningen givet i afsnit 3.2. Den i dette afsnit behandlede beregningsmetode danner grundlag for dimensioneringsvejledningen i den danske norm for betonkonstruktioner, DS 411 og den fælleseuropæiske norm for betonkonstruktioner, EC 2 [91.2].

Metoden består i at anvende samme vridningsmomentarm for trekantområderne som for flangerne af det effektive tværsnit, se figur 3.3 afsnit 3.2.2. Hermed ændres formel (3.7) afsnit 3.2.2 til

$$\begin{aligned}
 T_p = & \tau_t (h_e - 2t_o) 2t_o \left(\frac{1}{2}b_e - \frac{1}{2}t_o\right) \\
 & + \tau_t (b_e - 2t_o) 2t_o \left(\frac{1}{2}h_e - \frac{1}{2}t_o\right) \\
 & + \tau_t 4 \frac{1}{2} t_o^2 \left(\frac{1}{2}h_e - \frac{1}{2}t_o\right) \\
 & + \tau_t 4 \frac{1}{2} t_o^2 \left(\frac{1}{2}b_e - \frac{1}{2}t_o\right)
 \end{aligned} \tag{3.56}$$

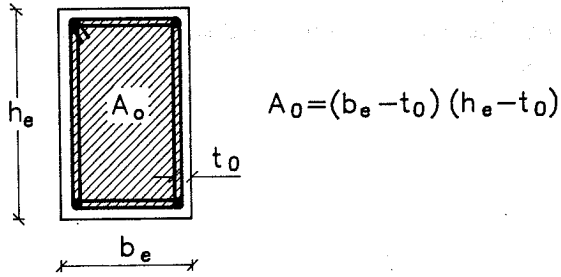
Indsættes $\beta = \frac{t_o}{b_e}$ og $k = \frac{h_e}{b_e}$ i (3.56) fås

$$T_p = 2\tau_t b_e^3 \beta (1 - \beta)(k - \beta) \tag{3.57}$$

, som er Bredt's formel, der måske er bedre kendt på formen

$$\tau_t = \frac{T_p}{2b_e^3 \beta (1 - \beta)(k - \beta)} = \frac{T_p}{2A_o t_o} \tag{3.58}$$

, hvor A_o er det areal, der omslutes af det tyndfligede tværsnits tyngdepunktslinie, se figur 3.18.

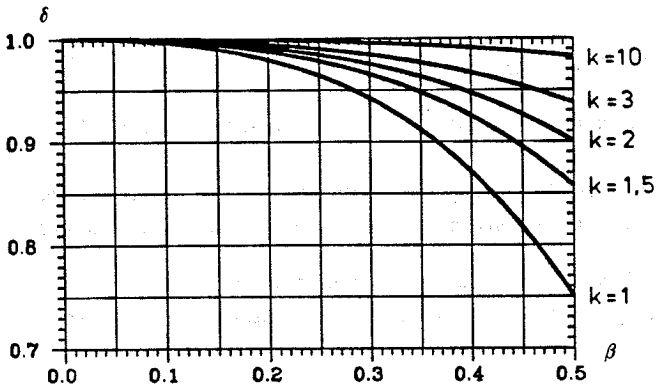


Figur 3.18 : Areal ved anvendelse af Bredt's formel.

Regnes τ_t og β at have samme værdi i (3.57) og (3.9), er forholdet mellem de to herved bestemte vridningsbæreevner, δ , givet ved

$$\delta = \frac{(1 - \beta)(k - \beta)}{\left[\frac{4}{3}\beta^2 - (1 + k)\beta + k \right]} \quad (3.59)$$

På figur 3.19 er (3.59) angivet grafisk.



Figur 3.19 : Bredt's formel kontra formel (3.9).

Det ses af figuren, at forskellen er størst for overarmerede bjælker ($\beta = 0.5$) med kvadratisk tværsnit.

Ligevægtsligninger til bestemmelse af armeringen kan sammenskrives til formel (3.30), d.v.s.

$$\sigma_c = f_{t\ell} + f_{tw} = \nu_t f_c \quad (3.60)$$

, hvor

$$f_{tw} = \frac{A_w \ell f_{y\ell}}{t_o} \quad (3.61)$$

og

$$f_{t\ell} = \frac{A_\ell f_{y\ell}}{2t_o(h_e + b_e - 2t_o)} \quad (3.62)$$

Af formel (3.60) kan man bestemme tykkelsen af det effektive tværsnit svarende til, at $\sigma_c = \nu_t f_c$, d.v.s. således, at betonstyrken udnyttes fuldt ud.

Som følge af ovenstående kan betontrykkets vinkel med vandret, θ , og den dimensionsløse tykkelse β bestemmes af tabel 3.1 afsnit 3.2.7, idet betonstyrken udnyttes fuldt ud. Vridningsbæreevnen bestemmes herefter ved at erstatte sidste søjle i tabellen med udtrykket

$$t_p = (1 - \beta)(k - \beta) \sqrt{\Phi_w(2\nu_t \beta - \Phi_w)} \quad (3.63)$$

Det skal fremhæves, at udtrykket (3.63) kun gælder for normalarmerede bjælker.

Princippet til bestemmelse af beregningsudtrykkene i de overarmerede tilfælde er det samme som for optimeringen af bæreevnen angivet i afsnit 3.2, idet Bredt's formel anvendes. Den optimale skivetykkelse β_ℓ bestemmes af differentiaalligningen $\frac{\partial t_p}{\partial \beta} = 0$ for fastholdt η_w , idet t_p er givet ved formel (3.63). Denne optimering er foretaget i [91.1], og her skal blot resultatet gives.

Den optimale dimensionsløse skivetykkelse er bestemt ved

$$\beta_{\ell} = \left\{ \begin{array}{ll} \frac{1}{10} [x - \sqrt{x^2 - 20(\eta_w + k + k\eta_w)}] & \text{for } \eta_w \leq \beta_w \\ \beta_w & \text{for } \eta_w > \beta_w \end{array} \right\} \quad (3.64)$$

, hvor $x = 3(1 + k) + 2\eta_w$ (3.65)

og $\beta_w = \frac{1}{3} (k - \sqrt{k^2 - k + 1} + 1)$ (3.66)

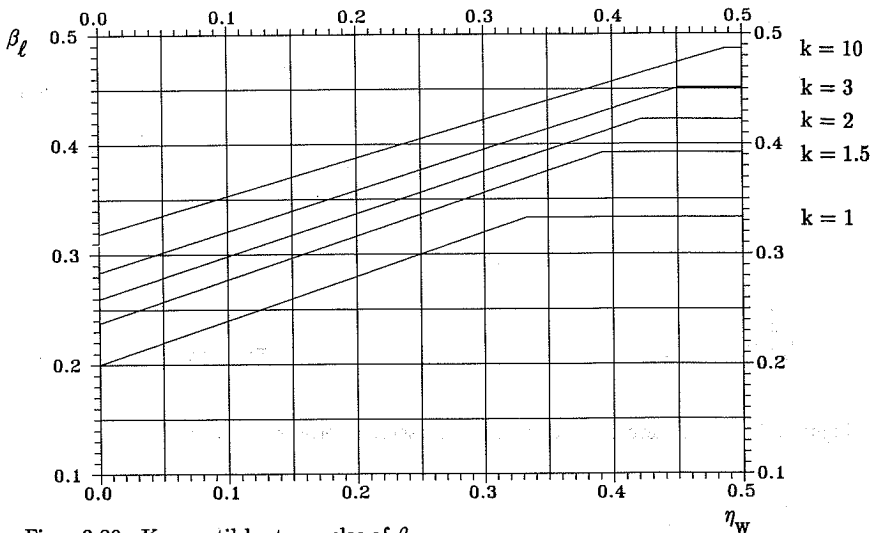
Med β_{ℓ} bestemt ved (3.64) kan den dimensionsløse vridningsbæreevne, t_p , bestemmes af tabel 3.2 på næste side, hvorefter bæreevnen kan findes af

$$T_p = b_e^3 f_c t_p \quad (3.67)$$

tilfælde	betingelse	θ	β	t_p
NA	$\Phi_\ell \leq \frac{1}{k}(1+k-2\beta)(2\nu_\ell\beta_\ell - \Phi_w)$	$\text{Arctan} \left[\frac{1}{k}(1+k-2\beta) \right]$	$\frac{1}{4\nu_\ell} \left[(1+k)\nu_\ell + \Phi_w - \sqrt{[(1+k)\nu_\ell - \Phi_w]^2 - 4\nu_\ell\Phi_\ell k} \right]$	$(1-\beta)(k-\beta) \left[\Phi_w(2\nu_\ell\beta - \Phi_w) \right]$
OAL	$\Phi_\ell > \frac{1}{k}(1+k-2\beta)(2\nu_\ell\beta_\ell - \Phi_w)$ $\Phi_\ell > \frac{(1+k-2\beta)\nu_\ell\beta_\ell}{k}$ $\Phi_w \leq \nu_\ell\beta_\ell$	$\text{Arctan} \left[\frac{\Phi_w}{2\nu_\ell\beta_\ell - \Phi_w} \right]$	β_ℓ	$(1-\beta_\ell)(k+\beta_\ell) \left[\Phi_w(2\nu_\ell\beta_\ell - \Phi_w) \right]$
OAB	$\Phi_\ell > \frac{1}{k}(1+k-2\beta)(2\nu_\ell\beta_\ell - \Phi_w)$ $\Phi_\ell \leq \frac{1}{k}(1+k-2\beta)\nu_\ell\beta_\ell$ $\Phi_w > \nu_\ell\beta_\ell$	$\text{Arctan} \left[\frac{2(1+k-2\beta)\nu_\ell\beta_w - \Phi_\ell}{\Phi_\ell} \right]$	β_w	$\frac{(1-\beta_w)(k-\beta_w)}{(1+k-2\beta_w)} \cdot \left[\Phi_\ell k[2(1+k-2\beta_w)\nu_\ell\beta_w - \Phi_\ell k] \right]$
OAT	$\Phi_\ell > \frac{1}{k}(1+k-2\beta)\nu_\ell\beta_\ell$ $\Phi_w > \nu_\ell\beta_\ell$	45°	β_w	$(1-\beta_w)(k-\beta_w)\nu_\ell\beta_w$

Tabel 3.2: Udtryk til bestemmelse af armeringsstørrelse, θ , β og t_p for en massiv rektangulær bjælke med en armeringsudformning som vist i figur 3.2.

På figur 3.20 er udtrykket (3.64) vist grafisk

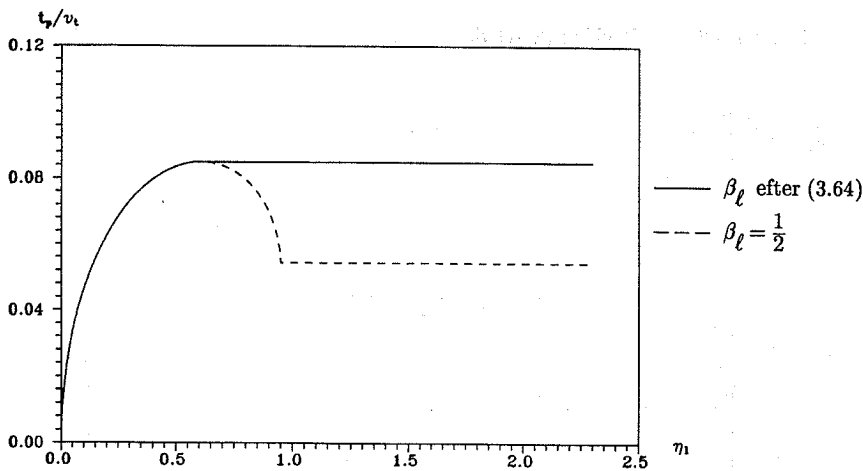


Figur 3.20 : Kurver til bestemmelse af β_l .

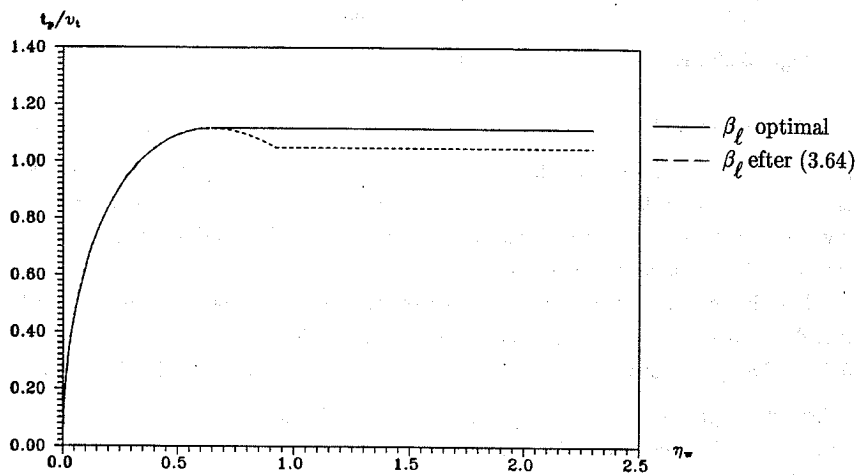
Bæreevneforøgelsen i procent, der opnås ved benyttelse af formel (3.64) i stedet for $\beta_l = \frac{1}{2}$, stiger for faldende værdier af k og for faldende værdi af η_w . For en bjælke, der er overarmeret efter længderetningen, og har parameterværdierne $k = 1$ og $\eta_w = 0.05$, d.v.s. en bjælke med kvadratisk tværsnit og relativ lidt bøjlearmering, opnås en bæreevneforøgelse på ca. 56 %, se figur 3.21.

Det skal nævnes, at optimeringen i det overarmerede tilfælde kun omfatter bjælker, der er overarmeret efter længderetningen eller totalt overarmeret. I armeringstilfældet (OAB) fører optimeringen til en 4. grads ligning i β_l , som ikke vil blive angivet. Fejlen, der begås ved at benytte $\beta_l = \frac{1}{2}$ for armeringstilfældet (OAB) øges med stigende værdier af k og faldende værdier af η_l .

På figur 3.22 er forskellen vist grafisk for en bjælke med parameterværdierne $k = 10$ og $\eta_l = 0.05$, d.v.s. en skiveligende bjælke med næsten ingen længdearmering. Den optimale løsning giver i dette tilfælde en bæreevneforøgelse på ca. 6 %.



Figur 3.21 : Snit i bæreevneflade med parameterværdierne $k = 1$ og $\eta_w = 0.05$.

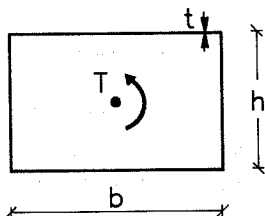


Figur 3.22 : Snit i bæreevneflade med parameterværdierne $k = 10$ og $\eta_\ell = 0.05$.

3.4 Geometrisk mulig brudfigur

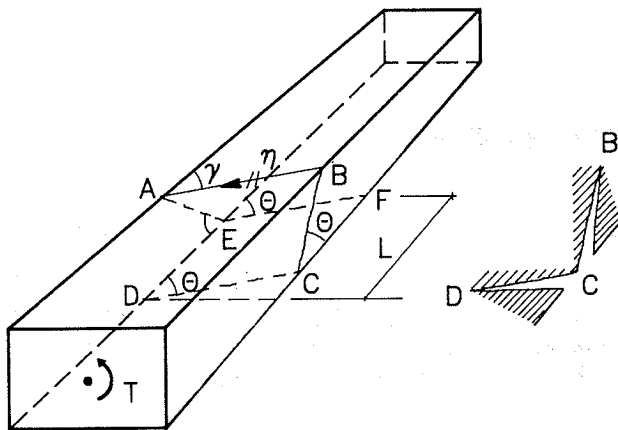
Der findes i litteraturen ingen generel anvendelig øvreværdiløsning i tilfældet ren vridning. For små værdier af β , d.v.s. for $\Phi_l \ll \frac{1}{2} \nu_t$ og $\Phi_w \ll \frac{1}{2} \nu_t$ har P. Müller [76.1] dog fundet en geometrisk mulig brudfigur, som beskrives nærmere i det følgende.

For små værdier af t_0 , kan den massive bjælke opfattes som værende statisk ækvivalent til en bjælke med et tyndfliget tværsnit, se figur 3.23.



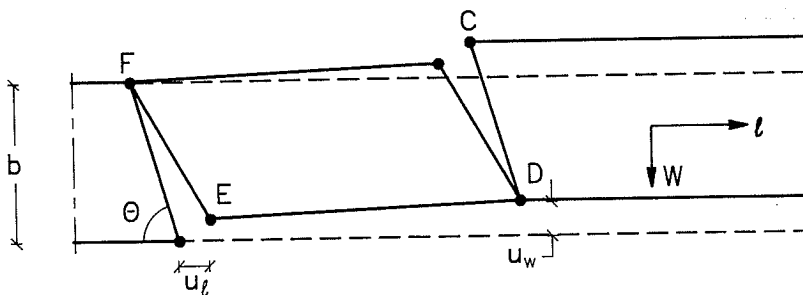
Figur 3.23 : Bjælke med tyndfliget tværsnit.

De enkelte flanger antages at være ens armeret og forskydningsspændingerne regnes jævnt fordelt over tykkelsen t . På figur 3.24 er en del af den endelige brudfigur vist. Figuren viser princippet i brudmekanismen, men udgør ikke den fuldstændige geometrisk mulige brudfigur.



Figur 3.24 : Principtegning til illustration af brudmekanismen.

Bjælken antages at rotere om en i overflangen beliggende linie AB, se figuren, der danner vinklen γ med bjælkens længdeakse. Fra denne rotationslinje udgår der to ens brudlinier, som begge løber via sideflangen og videre derfra over underflangen til hhv. punkt D og F. Brudlinien danner både i sideflangen og underflangen vinklen θ med længdeaksen. Betragtes den ene af brudlinierne, f.eks den der udgår fra B og slutter i D, se figur 3.24, vil brudstykket BC ved rotationen om AB åbne sig, og denne bevægelse medfører, at DC ligeledes vil åbne sig. Da der ikke er nogen rotationslinje i overflangen ved D, sker der ingen gensidig flytning i dette punkt. På figur 3.25 er deformationstilstanden i bjælkens underflange vist.



Figur 3.25 : Deformationstilstand i bjælkens underflange.

Regnes punkt D at få flytningerne u_ℓ og u_w ved rotationen η , se figur 3.24 og 3.25, kan følgende sammenhæng opskrives

$$u_\ell = \eta h \sin \gamma \quad (3.68)$$

$$u_w = \eta h \cos \gamma \quad (3.69)$$

$$u_w = \frac{L}{b} u_\ell \quad (3.70)$$

I (3.70) er L udstrækningen af hele brudlinieforløbet målt langs længdeaksen, se figur 3.24, og værdien af L kan findes af

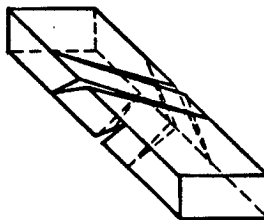
$$L = 2(b + h)\cot\theta - b \cot \gamma \quad (3.71)$$

Af ovenstående ligninger findes følgende sammenhæng mellem γ og θ

$$\cot \gamma = \left(1 + \frac{h}{b}\right)\cot \theta \quad (3.72)$$

Den fuldstændige geometrisk mulige brudfigur fås ved at kombinere den på figur 3.24 viste med en tilsvarende brudfigur, hvor rotationsaksen ligger i underflangen.

Brudfiguren er vist på figur 3.26 .



Figur 3.26 : Geometrisk mulig brudfigur ved vridning.

Opstilles arbejds ligningen på den i figur 3.26 viste brudfigur, og minimeres der m.h.t. θ , vil løsningen givet ved formlerne (3.27)–(3.30) fremkomme, idet det er forudsat, at $t_0 \ll \frac{b}{2}$.

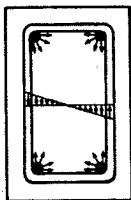
Ovenstående brudfigur er fundet under forudsætning af et tyndfliget tværsnit, men P. Müller [76.1] har for bjælker med massivt tværsnit fundet den samme brudfigur, idet der stadig regnes med et spændingsaktivt tyndfliget tværsnit. Med andre ord, er nedreværdiløsningen angivet i afsnit 3.2.1 – 3.2.7 en eksakt løsning for små værdier af t_0 .

Det skal igen understreges, at den angivne brudfigur ikke generelt vil være geometrisk mulig, idet den forudsætter, at der er flydning i både bøjle- og længdearmring samt, at betonen ikke knuses.

For overarmerede bjælker, hvor bruddet alene er styret af betonens plastiske trykstyrke, vil den angivne brudfigur således ikke være geometrisk mulig, hvilket skyldes, at brudlinierne angivet i figur 3.26 er hindret i at åbne sig, idet der ikke forekommer flydning i armeringen.

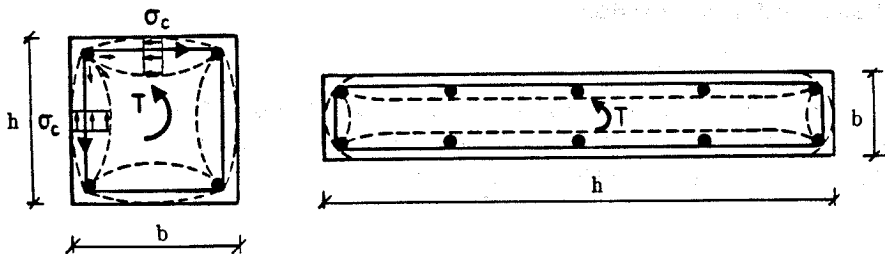
3.5 Effektivitetsfaktoren ved vridning

Som det blev beskrevet i afsnit 2.5 afhænger effektivitetsfaktoren ν af tøjningstilstanden i brudøjeblikket. I tilfældet ren vridning er tøjningstilstanden ved brud ret kompliceret, som det er forsøgt at illustrere i figur 3.27 .

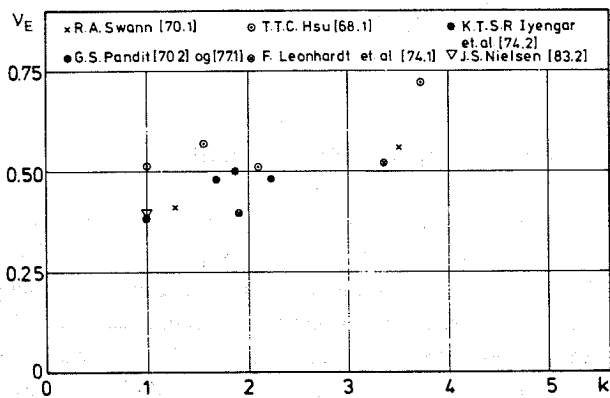


Figur 3.27 : Tøjningstilstand for en bjælke påvirket til ren vridning.

Som det fremgår af figuren, er tøjningstilstanden primært sammensat af to virkninger, dels fra den rene vridningspåvirkning og dels fra de langsgående hjørnestængers tryk på betonen, som fremkommer p.g.a. bøjlernes træk i hjørnestængerne. Virkningen af hjørnestængernes tryk på betonen er mest udpræget for kvadratiske tværsnit og mindre for slanke tværsnit, se figur 3.28 , hvilket skyldes, at trykket i det sidstnævnte tilfælde overføres over en større strækning, og hjørneeffekten vil derfor kun have en lokal betydning. Med andre ord er spændingstilstanden mere homogen for slanke tværsnit, og derfor vil ν_t -værdien være større, hvilket også er blevet bekræftet ved forsøg, se figur 3.29 .



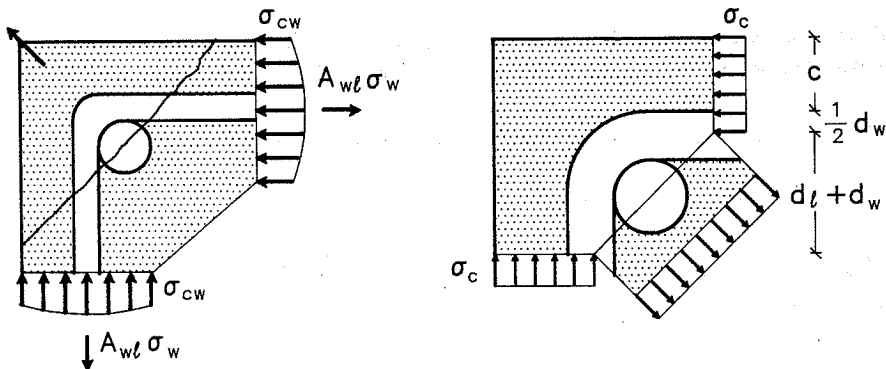
Figur 3.28 : Spændingsforholdene i hhv. kvadratiske og skive lignende bjælker.



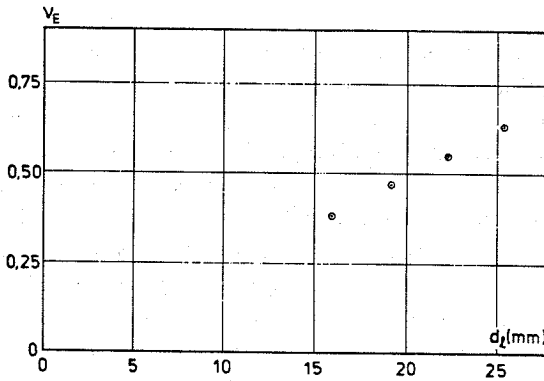
Figur 3.29 : Sammenhæng mellem ν_t og k for overarmerede bjælker med konstant betonstyrke .

Det har hidtil ikke været muligt at bestemme ν_t teoretisk p.g.a. den komplicerede tøjningstilstand ved brud, og ν_t kan således kun bestemmes ved forsøg. Til bestemmelse af ν_t kræves forsøg med totalt overarmerede bjælker, idet vridningsbæreevnen i dette tilfælde styres af betonens trykstyrke.

Som angivet i M.P. Nielsen et al. [83.4] fandtes ν for ren bøjning at være en funktion af både betonens trykstyrke, armeringens flydespænding og det geometriske armeringsforhold. Sidstnævnte forhold fandtes dog at kunne negligeres. Ved ren vridning synes det således også rimeligt at antage, at ν_t afhænger af ovennævnte parametre. På figur 3.30 er illustreret kraftligevægten for et hjørne i tværsnittet. Det ses, at betontrykket søger at skubbe hjørnet ud, mens trækraften i bøjljen holder sammen på hjørnet. Denne kraftligevægt giver trækspændinger i betonen, hvilket kan medføre, at hjørnet skaller af. Den specielle spændingstilstand i hjørnet gør, at ν_t også må formodes at afhænge af diameteren af de langsgående stænger. Hjørnestængernes diameter har indflydelse på hjørnedæklagets afskalning, idet en større diameter betyder, at den udadrettede trækresultant i hjørnet, se figur 3.30, overføres over et større areal. Dette giver en større ν_t -værdi, hvilket forsøg også har vist, se figur 3.31.



Figur 3.30 : Spændingsforholdene ved tværsnittets hjørner.



Figur 3.31 : Sammenhæng mellem ν_t og diameteren af længdestængerne for overarmerede bjælker med konstant betonstyrke [68.1].

Endelig spiller forholdet mellem armeringsmængderne efter de to retninger ind på ν_t , hvilket skyldes, at dette forhold til dels bestemmer beliggenheden af det skrå betontryk.

Effektivitetsfaktoren ved vridning vil således kunne skrives på følgende form:

$$\nu_t = f(f_c, f_{yl}, f_{yw}, k, d_l, \ell) \quad (3.73)$$

I [90.1] er der foreslået følgende ν_t -funktion, idet dæklaget ikke medregnes ved spændingsoptagelsen

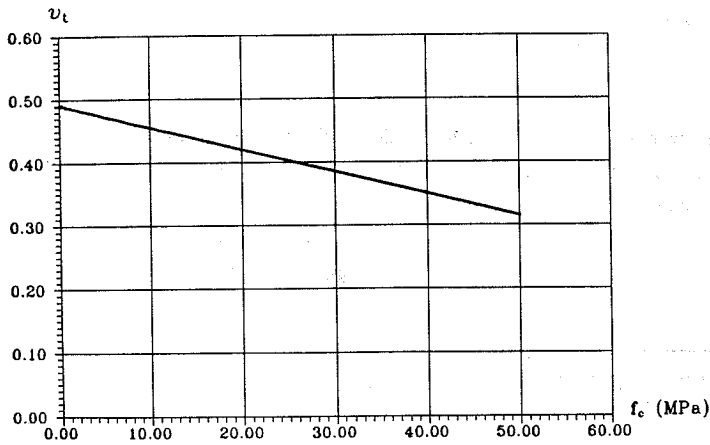
$$\nu_t = \begin{cases} 0.50 + \frac{k}{20} + \frac{d_l}{200k} - \frac{f_c}{300} - \frac{f_y}{8000} & \text{for } k \leq 4 \\ 0.74 - \frac{f_c}{300} - \frac{f_y}{8000} & \text{for } k > 4 \end{cases} \quad (3.74)$$

Funktionen (3.74) hører til teorien givet i afsnit 3.2.1 – 3.2.7, og må endvidere kun anvendes for $f_c \leq 60$ MPa, $d_l \leq 30$ mm og $f_y \leq 1000$ MPa. For f_y anvendes en middelværdi af f_{yw} og f_{yl} .

I DS 411 er der anvendt en ν_t -funktion, hvor den eneste parameter er betonens trykstyrke. Funktionen er givet i formel (3.75), idet hele dæklaget medregnes.

$$\nu_t = 0.7 \left(0.7 - \frac{f_c}{200} \right) \quad , \quad f_c \leq 50 \text{ MPa} \quad (3.75)$$

På figur 3.32 er udtrykket (3.75) vist grafisk



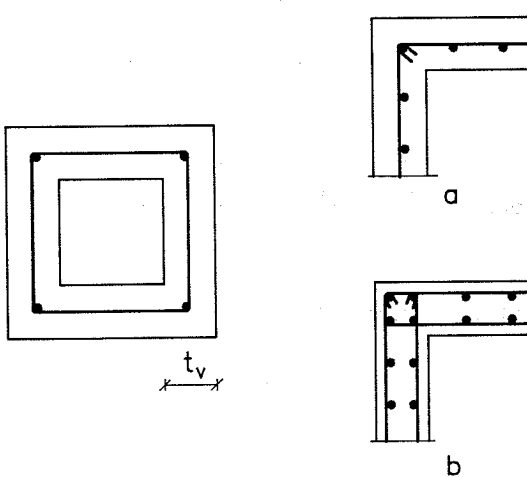
Figur 3.32 : Effektivitetsfaktoren i.h.t. DS 411 .

3.6 Andre tværsnit og armeringsudformninger

Nedreværdiløsningen i afsnit 3.2.1 – 3.2.7 er opstillet under forudsætning af, at bjælken har et massivt, rektangulært tværsnit, og løsningen er derfor ikke generel anvendelig for bjælker med andre tværsnitsudformninger. For et hult, rektangulært tværsnit, se figur 3.33, kan formlerne i afsnit 3.2.1 – 3.2.7 dog umiddelbart anvendes, idet den optimale skivetykkelse t_ℓ , højst må regnes lig den virkelige flangetykkelse, d.v.s.

$$\beta_\ell \leq \beta_v = \begin{cases} \frac{t_v}{b_e} \\ \frac{t_v - c}{b_e} \end{cases} \quad (3.76)$$

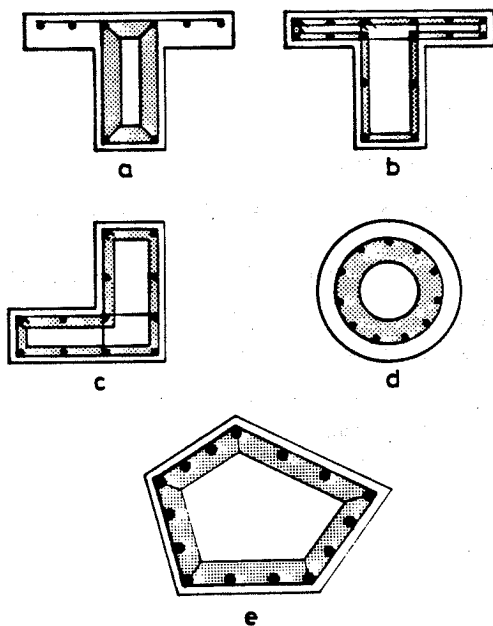
I (3.76) er øverste krav gældende, hvis hele dæklaget medregnes til det effektive tværsnit, mens det nederste krav er gældende, hvis dæklaget ikke regnes aktivt ved spændingsoptagelsen.



Figur 3.33 : Bjælke med hult, rektangulært tværsnit.

Tværarmeringen i flangerne kan enten udføres som angivet i figur 3.33.a med kun en enkelt lukket bøjle eller som i figur 3.33.b med lukkede bøjler i de enkelte flanger. I sidstnævnte tilfælde vil ν_t -værdien være størst, hvilket skyldes, at hjørnestængernes tryk på betonen reduceres med denne armeringsføring, og i dette tilfælde kan ν -værdien ved forskydning benyttes.

Generelt må det effektive tværsnit kun omfatte de områder i tværsnittet, hvor der er lukkede bøjler. For T-bjælken vist i figur 3.34.a må kun bjælkens krop regnes spændingsaktiv, selv om flangen i et vist omfang bidrager ved vridningsoptagelsen. Den herved bestemte vridningsbæreevne vil derfor være på den sikre side. I figur 3.34 er der også angivet effektive tværsnit for andre tværsnit og armeringsudformninger.



Figur 3.34 : Eksempler på effektive tværsnit.

For T-tværsnittet angivet i figur 3.34.b , hvor der også i flangen findes lukkede bøjler, kan vridningsbæreevnen beregnes som summen af flangens bæreevne og det resterende rektangulære tværsnits bæreevne. Vridningsbæreevnen af hvert deltværsnit kan bestemmes af følgende udtryk, idet bjælken forudsættes normaltarmet.

$$f_{tw} = \frac{A_{wl} f_{yw}}{t_o} \quad (3.77)$$

$$f_{tl} = \frac{A_l f_{yl}}{A_{ef}} \quad (3.78)$$

$$f_{tl} + f_{tw} = \nu_t^* f_c \quad (3.79)$$

$$T_p = S_{ef} r_t = S_{ef} \sqrt{f_{tw} f_{tl}} \quad (3.80)$$

Parameterne A_{ef} og S_{ef} er hhv. arealet af det effektive tværsnit og kraftresultantens statiske moment om det geometriske tyngdepunkt for deltværsnittet, mens ν_t^* er effektivitetsfaktoren i det generelle tilfælde.

Det bemærkes, at (3.79) bestemmer tykkelsen af det effektive tværsnit, således at $\sigma_c = \nu_t^* f_c$. Som udtryk for S_{ef} kan benyttes $S_{ef} = 2t_o A_o$, hvor A_o er arealet af området beliggende inden for tyngdepunktslinien af det effektive tværsnit. Det er ikke muligt her at angive et udtryk for effektivitetsfaktoren ν_t^* p.g.a. den begrænsede mængde forsøg, der er udført med ikke-rektangulære tværsnit.

4 Beregning i.h.t. normer

4.1 Den danske norm for betonkonstruktioner, DS 411

I det følgende beskrives dimensioneringsprincippet i den danske norm for betonkonstruktioner DS 411 [84.2]. Dimensioneringen er baseret på den simplificeret beregningsmetode angivet i afsnit 3.3. I DS 411 tillades det at regne hele dæklaget aktivt ved optagelsen af det vridende moment, d.v.s.

$$b_e = b \quad (4.1)$$

og

$$h_e = h \quad (4.2)$$

I normen regnes der som i det foregående med et effektivt tværsnit i form af et tyndfliget, lukket tværsnit med jævnt fordelt forskydningspændinger. Tykkelsen af det effektive tværsnit må højst sættes til 1/6 af diameteren af den største cirkel, der kan indskrives i tværsnittet. Dette benyttes også for ikke-massive tværsnit, hvor tykkelsen dog maksimalt må regnes lig bjælkens virkelige vægtykkelse.

Ud fra et teoretisk synspunkt findes der ingen umiddelbar begrundelse for denne øvre grænse for den effektive vægtykkelse. Begrænsningen er sandsynligvis fremkommet ved, at man på et tidligere tidspunkt ønskede at bringe sig lidt på den sikre side ved at se bort fra den inderste kerne af betonen.

I normen gives der en dimensioneringsvejledning, d.v.s. en metode til bestemmelse af armeringen i de to retninger til optagelse af et givet vridningsmoment T . Det skal bemærkes, at vejledningen kun omhandler normaltarmerede bjælker, d.v.s. bjælker hvor både længde- og bøjlearmering flyder ved brud.

Ved dimensionering af en bjælke, der skal optage det regningsmæssige vridningsmoment T_d , bestemmes den formelle forskydningspænding af (4.3)

$$\tau_t = \frac{T_d}{2A_o t_o} \quad (4.3)$$

, hvor

A_o er det areal der omslutes af det tyndfliget tværsnits midtlinie.

t_o er den effektive vægtykkelse, som højest sættes til $t_o = b/6$.

Normen tillader en vis frihed m.h.t. fordelingen af armeringen i bøjle- og længderetningen, idet det blot kræves, at

$$\frac{1}{2} \leq \cot \theta \leq 2 \quad (4.4)$$

, hvor θ er betontrykkets vinkel med bjælkens længdeakse. Den øvre grænse i (4.4) er et konstruktivt krav, og det sikrer normalt mod dannelse af uacceptable diagonalrevner i brugstilstanden. Vælges $\cot \theta > 1$, fås en bjælke, hvori den relative mængde af langsgående armering er størst.

Med den valgte værdi af $\cot \theta$ bestemmes den skrå betontrykpænding under forudsætning af lodrette lukkede bøjler til

$$\sigma_c = \left(\cot \theta + \frac{1}{\cot \theta} \right) \tau_t \quad (4.5)$$

Den skrå betontrykpænding σ_c skal opfylde betingelsen

$$\sigma_c \leq \nu_t f_{cd} \quad (4.6)$$

, hvor ν_t er effektivitetsfaktoren givet ved

$$\nu = 0.7 \left(0.7 - \frac{f_{ck}}{200} \right), \quad f_{ck} \leq 50 \text{ MPa} \quad (4.7)$$

I (4.7) indsættes den karakteristiske betontrykstyrke i MPa.

Kan betingelsen (4.6) ikke opfyldes for $t_0 = b/6$, må der regnes om med en ny og større bredde, større betontrykstyrke, og/eller en ændret værdi af $\cot \theta$, dog således at (4.4) stadig er opfyldt.

Er (4.6) derimod opfyldt bestemmes armeringen af følgende formler:

Den samlede længdearmering A_ℓ i et tværsnit bestemmes af

$$A_\ell = \frac{\tau_t t_0 u_0}{f_y \ell d} \cot \theta \quad (4.8)$$

, hvor u_0 er omkredsen af arealet A_0 , $u_0 = 2(h + b - 2t_0)$.

Bøjleafstanden a_w bestemmes af

$$a_w = \frac{A_w f_{yw} d}{\tau_t t_0} \cot \theta \quad (4.9)$$

, hvor A_w er den enkelte bøjles tværsnitsareal.

Længdearmeringen skal i.h.t. DS 411 være beliggende i det effektive tværsnits tyngdepunktslinje enten jævnt fordelt eller koncentreret i tværsnittets hjørner, hvor der altid skal placeres længdearmering til forankring af bøjlerne. Tværearmeringen må kun regnes nyttig, hvis bøjleafstanden opfylder kravet

$$a_w \leq \begin{cases} 0.2 u_0 \cot \theta \\ 0.2 u_0 \end{cases} \quad (4.10)$$

Ovenstående dimensionering bestemmer bøjle- og længdearmeringen ud fra et givet regningsmæssigt vridningsmoment. Er armeringen derimod fastlagt på forhånd, kan en bæreevneeftervisning i.h.t. DS 411 udføres, som angivet i afsnit 7.3.

4.2 Den fælles europæiske norm for betonkonstruktioner, EC 2

Beregningsprincippet i EC 2 [90.6] svarer nøje til metoden i den danske norm for betonkonstruktioner DS 411. Som i DS 411 tillades det at regne hele dæklaget effektivt ved vridningsoptagelsen. Der regnes med et effektivt tyndfliget tværsnit med jævnt fordelte forskydningsspændinger. Dette gælder også for ikke massive tværsnit, hvor tykkelsen dog ikke må overstige den virkelige vægtykkelse.

Den afgørende forskel mellem DS 411 og EC 2 ligger i begrænsningen af det effektive tværsnits vægtykkelse. I DS 411 må tykkelsen ikke overstige $1/6$ af den mindste sidelængde for et rektangulært tværsnit, hvorimod der ikke er nogen nedre begrænsning på tykkelsen. EC 2's begrænsning af det effektive tværsnits vægtykkelse er begrundet ud fra en nyere viden om, at dæklaget ikke altid er effektivt ved vridningsoptagelsen på grund af dæklagsafskalning.

Tykkelsen t_0 skal i.h.t. EC 2 ligge i intervallet

$$2c' \leq t_0 \leq \frac{A}{u} \quad (4.11)$$

, hvor

c' er dæklaget til længdearmeringen, d.v.s. $c' = c + d_w$.

A er det totale, ydre areal af tværsnittet.

u er omkrdsen af det ydre tværsnit.

Den nedre grænse i (4.11) medfører, at hele det effektive tværsnit ikke må ligge i dæklaget, da der ikke kan optages trækspændinger i dæklaget.

Idet der kan forekomme dæklagsafskalning ved vridningspåvirkede bjælker, se afsnit 3.5, bør man være varsom med at medregne hele dæklaget i vridningsoptagelsen, især ved store dæklagstykker. EC 2 tager i et vist omfang hensyn til dette ved at foreskrive, at arealet af dæklaget ikke må udgøre en for stor andel af det totale tværsnitsareal. Ved at indføre en øvre begrænsning på den effektive tykkelse, som afhænger af den absolutte værdi af tværsnitsbredden samt slankhedsforholdet, opnås en hensyntagen til dæklagsproblematikken.

EC 2 tillader kun bjælketværsnit som opfylder dobbeltuligheden (4.11), d.v.s. kravet til et tværsnit er, at

$$2 c' \leq \frac{A}{u} \quad (4.12)$$

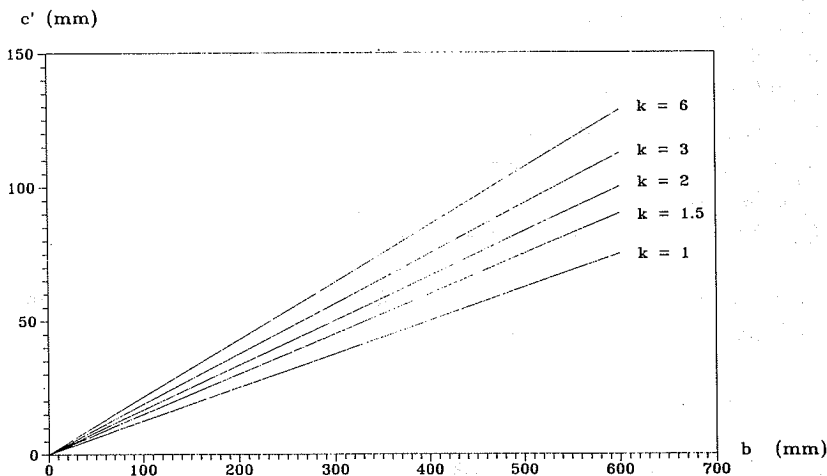
For et rektangulært tværsnit med ydre dimensioner $b \times h$ kan (4.12) skrives som

$$c' \leq \frac{b}{4\left(\frac{1}{k} + 1\right)} \quad (4.13)$$

, hvor $k = \frac{h}{b}$.

Anvendes lighedstegnet i ligning (4.13) og optegnes funktionen fås den på figur 4.1 viste sammenhæng mellem dæklagstykkelsen c' og tværsnitsbredden b for forskellige værdier af slankhedsforholdet k .

Maksimal dæklagstykkelse som funktion
af tværsnitsbredden i.h.t. EC2.



Figur 4.1 : Sammenhæng mellem dæklag og tværsnitsbredde i.h.t. EC 2.

Figur 4.1 viser, at fordobles tværsnitsbredden for et givet slankhedsforhold, kan det tillades også at fordoble dæklagstykkelsen. Herved opnås samme forhold mellem arealet af det samlede dæklag og det totale tværsnisareal, d.v.s. at tværsnitsreduktionen ved en evt. dæklagsafskalning vil være den samme. Det ses endvidere, at for en given tværsnitsbredde kan dæklagstykkelsen øges for stigende slankhedsforhold. Dette skyldes, at arealet af dæklaget udgør en mindre andel af det totale tværsnitsareal for store slankhedsforhold.

I modsætning til DS 411 åbner EC 2 muligheder for at dimensionere overarmerede bjælker. Vejledningen i EC 2 er udformet som en bæreevneeftervisning. Bæreevnen af en bjælke udsat for ren vridning findes som den mindste værdi af bæreevnen for hhv. betonen og armeringen:

$$T_d \leq \begin{cases} T_{db} = 2 \nu_t f_{cd} t_o A_o / (\cot \theta + \tan \theta) \\ T_{dw} = 2 A_o (f_{ywd} A_w / a_w) \cot \theta \end{cases} \quad (4.14)$$

,hvor

T_{db} er bæreevnen af betonen.

T_{dw} er bæreevnen af bøjlearmeringen.

A_o er det areal der omslutes af det tyndfliget tværsnits midtlinie,

$$A_o = (h - t_o)(b - t_o).$$

t_o skal opfylde uligheden (4.11), $2 c' \leq t_o \leq \frac{A}{u}$.

A_w er den enkelte bøjles tværsnitsareal og

a_w er bøjleafstanden.

f_{cd} er betonens regningsmæssige trykstyrke.

EC 2 tillader ligeledes en vis frihed m.h.t. fordelingen af armeringen i bøjle- og længderetningen, idet det blot kræves, at

$$0.4 \leq \cot \theta \leq 2.5 \quad (4.15)$$

, hvor θ er betontrykkets vinkel med bjælkens længdeakse.

Effektivitetsfaktoren i EC 2 er den samme som i DS 411, dog må ν_t i EC 2 ikke regnes mindre end 0.35, d.v.s.

$$\nu_t = 0.7 \left(0.7 - \frac{f_{ck}}{200} \right) \geq 0.35 \quad (4.16)$$

I (4.16) indsættes den karakteristiske betontrykstyrke i MPa.

Længdearmeringen bestemmes herefter ved at bæreevnen af længdearmeringen sættes lig bæreevnen af bøjlearmeringen. D.v.s.

$$A_l f_{yld} = T_{dw} \frac{u}{2A_0} \cot \theta \quad (4.17)$$

,hvor A_l er arealet af den samlede længdearmering i tværsnittet.

Er armeringen derimod kendt i begge armeringsretninger bestemmes θ og T_{dw} af følgende to ligninger:

$$\tan^2 \theta = \frac{A_w}{a_w} f_{ywd} / \left(\frac{A_l}{u} f_{yld} \right) \quad (4.17)$$

$$T_{dw} = 2 A_0 \sqrt{\frac{A_w}{a_w} f_{ywd} \frac{A_l}{u} f_{yld}} \quad (4.18)$$

I (4.17) skal θ dog opfylde (4.15) ellers skal nærmeste grænse i (4.15) anvendes.

Længdearmeringen skal i.h.t. EC 2 være beliggende i det effektive tværsnits tyngdepunktslinie enten jævnt fordelt eller koncentreret i tværsnittets hjørner, hvor der altid skal placeres længdearmering til forankring af bøjler.

5 Forsøgsprogram

5.1 Indledning

Formålet med den udførte forsøgsserie er bl.a. at få information om betontrykstyrkens indflydelse på vridningsbæreevnen af armerede højstyrkebetonbjælker. Denne viden skal bruges til at vurdere anvendeligheden af beregningsmetoderne beskrevet i afsnit 3 samt at give et dimensioneringsgrundlag for vridning af bjælker udført i højstyrkebeton.

Instrumenteringen er nøje valgt for at kunne afdække teorien, og den skal endvidere være i stand til at beskrive bjælkernes deformationsforhold og revneudvikling.

Forsøgsprogrammet består af 12 bjælker, der er opdelt i 4 serier, med 3 bjælker i hver. Inden for hver serie holdes betonstyrken konstant, mens betonstyrken varierer mellem serierne. Bjælkernes betonstyrker er planlagt til hhv. 30, 50, 70 og 110 MPa, hvilket må formodes at give en rimelig god dækning af højstyrkeområdet og samtidig beskrive overgangen fra normalstyrkebeton til højstyrkebeton. Identifikationen af forsøgselementerne er givet ved betegnelsen BX.Y. X angiver her den proportionerede betonstyrke, og Y angiver forsøgselementets nummer inden for en serie, f.eks. B30.1.

5.2 Elementudformning

Der er i dette projekt valgt at benytte bjælker, der er totalt overarmerede, d.v.s. bjælker, hvori hverken bøjle- eller længdearmering flyder ved brud. Ud fra et teoretisk synspunkt bør man udføre forsøg med overarmerede bjælker til bestemmelse af ν_t , hvilket skyldes, at vridningsbæreevnen i dette tilfælde primært er bestemt af betonens trykstyrke, og bruddet vil derfor være et rent betonbrud. Tidligere forsøg har vist, at en bestemmelse af ν_t med normalt armerede bjælker giver urimelig stor spredning på resultaterne. Denne spredning kan forklares ved, at bruddet i normalt armerede bjælker hovedsageligt styres af flydningen i armeringen, og bæreevnen vil derfor ikke være særlig afhængig af ν_t -værdien.

Ved udformningen af bjælketræsnit og armeringsarrangement er det taget i betragtning, at andre forsøg [83.1] har vist, at bjælker, der efter teorien er overarmerede efter længderetningen, er ved forsøg målt til at være totalt overarmeret. Denne

uoverensstemmelse mellem teori og forsøg vedrørende armeringstilstanden kan skyldes, at spændingsfordelingen ved brud ikke helt svarer til den i afsnit 3 angivne fordeling, hvori f.eks. hjørnestængernes tryk på betonen ikke er medregnet. De i afsnit 3 fundne armeringstilfælde er således fremkommet som et resultat af den valgte spændingsfordeling.

5.2.1 Overvejelser ved udformning af bjælketværsnit og armeringsarrangement

Dette afsnit beskæftiger sig med de overvejelser og skøn, som ligger til grund for de valgte dimensioner, herunder valg af armeringens udformning og fordeling.

På baggrund af betragtningerne i afsnit 3.5, kan effektivitetsfaktoren ved vridning skrives på følgende form:

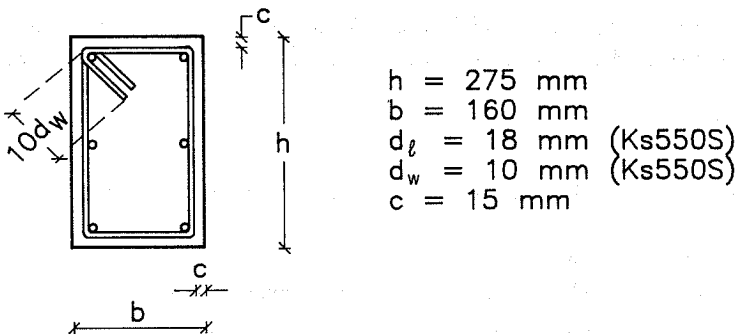
$$\nu_t = f(f_c, f_{y\ell}, f_{yw}, k, d_\ell, \ell) \quad (5.1)$$

Forsøg bekræfter til dels, at en sådan sammenhæng eksisterer, se f.eks. [83.1]. Udover de ovennævnte parametre er det muligt, at antallet af længdearmeringsstænger og deres indbyrdes placering i tværsnittet kan influere på ν_t .

Som beskrevet i afsnit 3.5 afhænger ν_t af mange variable, og en fuldstændig fastlæggelse af ν_t kræver adskillige forsøg, hvor man i hver enkel forsøgsserie kun varierer på en af de ovenstående parametre. Hertil skal der suppleres med en eksperimentel undersøgelse af dæklagets betydning for vridningsbæreevnen. I sidstnævnte undersøgelse er det nødvendigt at variere flere parametre udover dæklagstykkelsen for at kunne dække alle de i praksis forekommende tilfælde, og undersøgelsen vil derfor være ret omfattende.

Da det primære formål i dette projekt er at fastlægge sammenhængen mellem effektivitetsfaktoren ved ren vridning og betonens trykstyrke, er det valgt at benytte ens tværsnit og ens armeringsarrangement i alle bjælker. Dermed er det kun betonens trykstyrke, der varierer i forsøgsserien.

På figur 5.1 er det valgte tværsnit samt de i forsøgsserien valgte materialeparametre angivet.

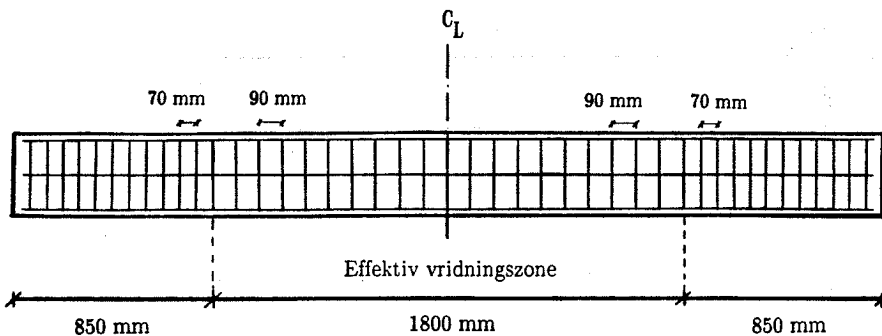


Figur 5.1 : Valg af tværsnit og materialeparametre.

Tværsnittets ydre dimensioner er valgt bl.a. af hensyn til brug af eksisterende støbeform. Udover at det effektive højde-breddeforhold, k , holdes konstant i forsøgs-serien, er værdien fastlagt, således at man undgår for store spændingskoncentrationer i hjørnerne, som det er tilfældet for kvadratiske tværsnit, se afsnit 3.5 .

Dæklaget er overalt i tværsnittet valgt til 15 mm svarende til minimal dæklagstykkelse plus tolerancetillæg i passiv miljøklasse i.h.t. DS 411 [84.2] . For at få en tilstrækkelig god forankring af bøjlerne er forankringslængden valgt til $10d_w$, hvor d_w er diameteren af bøjlen , i.h.t. DS 411, se figur 5.1 . Herved sikres en god overføring af trækkræfter til bøjlearmeringen. Længdearmeringen er placeret symmetrisk om tyngdepunktet, se figur 5.1 , idet kun denne armering må regnes aktiv ifølge teorien.

Da det mekaniske bøjle-længdearmeringsgradsforhold, ℓ , holdes konstant , betyder det, at bøjlearrangementet er ens for alle 12 bjælker. Derimod varierer bøjleafstanden for den enkelte bjælke, se figur 5.2.



Figur 5.2 : Valgt armeringsarrangement.

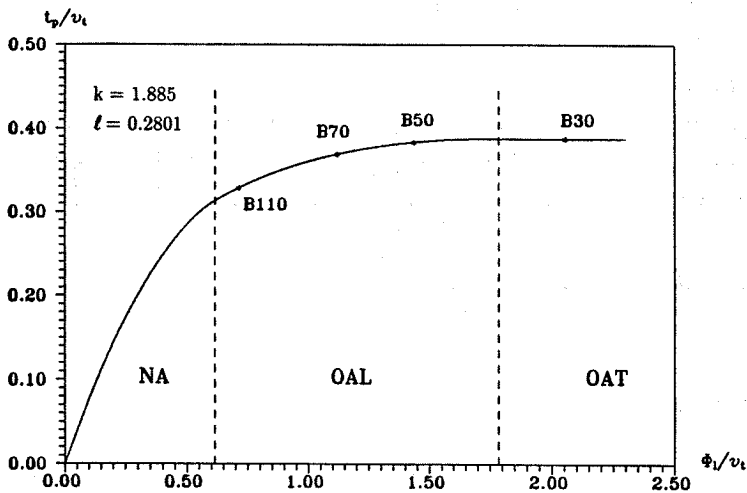
Der er valgt en bøjleafstand på $a_w = 90$ mm i en zone med udstrækning 1800 mm omkring bjælkens midte, og en bøjleafstand på $a_w = 70$ mm ved bjælkeenderne. Grunden til netop denne variation begrundes i det følgende.

Det vridende moment overføres fra forsøgsopstillingen til bjælken ved begge bjælkeender (jnf. afsnit 5.5). Den mindre bøjleafstand ved bjælkeenderne er valgt på baggrund af erfaringer fra andre forsøg [68.2], som har vist, at en forøgelse af den mekaniske bøjlearmeringsgrad på ca. 30 % ved vridningsmomentets angrebepunkt er tilstrækkeligt til at sikre mod brud ved bjælkeenderne.

Ved understøtningerne fremkommer der en treakset trykspændingstilstand i bjælken. Denne tilstand skyldes dels overførslen af det vridende moment fra forsøgsopstillingen (jnf. afsnit 5.5), dels det skrå betontryk hidrørende fra vridningspåvirkningen. Denne spændingstilstand forøger tillige bæreevnen ved understøtningerne. For at den her nævnte randeffekt ikke skal påvirke spændingsforholdene i bjælken i øvrigt, er bjælkerne gjort forholdsvis lange, $L = 3500$ mm, således at man opnår en spændingstilstand svarende til ren vridning i zonen omkring bjælkens midte, som i det følgende kaldes den effektive vridningszone, se figur 5.2.

Bøjleafstanden er valgt ud fra kravet til maksimal bøjleafstand, se formel (3.19) afsnit 3.2.3, således at man undgår, at bjælken bryder ved revnelasten, samt af hensyn til anvendelse af stavvibratører ved støbningerne.

Med den valgte geometri og de angivne materialeparametre får man bæreevnekurven vist på figur 5.3.



Figur 5.3 : Bæreevnekurve for forsøgsbjælkerne.

Kurven er fremkommet ved benyttelse af teorien givet i afsnit 3.2.1 – 3.2.7, idet dæklaget ikke er medregnet til det effektive tværsnit. Både bøjle- og længdearmeringens flydespænding er skønnet til 600 MPa, og som ν_t -funktion er benyttet (3.74), idet ν_t skønnes at være konstant for betonstyrker større end 60 MPa. Skønnet bygger på erfaringer fra forskydningsforsøg med armerede højstyrkebetonbjælker [89.1], hvor ν tilnærmelsesvis kan regnes konstant for $f_c \geq 50$ MPa. Som det fremgår af figur 5.3, er bjælkerne beregningsmæssigt overarmerede, som tilstræbt.

5.3 Materialer

De i forsøgsserien benyttede materialer, d.v.s. beton og armering, vil i dette afsnit kort blive beskrevet.

5.3.1 Beton

5.3.1.1 De indgående bestanddele

De indgående bestanddele, der er benyttet ved støbning af betonerne, fremgår af nedenstående beskrivelser. Materialerne er leveret af Rammeprogrammet :

" Højkvalitetsbeton i 90'erne " .

Cement :

Der er i hele forsøgsprogrammet benyttet en dansk rapidcement, PC (R/IS/MA/G), fra samme leverance. Rapidcement er en hurtighærdnende Portlandcement, d.v.s. en cement med høj tidlig styrke og hurtig afbinding. Der er tilsat ca. 5 % flyveaske til cementen, som er formålet til en Blaine-finhed på 430 m²/kg.

Tilslag :

Det benyttede sand er vasket søsand med en maksimal kornstørrelse på 4 mm. Det benyttede grus er densitetssorteret gravelit, frit for flint og kalk, med en stenstørrelse på 4 – 8 mm. Som stentilslag er benyttet nedknust granit, ligeledes frit for flint og kalk, og med en stenstørrelse på 4 – 16 mm. Granitten har en ru overflade og aflang kornform.

Densitetsbestemmelsen og kornkurverne for de enkelte tilslag er givet i [91.1].

Flyveaske :

Flyveaske er et pozzolan, d.v.s. ,at det kan reagere med betonens calciumhydroxid og danne reaktionsprodukter, der svarer til de reaktionsprodukter, der dannes, når cementkornene reagerer med vand. Aktivitetsfaktoren for den anvendte flyveaske er sat til 0,25 . Aktivitetsfaktoren er defineret ved forholdet mellem en given askemængdes bidrag til betonstyrken og samme cementmængdes styrkebidrag til et givet tidspunkt. Flyveasken er benyttet i styrkeklasserne B30 og B50 for at få en bedre bearbejdelighed af den friske beton og dermed mindske tendensen til dannelse af stenreder under vibreringsen.

Mikrosilica :

Mikrosilica fremkommer som et biprodukt ved produktion af siliciummetal og ferrosilicium i elektriske smelteovne. Mikrosilicaen har, på grund af sin meget store indre overflade, 15 – 25 m²/g, en stor indflydelse på styrkeudviklingen af betonen. Mikrosilica har udpræget pozzolanegenskaber, men er ikke et pozzolan. Ved tilsætning til beton vil mikrosilicapartiklerne, p.g.a. deres ringe størrelse i forhold til cementkornene, virke tætnende på cementpastabindemidlets struktur, og der opnås derved en tættere og stærkere beton. På den baggrund antages det, at mikrosilicaen giver en aktivitetsfaktor i forhold til cementen på omkring 3.5.

Anvendelse af mikrosilica er nødvendig for at opnå de højere styrker, hvorfor den indgår i recepterne for styrkeklasserne B70 og B110. Der er i forsøgsprogrammet anvendt en vandig opløsning af mikrosilica, mikrosilica-slurry, som tilsætning til betonen. Mikrosilica-slurry giver en bedre fordeling af mikrosilicaen i betonen, således at man får en mere ensformig beton.

For en nærmere beskrivelse af den kemiske sammensætning for mikrosilica-slurry henvises til [91.1].

Tilsætningsstoffer :

Der er både benyttet plastificerende og superplastificerende tilsætningsstoffer. Ved at anvende tilsætningsstoffer kan man opnå højere betonstyrker, idet den vandmængde, der er nødvendig for at opnå en ønsket bearbejdighed, kan reduceres. Dette skyldes, at plastificeringsstoffet er et overfladeaktivt stof, der reducerer overfladespændingerne mellem partiklerne i betonen. En overdosering af tilsætningsstoffer giver en retardering af afbindingstiden, men vil ikke have indflydelse på styrkeudviklingen.

Som plastificeringsmiddel er benyttet CONPLAST 212, som er tilsat ved alle styrkeklasserne undtagen for B70. For styrkeklasserne B70 og B110 er der tilsat superplastificeringsmidlet, PERAMIN F. Superplastificeringsstoffer er specielt en nødvendighed ved udstøbning af højstyrkebetoner med mikrosilica, da disse betoner ellers ikke kan udstøbes p.g.a. det lave vand/cement-forhold.

For en nærmere beskrivelse af de benyttede tilsætningsstoffer henvises til [91.1].

Som det fremgår af beskrivelsen, er de ovennævnte materialer af høj kvalitet, og dermed udgør de tilsammen et godt grundlag for en højkvalitetsbeton.

5.3.1.2 Betonrecepter

I tabel 5.1 er de benyttede blanderecepter for de enkelte styrkeklasser angivet. Værdier for sætmål og luftindhold opnået ved de enkelte støbninger er henlagt til [91.1].

Materiale	B30 kg/m ³	B50 kg/m ³	B70 kg/m ³	B110 kg/m ³
Rapidcement	188	260	309	390
Flyveaske	80	40	—	—
Mikrosilica-slurry	—	—	60	80
Sand 0 - 4 mm	640	584	558	521
Grus 4 - 8 mm	272	260	273	247
Sten 4 - 16 mm	1089	1039	1093	989
Vand	165	150	127	61
Plast.	0.74	1.09	—	2.40
Superplast.	—	—	5.81	18.04

Tabel 5.1 : Forsøgsseriens betonrecepter.

Som det ses af tabel 5.1, falder vand/cement-forholdet for øgede værdier af den proportionerede betonstyrke. Reduktionen er resultatet af en stigning i cementmængden samtidig med en reduktion af vandmængden. Den mindre vandmængde i højstyrkebetonrecepterne nødvendiggør brugen af superplastificerende tilsætningsstoffer for at opnå den nødvendige bearbejdighed.

I afsnit 6.2 er de opnåede betonstyrker med tilhørende spredninger angivet.

5.3.2 Armering

Som det fremgår af afsnit 2.3 er en af beregningsforudsætningerne, at armeringen har en udpræget flydegrænse samt en stor brudtøjning. For at tilnærme teorien bedst muligt, er det valgt at benytte kamstål, idet kamstål netop er i besiddelse af disse egenskaber. Kamstål giver endvidere en god vedhæftning mellem armering og beton på grund af forkamningen.

For både bøjle- og længdearmeringen er der benyttet svejsbart dansk kamstål Ks 550S . Al bøjlearmering er $\emptyset 10$, og al længdearmering er $\emptyset 18$. Begrundelsen for at anvende armeringsstål med høj flydespænding er, udover at få en bedre kvalitet, at minimere den geometriske armeringsgrad og dermed få en bedre udstøbning. Al armering er fra samme leverance for derved at mindske risikoen for uacceptable spredninger på flydespændingen. Der er fra producentens side kun garanteret en nedre grænseværdi for den virkelige flydespænding, og for det valgte armeringsstål er denne værdi lig 550 MPa .

Armeringens flydespænding for al bøjle- og længdearmering i den effektive vridningszone er bestemt, og det er kun denne armering, der har betydning for vridningsbæreevnen. Den i forsøgsserien benyttede armering stammer fra en leverance af 12 m lange armeringsstænger. Forsøgsbjælkernes armeringsarrangement er udformet, således at bøjle- og længdearmeringens flydespænding i den effektive vridningszone for en bjælke kan bestemmes med i alt 4 trækprøver. D.v.s. , to trækprøver til fastlæggelse af bøjlearmeringens flydespænding og to trækprøver til fastlæggelse af længdearmeringens flydespænding pr. bjælke. Idet der kun ønskes en flydespænding for bøjlearmeringen og en flydespænding for længdearmeringen pr. bjælke, midles resultaterne af de to trækprøver. Prøvestængerne bestod af rester fra armeringen, og de havde alle en længde på 600 mm . Bestemmelsen af armeringens flydespænding foregik ved trækforsøg, hvor samhörrende værdier af kraft og tøjning blev optegnet. Derefter er flydespændingen fastlagt ved aflæsning af grafen. Tøjningsmålet blev bestemt ved hjælp af et ekstensiometer, der var fastgjort til armeringsstangen. Ekstensiometeret måler længeændringen af armeringsstangen over et stykke på 100 mm, således at lokale tøjningsvariationer, f.eks omkring kammene, udjævnes.

For en nærmere beskrivelse af trækforsøgene henvises til [91.1].

I afsnit 6.3.1 er middelværdierne af flydespændingen for de enkelte bjælker angivet.

5.4 Tildannelse af forsøgsselementerne

De forskellige aktiviteter, der er indgået i tildannelsen af forsøgsselementerne, skal her kort beskrives.

Efter at armeringen er skåret, påsættes strain gauge, se nærmere herom i afsnit 5.6.2 og 5.6.3 . For bøjlearmeringens vedkommende pålimes gaugene armeringens overflade, hvorfor kammene på armeringen nedslibes, og overfladen sandblæses, for derved at sikre en bedre vedhæftning mellem gaugen og armeringsstangen. Det er vigtigt, at man ved nedslibningen af kammene ikke reducerer det egentlige areal, og dermed gør stangen svagere. For længdearmeringen benyttes indlimede gauge, d.v.s. længdearmeringsstangen oprilles med en 1 mm bred rille, hvorefter en gauge indlimes i tværnsnittets tyngdepunkt.

Efter at gaugelimen har hærdet i 24 timer, kan armeringen bindes.



Billede 5.1 : Færdigbundet armering.

Den færdigbundede armering placeres i en støbeform, der i forvejen er smurt med et tyndt lag formolie, således at formen slipper bjælken, når betonen hærdet. Armeringsarrangementet justeres i formen indtil det ønskede dæklag er opnået overalt, d.v.s. 15 mm.

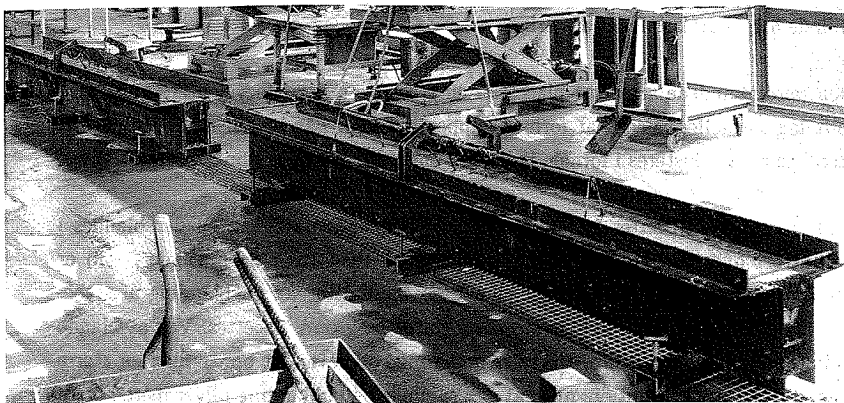
Ved støbningen tilsættes først det tørre tilslag blandemaskinen, og der blandes i 3–4 minutter, hvorefter cementen og evt. flyveaske tilsættes i de mængder, som er angivet i tabel 5.1 . Der blandes nu i yderligere 4 minutter før en blanding af støbevandet, tilsætningsstoffer og evt. mikrosilica-slurry langsomt tilsættes. Ved at blande tilsætningsstoffer og mikrosilica-slurry sammen med støbevandet opnår man en større virkning af disse stoffer samtidig med, at den samlede betonblanding bliver mere homogen. Efter at betonen har blandet endnu et par minutter, tilsættes evt. små ekstra mængder tilsætningsmiddel for at opnå den den ønskede bearbejdelighed. Der blandes

nu ca. 5 minutter, hvorefter blandemaskinen standses. Umiddelbart herefter bestemmes sætmål i.h.t. Dansk Standard DS 423.12. Alle støbninger bestod kun af en blanding.

Efter endt blanding skovles betonen op i formen, og der vibreres derefter, således at udstøbningen bliver tilfredsstillende. Vibreringen er foretaget ved brug af stavvibratører for at undgå overvibrering af bjælken. En overvibrering vil medføre dannelse af stenreder i bunden af bjælken, og det er specielt ved anvendelse af formvibratører, man risikerer en sådan overvibrering, da vibreringen i dette tilfælde er vanskelig at kontrollere. Derudover vil brugen af formvibratører medføre, at hele bjælken inklusive armeringen rystes, og armeringens placering i støbeformen vil derfor kunne ændre sig. Dette forhold er specielt kritisk for bjælker med små dæklag, idet man risikerer, at der visse steder slet ikke bliver et dæklag.

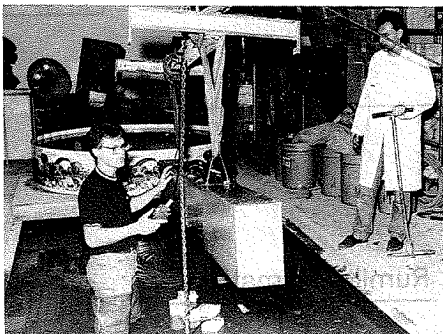
Samtidig med udstøbning af bjælken støbes 100 x 200 mm cylindre, bordvibreret, til bestemmelse af betonens trykstyrke og 150 x 300 mm cylindre, stavvibreret, til bestemmelse af betonens spaltetrækstyrke. Endelig foretages der måling af betonens luftindhold i.h.t. DS 423.15.

Efter endt støbning får betonen lov til at sætte sig, og bjælke og cylindre afrettes på et senere tidspunkt, som afhænger af betonens bearbejdelighed, d.v.s. ca. 1 time for B30 og B50 og ca. 20 min for B70 og B110 . Bjælken ligger dernæst under en plastmembran i et døgn, hvorefter den overdækkes med vådsække. Plastmembranen skal hindre fordampning af reaktionsvandet i timerne efter støbningen.



Billede 5.2 : Færdigstøbt bjælke (forest) og bjælke klar til afformning (bagerst).

Cylindrene afformes et døgn efter støbningen og bliver umiddelbart derefter vandlagret. Bjælken afformes 4 døgn efter støbning, og vandlagres i samme bassin som cylindrene. 14 dage efter støbningen tages bjælke og tilhørende cylindre op af bassinet og lagres under konstant temperatur (20 °C) og relativ luftfugtighed (ca. 65%) frem til afprøvningen.

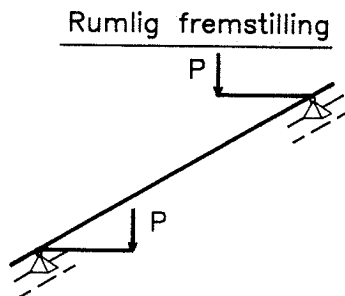
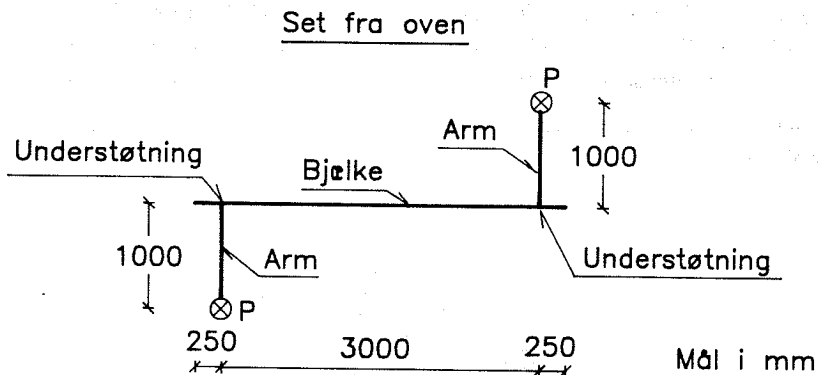


Billede 5.3 : Bjælke tages op fra vandlagring.

5.5 Forsøgsopstillingen

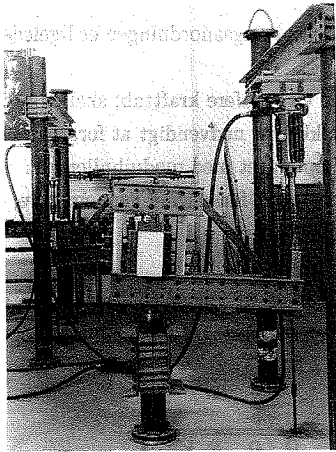
Der er i forbindelse med projektet udviklet en forsøgsopstilling, der er i stand til at frembringe en belastning svarende til ren vridning. Ideer fra tidligere udførte vridningsforsøg, f.eks [70.1], har været til inspiration ved udarbejdelsen af forsøgsopstillingen.

Det statiske system for opstillingen er angivet på figur 5.4.



Figur 5.4 : Statisk system for den benyttede forsøgsopstilling.

To lige store enkeltkræfter angriber med en arm på 1 m i hver sin ende af bjælken. Armen består af en lukket ramme, som er vist på billede 5.4.



Billede 5.4 : Forsøgsopstillingen set fra bjælkeende.

Vridningsmomentet overføres fra rammen til bjælken ved kontaktryk på bjælkens overflader. Dette sker via 4 massive stålklokker, der fordeler trykket, se billede 5.4, figur 5.5 side 86 og billede 5.5 side 88.

Enkeltkræfterne frembringes af to kraftstyrede 5 tons presser af mærket EPZ, der er parallelforbundet til samme styreenhed, således at det hydrauliske tryk i de to presser vil være lige stort. Den maksimale stempelvandring for de benyttede presser er 125 mm, svarende til en vinkeldrejning af bjælken på ca. 7° ved hver bjælkeende i den valgte opstilling. En stempelvandring på 125 mm er den maksimale vandring, som kan opnås med de presser, der er tilrådighed på ABK (1991). De valgte presser er anvendt gennem hele forsøgsserien. Tidligere udførte forsøg [83.3] har vist, at bjælker med lave betonstyrker har en total vinkeldrejning på op til 10° ved brud. I en opstilling, hvor den ene bjælkeende indspændes, mens den anden vrides, kan en vinkeldrejning på 10° ikke opnås, uden at der skal forankres og omlastes, hvilket blev fundet uhensigtsmæssigt.

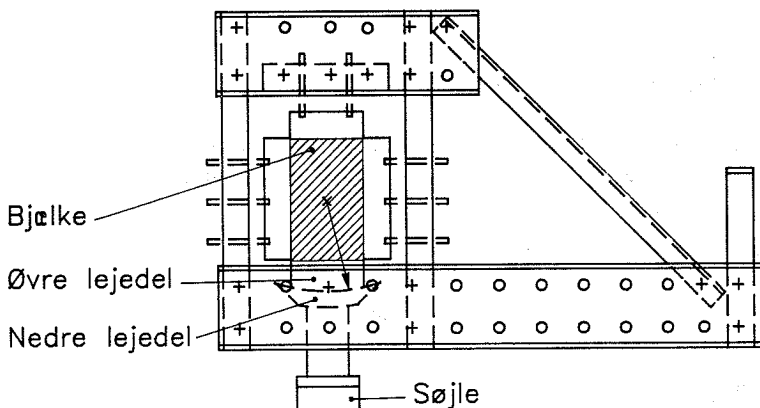
Et forankringsarrangement blev imidlertid anordnet, idet højstyrkebetonbjælkernes vinkeldrejning ved brud på forhånd var ukendt. Metoden til forankring er, at man fastholder rammerne til gulvet v.h.a. to trækstænger, hvorefter presserne kan aflastes, og trykhovedets spindel skrues ud. Forankringen foretages, når stemplet har opnået den maksimale vandring, og derefter kan der belastes påny samtidig med, at

trækstængerne løsnes fra gulvet. Forankringsanordningen er ligeledes vist på billede 5.4 .

Idet en forankring uundgåeligt vil medføre krafttab, skal en sådan undgås, hvis det er muligt. Det skal tilføjes, at det ikke var nødvendigt at forankre under forsøgene.

Forsøgshallens gulv i ABK er opbygget med modulhuller i en indbyrdes afstand på 1 m. Af hensyn til bjælkeunderstøtninger, forankring gennem gulv, samt rør til ophæng af presser, er armen af rammen valgt til 1 m.

Bjælkens understøtninger består af to vuggelejer, et i hver ende. Vuggelejet er fremstillet, således at bjælken drejer omkring tyngdepunktet, og dermed undgås en skæv vridningspåvirkning, se figur 5.5 .



Figur 5.5 : Vuggeleje. Bjælken kan dreje omkring tværsnittets tyngdepunkt.

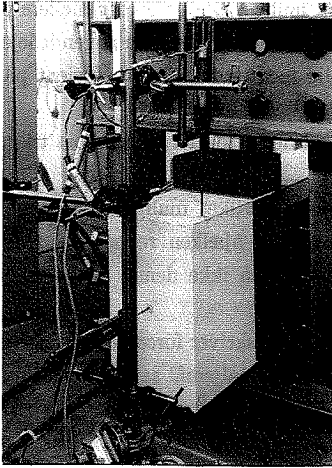
Det er vigtigt, at lejet er så friktionsløst som muligt. Derfor er der mellem øvre- og nedre lejedel pålimet teflonflader, og mellem disse er der yderligere anvendt lejefedt. Friktionen i lejet bliver dermed så lille som mulig med en friktionskoefficient på omkring 0.05, hvilket er en oplyst talværdi fra fabrikanten af teflonen.

Øvre lejedel er indspændt i rammen, hvorimod nedre lejedel er fastgjort til gulvet via en kort søjle, se figur 5.5 .

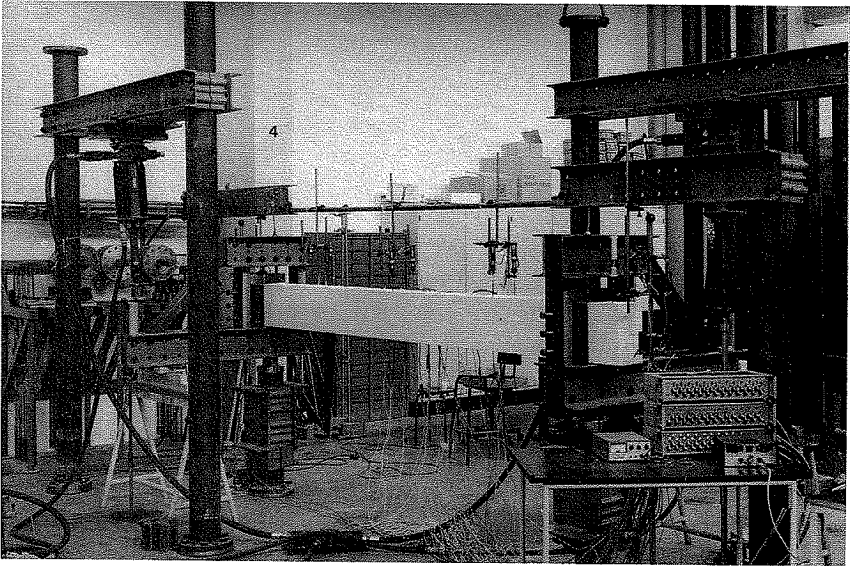
Nedre lejedel er udført smallere end øvre lejedel, hvilket muliggør en længdeændring af bjælken. Længdeændringen fremkommer, når bjælken revner, og revnerne udvider sig under stadig oplastning. Tillader opstillingen ikke denne længdeændring, vil der introduceres en tryknormalkraft i bjælken .

På de følgende sider er der vist andre billeder, der beskriver forsøgsopstillingen.

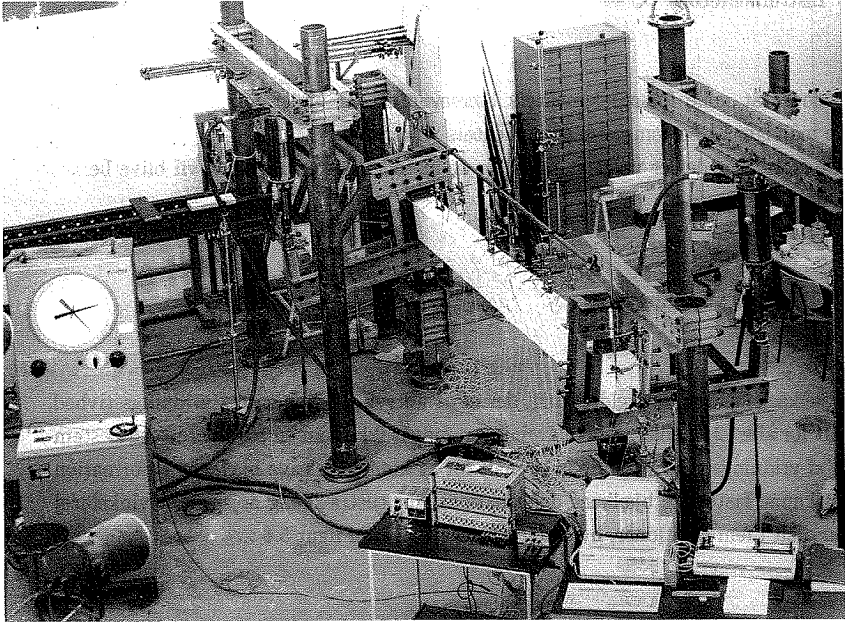
For en nærmere beskrivelse af forsøgsopstillingens detaljemål samt dimensionering henvises til [91.1].



Billede 5.5 : Detalje af bjælkeende.
På billedet ses flytningsmålere til
bestemmelse af bjælkens vinkeldrejning
og længdeændring.



Billede 5.6 : Ubelastet bjælke, hvor rammerne understøttes. På billedet ses
målerammen til flytningsmålerne på bjælkens overside. Målerammen
er uafhængig af den resterende opstilling.



Billede 5.7 : Oversigtsbillede af forsøgsopstillingen.

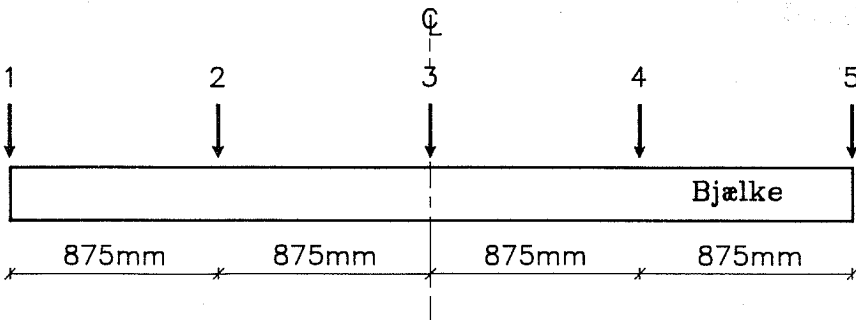
5.6 Instrumentering

Udover at måle forsøgsselementets bæreevne er der under forsøgene foretaget en række målinger til bestemmelse af elementets virkemåde.

De størrelser, der er valgt at måle, og de metoder der er benyttet, vil blive beskrevet i det følgende.

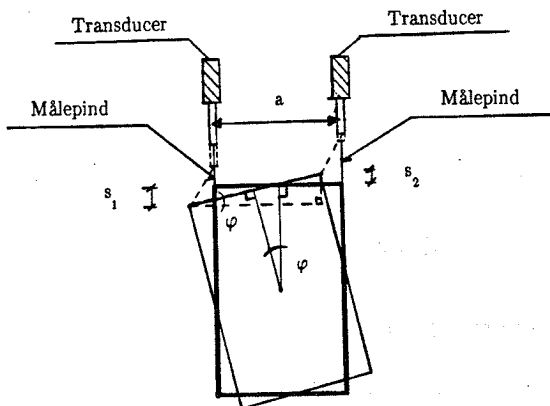
5.6.1 Bjælkens vinkeldrejning

Bjælkeelementets vinkeldrejning, der er et udtryk for elementets vridningsstivhed, er målt for alle 12 bjælker. Vinkeldrejningen indgår ikke som en parameter ved bestemmelse af vridningsbæreevnen, men er målt for at kunne beskrive bjælkens deformation. For at kunne fastlægge bjælkens deformationsfigur tilstrækkelig nøjagtig er vinkeldrejningen målt i fem positioner, hvis placeringer fremgår af figur 5.6 .



Figur 5.6 : Målepositioner til bestemmelse af bjælkens vinkeldrejning.

Vinkeldrejningen måles v.h.a. 10 stk. HP-7DCDT-1000 transducere (flytningsmålere), der alle er kalibreret, se [91.1]. Transducerne er monteret i en måleramme, der er uafhængig af den resterende opstilling, se billede 5.6. I en position, hvor vinkeldrejningen bestemmes, er to transducere placeret som vist på nedenstående figur 5.7.



Figur 5.7 : Bjælkens deformationsfigur i en måleposition.

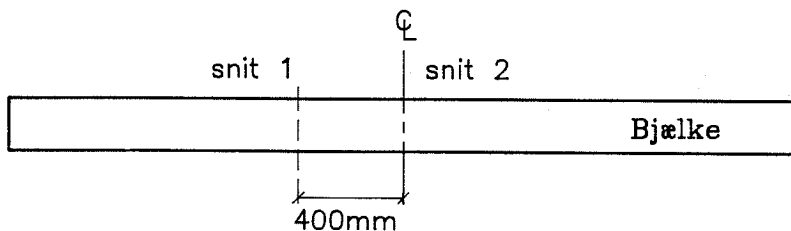
Kendes afstanden mellem de to transducere, a , kan vinkeldrejningen bestemmes af

$$\sin \varphi \approx \frac{s_1 + s_2}{a} \quad (5.2)$$

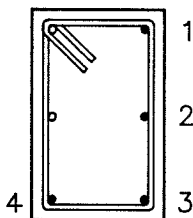
Som det ses af figur 5.7, er det kun de lodrette flytninger, der måles, og derfor er det vigtigt, at selve transducerne står lodret. Endvidere skal målepindene være forholdsvis lange, hvorved fejlen på vinkeldrejningen bestemt ved formel (5.2) kan negligeres. Den mest nøjagtige bestemmelse af vinkeldrejningen fås ved at måle over tværsnittets længste side, men det er ved forsøgene valgt at måle på den korte side af hensyn til måleramme og fotografering af optegnede revner.

5.6.2 Længdearmeringsspænding

Længdearmeringsspændingen i den effektive vridningszone bestemmes for alle bjælker. Bestemmelsen sker i to snit. Placeringerne af disse snit fremgår af figur 5.8.



- Indrillede gauge pr. snit:

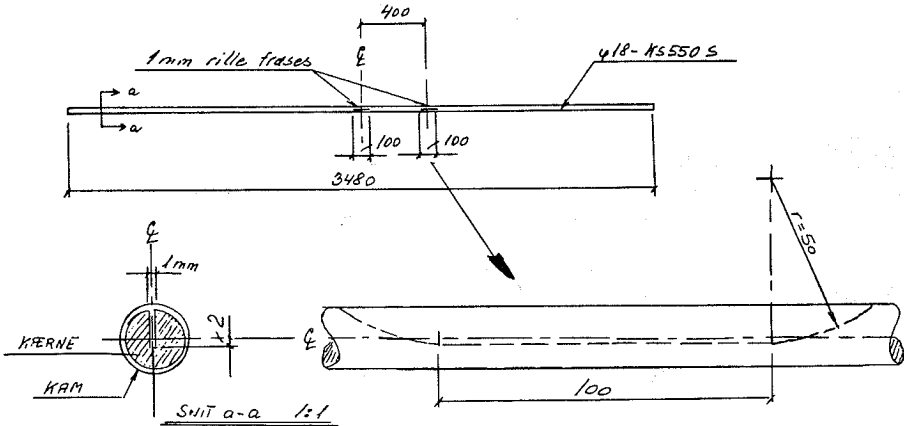


Figur 5.8 : Placering af indrillede længdearmeringsgauge.

Grunden til, at der måles i to snit, er, at man herved får en bedre bestemmelse af spændingen og kan vurdere evt. forskelle i armeringsspændinger omkring bjælkens midte, som kan opstå ved en uens fordeling af revner langs bjælken.

I hvert snit oprilles fire armeringsstænger, se figur 5.8, og en 120 ohms gauge af typen 6/120 LY11 indlimes. Med målingerne kan det afgøres, om hjørnestængerne er hårdere

påvirkede end de midterste stænger. En oprilning består af en 1 mm bred rille, som nedskæres i armeringsstangens tyngdepunktslinie, således at en gauge kan indlimes i tværsnittets tyngdepunkt, se figur 5.9 . En indrilning vil betyde, at tværsnittet svækkes ca. 4 %, men tværsnitsreduktionen har ingen betydning for bæreevnen i denne forsøgsserie, da bjælkerne er stærkt overarmerede i længderetningen.

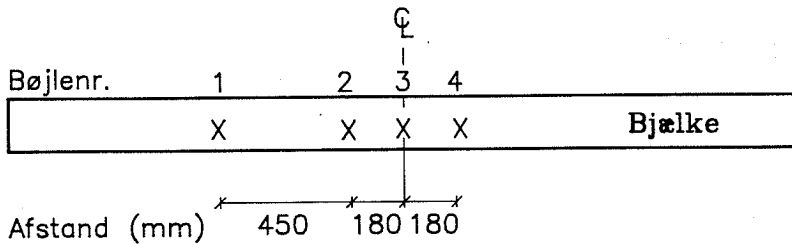


Figur 5.9 : Oprilning af armeringsstang.

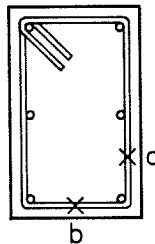
Gaugens placering i tværsnittets tyngdepunkt betyder, at det kun er spændingsbidrag stammende fra træknormalkraften i stangen, der måles.

5.6.3 Bøjlearmeringsspænding

Bøjlearmeringsspændingen i den effektive vridningszone bestemmes for alle bjælker. Bøjlearmeringsgaugene er ligeledes af typen 6/120 LY11. For hver bjælke sker bestemmelsen på 4 bøjler, og deres placering fremgår af figur 5.10 .



gaugepositioner på bøjle:

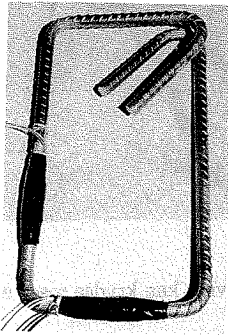


Figur 5.10 : Placering af bøjlearmeringsgauge.

Af figur 5.10 ses det, at for hver gaugebøjle måles spændingen to steder, a og b. Der er målt disse to steder for at vurdere forskellen i spændinger langs bøjlen. Denne forskel opstår p.g.a. tværsnittets form,

idet forskydningsspændingen vil være størst langs tværsnittets længste side efter en elastisk beregning.

Da bøjlearmeringens ringe diameter hindrer en oprulning af stangen og en efterfølgende indlimning af gauge i armeringens tyngdepunkt, pålimes der 2 gauge på armeringens overflade diametralt modsat hinanden. Dette gælder både for punkt a og b, se figur 5.10 . For at kunne pålime gauge på armeringens overflade kræves det, at kamene nedslibes, og overfladen sandblæses. For hvert af punkterne a og b midles signalerne fra de 2 gauge, og dermed elimineres spændinger hidrørende fra bøjning i armeringen, således at det kun er et signal fra ren normalkraft, der måles. Det er vigtigt for pålideligheden af det signal en strain gauge afgiver, at gaugen ikke udsættes for fugt eller stød evt. i forbindelse med støbningen. Derfor indpakkes gaugene i plastfolie efter pålimningen. På billede 5.8 er vist en bøjle med vandtæt plastfolie omkring gaugene. Det er vigtigt at minimere udstrækningen af plastbeskyttelsen, da denne resulterer i en svækkelse af vedhæftningen mellem armeringsstangen og den omgivende beton. For samtidig at undgå fugtindtrængning er udstrækningen af plastfolien valgt til 50 mm .

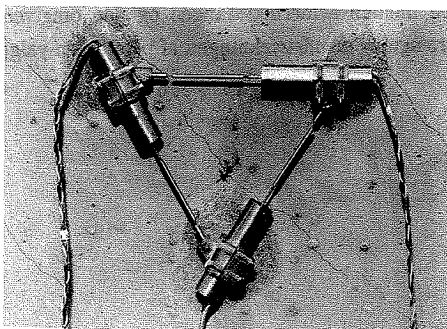


Billede 5.8 : Plastbeskyttelse på bøjlearmeringsgauge.

5.6.4 Middeltøjningsrosetter.

I en plan spændingstilstand kræves til fastlæggelse af tøjningerne i et punkt måling af længdetøjningen i tre forskellige retninger, hvilket foretages ved en såkaldt rosettemåling. Rosette-målingen kan foretages ved anvendelse af tre strain gauge, men disse er ikke særlig anvendelige ved forsøg med beton i det revnede stadium, idet målingen er ubrugelig, hvis en revne krydser en af gaugene. Derfor er der i forsøgene i stedet benyttet middeltøjningsrosetter, hvor der måles over en større strækning, og målingerne foretages ved brug af transducere. Transducerne er ikke i direkte berøring med betonoverfladen, og der måles således henover overfladen.

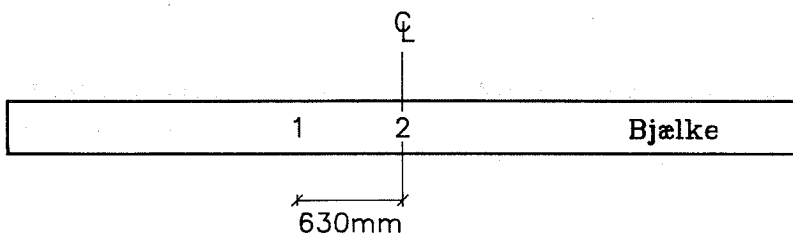
På billede 5.9 er en middeltøjningsrosette vist.



Billede 5.9 : Middeltøjningsrosette. Revner kan krydse rosetten.

Rosetten pålimes betonoverfladen ved brug af en stærk 2 komponent epoxylim, og vedhæftningsarealet er 10 x 10 mm i hvert rosettehjørne. Det primære formål med rosettemålingen er at bestemme en middelværdi af betontrykkets hældning i den effektive vridningszone, d.v.s. en middelværdi over en større strækning, og det er derfor nødvendigt med to middeltøjningsrosetter pr. bjælke. Hver rosette består af 3 stk. HP-250 transducere, se billede 5.9 , som alle er kalibreret, se [91.1].

Middeltøjningsrosetterne sidder på samme side af bjælken, og deres placering markeret med 1 og 2, er vist på figur 5.11 .



Figur 5.11 : Placering af middeltøjningsrosetter.

Afstanden mellem to hjørnepunkter i rosetten er 160 mm, således at der kan måles over flere revner, og det er dermed revnernes indflydelse på betontrykkets hældning, der bestemmes. Idet der måles over en relativ stor strækning, udjævnes lokale tøjningsvariationer på betonens overflade, som opstår p.g.a. forskelle i elasticitetsmoduler for betonens bestanddele. Hovedtøjningerne og vinklen θ , mellem den ene hovedtøjning og bjælkens længdeakse, er givet ved

$$\epsilon_1 = \frac{\epsilon_{m1} + \epsilon_{m2} + \epsilon_{m3}}{3} + \sqrt{\left(\epsilon_{m1} - \frac{\epsilon_{m1} + \epsilon_{m2} + \epsilon_{m3}}{3}\right)^2 + \left(\frac{\epsilon_{m3} - \epsilon_{m2}}{\sqrt{3}}\right)^2} \quad (5.3)$$

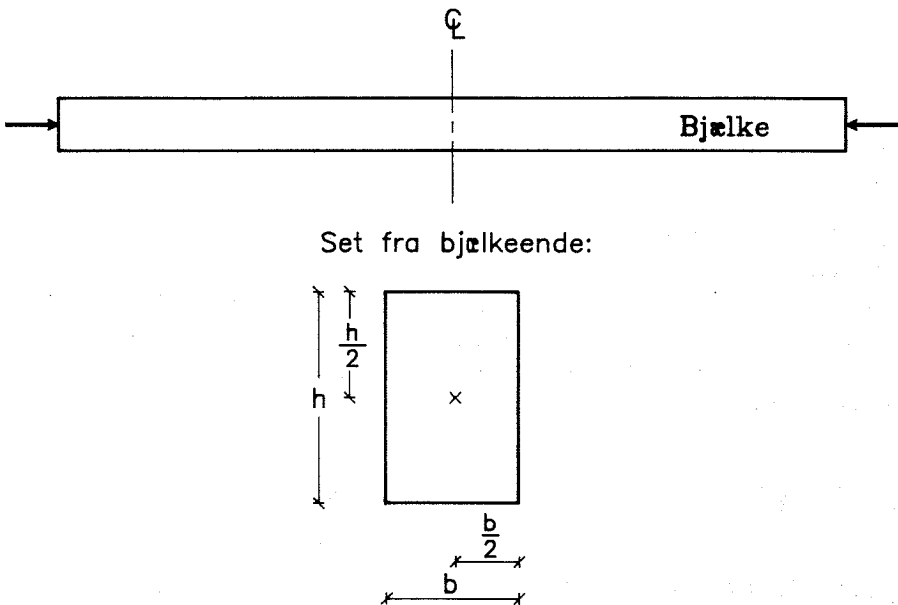
$$\epsilon_2 = \frac{\epsilon_{m1} + \epsilon_{m2} + \epsilon_{m3}}{3} - \sqrt{\left(\epsilon_{m1} - \frac{\epsilon_{m1} + \epsilon_{m2} + \epsilon_{m3}}{3}\right)^2 + \left(\frac{\epsilon_{m3} - \epsilon_{m2}}{\sqrt{3}}\right)^2} \quad (5.4)$$

$$\theta = \frac{1}{2} \tan^{-1} \left[\frac{\frac{1}{\sqrt{3}} (\epsilon_{m3} - \epsilon_{m2})}{\left(\epsilon_{m1} - \frac{\epsilon_{m1} + \epsilon_{m2} + \epsilon_{m3}}{3}\right)} \right] \quad (5.5)$$

, hvor ϵ_{m1} , ϵ_{m2} og ϵ_{m3} er de målte tøjningsværdier i rosettens tre retninger. En mere detaljeret beskrivelse af beregningen på middeltøjningsrosetten er givet i [57.2] .

5.6.5 Bjælkens længdeændring

Når betonen revner, og revnerne udvider sig under stadig oplastning, vil bjælken få en længdeændring. Der er placeret en transducer ved hver bjælkeende i tværsnittets tyngdepunkt, til måling af denne længdeændring, se figur 5.12 og billede 5.5 side 88 .



Figur 5.12 : Placering af transducere til måling af bjælkens længdeændring.

Begge transducere er kalibreret, se [91.1] .

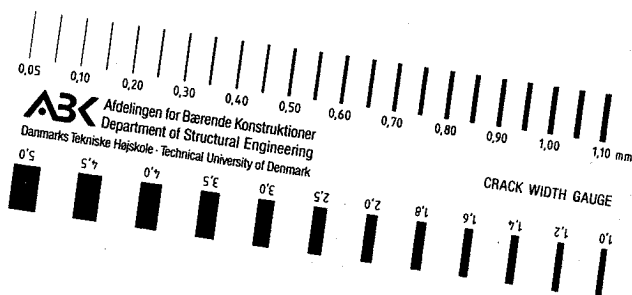
5.6.6 Dæklagsafskalning

Som tidligere beskrevet kan det ske, at dæklaget skaller af. Ved at banke på bjælkeoverfladen vil evt. dæklagsafskalning kunne konstateres ved en hul lyd. Denne banken på bjælken blev foretaget rimeligt ofte under hele belastningsforløbet.

5.6.7 Revneudvikling

For at fastlægge sammenhængen mellem længdeændringen af bjælken og revnesystemet, er revnevidden, og antallet af revner målt.

For hvert lasttrin optegnes nydannede revner, som mærkes med lasttrinnets nummer. Ved lasttrinnets slutning fotograferes revneforløbet, således at der til hver bjælke foreligger et fuldstændigt revneforløb fra belastningsstart til brud. Middelrevnevidden, w_m , måles på tre revner omkring bjælkens midte v.h.a. revneviddemåleren vist på billede 5.10 .



Billede 5.10 : Revneviddemåler.

Middelrevnevidden er aflæst som en middelværdi af revnevidden over hele revnens udstrækning. Ved hvert lasttrin efter revnelasten vil bjælken langsomt deformere sig for konstant last. Dermed øges revnevidden, og for at få en konsekvent sammenhæng mellem last og revnevidde er middelrevnevidden målt efter halvdelen af lasttrinnets varighed. Middelrevnevidden er målt for alle bjælker, undtagen for B30.1 og B 30.2.

5.7 Forsøgsgang

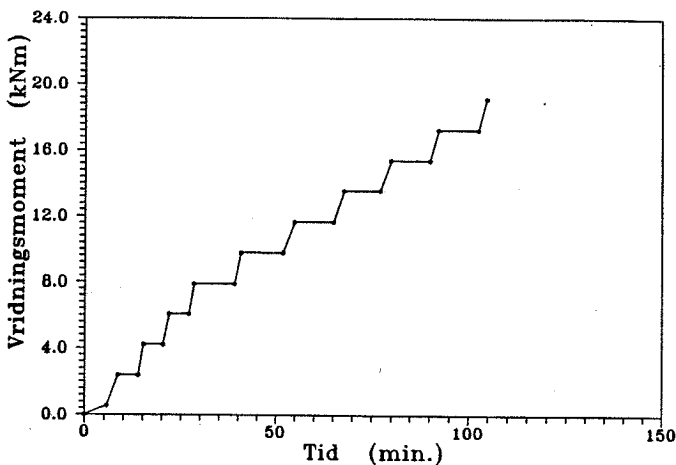
Forsøgene er udført mellem 27 og 29 dage efter støbningen. Før forsøget males bjælken hvid, således at revneudviklingen træder tydeligt frem. Bjælken placeres i opstillingen to dage før afprøvningen, hvor den instrumenteres, som beskrevet i afsnit 5.6. Alle måleinstrumenter forbindes til afbalanceringskasser, og data fra afbalanceringskasserne opsamles af en computer via en datalogger af typen HP - 3497A.

Før forsøgets start afprøves 6 stk. 100 x 200 mm cylindre til bestemmelse af betonens trykstyrke og 5-7 stk. 150 x 300 mm cylindre til bestemmelse af betonens spalte-trækstyrke. Afprøvningen sker i henhold til hhv. Dansk Standard DS 423.23 og DS 423.34.

Umiddelbart før forsøgets begyndelse foretages der et referencescan for alle måleinstrumenter. Referencescannet skal svare til den ubelastede bjælke, og derfor understøttes rammerne, således at den eneste påvirkning på bjælken er dens egenvægt. Idet egenvægten er inkluderet i referencescannet, vil kun spændingstilvækster hidrørende fra vridningsmomentet måles. Efter referencescannet fjernes rammernes understøtninger, og bjælken påvirkes nu af det vridende moment fra rammernes egenvægt. Der tages endnu et scan. Herefter kan oplastningen begynde.

Ændringen i den påførte last sker i trin. Forskellen i last mellem to trin svarer til ca. 1/10 af den efter teorien beregnede brudlast. Varigheden af hvert lasttrin indtil revnelasten er 5 - 10 min., mens varigheden for de resterende trin op til brud er 10 - 15 min. Den lille variation i lasttrinnets tidslængde efter revnelasten, skyldes den varierende tid, der indgår til optegning af revnerne. Figur 5.13 viser en typisk lasthistorie.

Lasthistorie for B50.3



Figur 5.13 : Typisk lasthistorie.

På grund af forskellen i friktion i hhv. de to lejer og de to presser, er rammernes nedbøjning ikke ens under oplastningen. Derfor styres nedbøjningerne mellem to lasttrin v.h.a. 5 og 10 kg lodder. På figur 5.13 ses det, at varigheden af oplastningen mellem to lasttrin efter bjælken er revnet er større, hvilket skyldes, at rammernes nedbøjninger er vanskeligere at styre efter revnelasten p.g.a. øgede deformationer, d.v.s. oplastningen foregår lidt langsommere.

Der scannes to gange pr. lasttrin, et start scan og et slut scan. Efter halvdelen af lasttrinnets varighed måles middelrevnevidden, og bjælkens revnesystem optegnes og fotograferes.

Omkring brud, der er indikeret ved vedvarende faldende kraft og stærkt stigende deformationer, foretages der kontinuerlige scanninger bl.a. for at kunne fastlægge brudlasten præcist.

I [91.1] er vedlagt en tidsplan for hele forsøgsprogrammet.

6 Vurdering af de opnåede forsøgsresultater

6.1 Indledning

Der er i forsøgsserien udført 12 vridningsforsøg med overarmerede bjælker, hvoraf 9 bjælker tilhører højstyrkebetonområdet, d.v.s. betonstyrkerne er over 50 MPa.

Vurderingen indeholder, dels en beskrivelse af forhold, der har betydning for brugstilstanden, dels en analyse af brudstadiet. I vurderingen foretages der en sammenligning mellem højstyrkebeton og normalstyrkebeton, hvad angår betonstyrker, armeringsspændinger, revneudvikling og deformationsforhold.

I afsnit 6.3.2 gives der en generel beskrivelse af kalibrering af armeringsgauge, og resultaterne af den udførte kalibrering angives. En kalibrering af armeringsgauge har stor betydning for pålideligheden af de målte armeringsspændinger.

I afsnit 6.6 beskrives den ved forsøgene observerede brudform, og der sammenlignes med brudformer fra andre forsøg. Med de opnåede vridningsbæreevner bestemmes der en forsøgsmæssig værdi for effektivitetsfaktoren ν_t for højstyrkebetonbjælker, idet teorierne givet i afsnit 3 anvendes.

6.2 Betonstyrker

De benyttede betonrecepter, der ligger til grund for de i forsøgsprogrammet opnåede betonstyrker, fremgår af afsnit 5.3.1.2. I tabel 6.1 er de opnåede betonstyrker med tilhørende spredninger angivet. En nærmere beskrivelse af betonernes sætmål og luftindhold er givet i [91.1].

Bjælke	f_c (MPa)	Spredning (MPa)	f_{sp} (MPa)	Spredning (MPa)
B30.1	41.7	3.6	3.1	0.36
B30.2	38.2	2.9	2.9	0.30
B30.3	36.3	1.3	3.0	0.46
B50.1	61.8	0.6	3.8	0.43
B50.2	57.1	1.5	3.5	0.31
B50.3	61.7	3.5	3.6	0.54
B70.1	77.3	0.8	4.3	0.78
B70.2	76.9	1.2	4.4	0.53
B70.3	76.2	3.3	4.2	0.53
B110.1	109.8	4.2	5.0	0.62
B110.2	105.0	4.3	5.7	0.65
B110.3	105.1	3.3	5.3	0.69

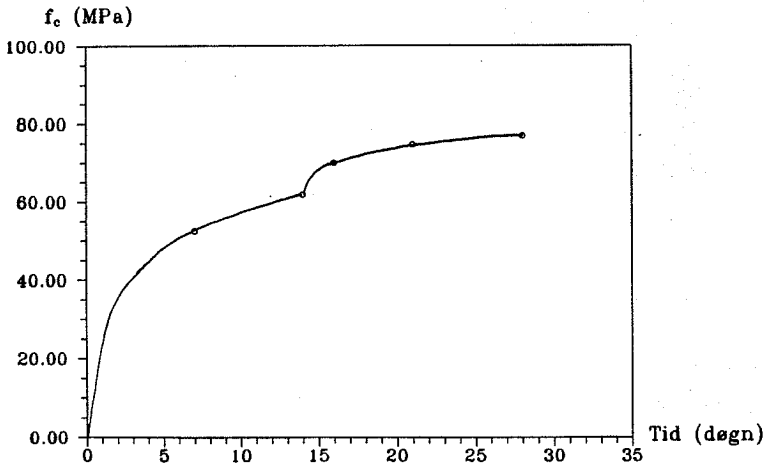
Tabel 6.1 : Opnåede middelbetonstyrker og spredninger i forsøgsserien.

Der er benyttet 6 stk. 100 x 200 mm cylindre til bestemmelse af betonens enskede trykstyrke, og afprøvningen er sket i henhold til DS 423.23. De målte styrker er multipliceret med værdien 0.95, hvorved referencestyrken i.h.t. DS 411 opnås. For betonstyrker over 50 MPa er der ligeledes anvendt faktoren 0.95, som er dokumenteret ved trykforsøg med højstyrkebeton af Nicholaus H. Olsen [90.3]. For at nedsætte spredningen på trykstyrkerne, er cylindrenes endeflader slebet for derved at fjerne evt. ujævnheder. Derudover er der anvendt bløde cellutex-mellemlagsskiver for at mindske friktionen mellem krafthoved og cylinder. Af tabel 6.1 fremgår, at de opnåede trykstyrker for styrkeklasserne B30 og B50 ikke helt har ramt de proportionerede, hvilket dog ikke har nogen betydning for den videre resultatbehandling. Inden for hver enkelt styrkeklasse er de opnåede trykstyrker næsten konstante, hvilket skyldes, dels gode blandercepter og dermed gode bearbejdelige betoner, og dels god komprimering af betonerne. For hele forsøgsserien er der målt luftindhold på 0.6 – 1.2 %, hvilket ligger pænt omkring det naturlige på ca. 1 %, og derfor vil der ikke være nogen reduktion i styrkerne på grund af betonens luftindhold. Den maksimale spredning på betontrykstyrken er ca. 9 % af middelstyrken (B30.1), hvilket må anses at være fuldt ud acceptabelt.

Bearbejdelighedstiden for betonerne i styrkeklasserne B30 og B50 er omkring 45 min., mens den er ca. 35 min. for styrkeklassen B70. Derimod er betonerne i styrkeklassen B110 kun bearbejdelige i ca. 25 min., på trods af et sætmål på omkring 150 mm, og det er derfor vigtigt, at støbning af højstyrkebetoner sker hurtigt, men lige så vigtigt er det, at komprimeringen udføres godt.

Betonernes trykstyrkeudvikling er fulgt for en støbning i hver styrkeklasse: B30.2, B50.3, B70.2 og B110.3. Der er benyttet 6 stk. 100 x 200 mm cylindre til bestemmelse af 28-døgnstyrken, og 3 stk. 100 x 200 mm cylindre til bestemmelse af trykstyrken til andre tidspunkter. En bestemmelse af betonstyrken ud fra en trykprøvning bestående af kun tre cylindre er naturligvis forbundet med en vis usikkerhed, men målingerne er dog tilstrækkelige til at kunne beskrive en styrkeudviklingstendens. På figur 6.1 er vist styrkeudviklingskurven for B70.2.

Styrkeudviklingskurve for B70.2

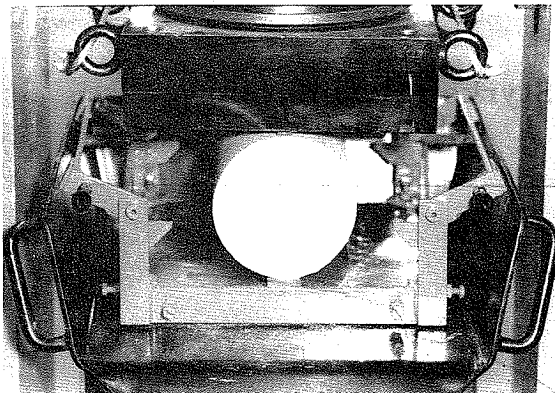


Figur 6.1 : Styrkeudviklingskurve.

Som det fremgår af figuren, får betonen et styrkeløft, når bjælkerne tages op fra vandlagring efter 14 døgn. Dette styrkeløft skyldes udtørringen af betonen. Målepunkterne er forbundet med krumme linier svarende til det forventede styrkeudviklingsforløb, jnf. figur 2.3 s. 11 . De øvrige styrkeudviklingskurver er vist i [91.1], og det fremgår af kurverne, at styrkeudviklingsforløbet er det samme for alle styrkeklasser, samt at 14 døgnsstyrken udgør omkring 80 % af 28 døgnsstyrken.

Undersøgelser af betonens styrkeudvikling har vist, at selv om betonen får et styrkeløft, når den tages op fra vandlagring efter 14 døgn, er 28 døgnsstyrken omtrent den samme, som hvis betonen var vandlagret i 28 døgn og derefter prøvet i våd tilstand.

Spaltetrækstyrken er bestemt på 5–7 stk. 150 x 300 mm cylindre, og afprøvningen er sket i henhold til DS 423.34. På billede 6.1 er vist, hvorledes et spaltetrækforsøg udføres.



Billede 6.1 : Spaltetrækprøvning af betoncylinder.

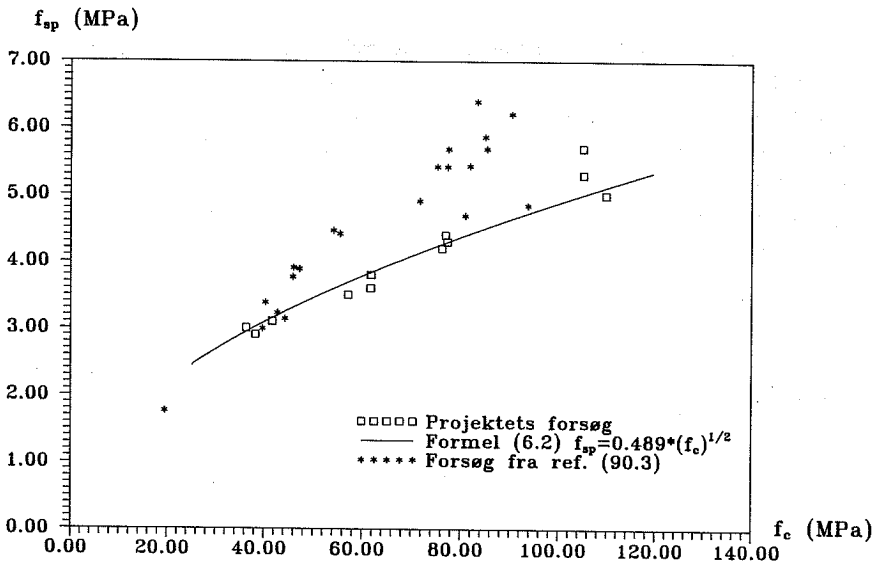
Kraften overføres via to træfiberstrimler (5 x 15 x 300 mm) placeret langs to frembringere, og prøvemethoden indebærer, at der opstår trækspændinger i det lodrette midtersnit vinkelret på trykretningen.

Spaltetrækstyrken, f_{sp} , bestemmes af

$$f_{sp} = \frac{2}{\pi} \frac{N_u}{d h} \quad (6.1)$$

, hvor N_u er brudlasten, d cylinderens diameter og h cylinderens længde. Af tabel 6.1 fremgår det, at spredningen i % er større for spaltetrækstyrken end for trykstyrken. Dette skyldes, at spaltetrækprøvningen er mere følsom overfor eksentriciteter ved kraftoverførslen end tilfældet er ved bestemmelse af trykstyrken. Dertil kommer, at spaltetrækstyrken bestemmes af styrken i ét snit af prøvelegemet, og da beton er et inhomogent materiale, kan styrken i et sådant snit variere en del afhængig af prøvelegemets stilling i prøvemaskinen.

Afbildes de målte spaltetrækstyrker, som funktion af trykstyrken, fås den på figur 6.2 viste sammenhæng.



Figur 6.2 : Spaltetrækstyrken som funktion af trykstyrken.

På figuren beskriver den fuldtoptrukne kurve sammenhængen mellem f_{sp} og f_c på baggrund af forsøgsresultaterne givet i tabel 6.1 . Der er valgt en kvadratrodsfunktion, hvilket er gjort ud fra erfaringer ved forsøg med normalstyrkebeton. Kurven er fremkommet ved anvendelse af mindste kvadraters metode på forsøgsresultaterne, idet funktionsudtrykket $f_{sp} = k \sqrt{f_c}$ er valgt. Følgende sammenhæng blev herved fundet

$$f_{sp} = 0.489 \cdot \sqrt{f_c} \quad \text{for } 36 \text{ MPa} < f_c < 110 \text{ MPa} \quad (6.2)$$

I [90.3] er der givet resultater af spaltetrækforsøg for betonstyrker op til 94 MPa. Det ses af figur 6.2 , at i [90.3] er der målt spaltetrækstyrker, der er noget større end de ved formel (6.2) bestemte. Det skal bemærkes, at de i [90.3] benyttede cylindre til bestemmelse af spaltetrækstyrken er 100 x 200 mm cylindre, og forskellen kan skyldes en størrelseseffekt, idet mindre cylindre generelt giver højere styrker.

På figur 6.2 ses det, at variationen i spaltetrækstyrken er størst for styrkeklassen B110. Dette beror på, at spaltebruddet i højstyrkebetonen indtræffer, når tilslaget trækstyrke overskrides, i modsætning til normalstyrkebeton, hvor spaltebruddet sker i matrix. Forklaringen på den større variation for B110 kan derfor hænge sammen med, at spredningen på tilslagets trækstyrke er større end for cementpastaens. Det bemærkes, at forsøgene i [90.3] ligeledes viser størst variation i spaltetrækstyrken for højstyrkebetonerne.

6.3 Armeringspændinger

6.3.1 Målte flydespændinger

Trækforsøgene og metoden til bestemmelse af flydespændingerne for både bøjle- og længdearmeringen er beskrevet i afsnit 5.3.2 . De opnåede flydespændinger er angivet i tabel 6.2 .

Bjælke	Længdearmeringens flydespænding, f_{yl}	Bøjlearmeringens flydespænding, f_{yw}
B30.1	620 MPa	665 MPa
B30.2	638 MPa	669 MPa
B30.3	605 MPa	672 MPa
B50.1	612 MPa	665 MPa
B50.2	614 MPa	665 MPa
B50.3	612 MPa	665 MPa
B70.1	617 MPa	658 MPa
B70.2	614 MPa	656 MPa
B70.3	617 MPa	663 MPa
B110.1	618 MPa	655 MPa
B110.2	634 MPa	660 MPa
B110.3	629 MPa	655 MPa

Tabel 6.2 : Flydespændinger for anvendt armering.

Som det ses af tabellen, er flydespændingen for armeringen tilnærmelsesvis konstant. Spredningen er kun 5.3 MPa for bøjlearmeringen og 9.3 MPa for længdearmeringen.

6.3.2 Generelt om kalibrering af armeringsgauge

Til bestemmelse af spændingen i en armeringsstang skal man kende sammenhængen mellem gaugesignalet i volt og kraften eller tøjningen i stangen. Fabrikanten af gauge opgiver en gaugefaktor, k_g , der beskriver sammenhængen mellem gaugesignalet og tøjningen ved enakset træk/tryk-påvirkning. Denne sammenhæng fremgår af nedenstående to ligninger.

$$\epsilon_s = \frac{4V_{\text{ref}}}{k_g(1 + 2V_{\text{ref}})} \quad (6.3)$$

$$V_{\text{ref}} = \frac{\text{signal}}{\text{brospænd.}} (\text{aktuel}) - \frac{\text{signal}}{\text{brospænd.}} (\text{reference}) \quad (6.4)$$

, hvor ϵ_s er tøjningen i armeringsstangen, og brospændingen er den spænding, der ligger over Wheatstone-kvartbroen, som gauge indgår i. Hvis stangen er ubelastet, er V_{ref} lig nul. Gaugesignalet vil med god tilnærmelse være proportionalt med brospændingen, hvorfor gaugesignalet divideres med brospændingen for derved at opnå en referenceværdi. Normalt holdes brospændingen konstant under hele belastningsforløbet, f.eks. omkring 6 volt.

Spændingen i en armeringsstang kan, idet formel (6.3) anvendes, beregnes af

$$\sigma_s = \epsilon_s E_s = \frac{4V_{\text{ref}} E_s}{k_g (1 + 2V_{\text{ref}})} \quad (6.5)$$

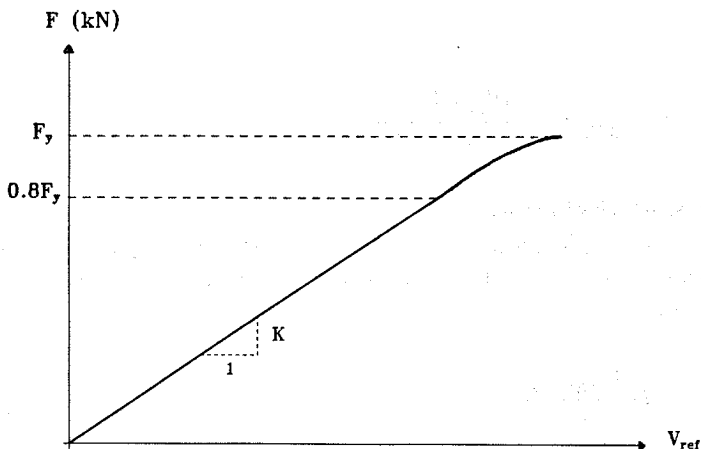
, hvor E_s er stålets elasticitetsmodul.

For stål med en flydetøjning i nærheden af 3 ‰ eller mindre, og med en konstant brospænding omkring 6 volt, vil $V_{\text{ref}} \ll 1$, hvorfor man med god tilnærmelse kan anvende formlen

$$\sigma_s \approx \frac{4V_{\text{ref}} E_s}{k_g} \quad (6.6)$$

, således at man ud fra den opgivne gaugefaktor kan bestemme spændingen i armeringsstangen.

Fabrikanten garanterer for den opgivne k_g -værdi med en vis tolerance, normalt 1 %, og udover denne usikkerhed kan der introduceres en usikkerhed ved selve påsætningen af gaugen. I det tilfælde, hvor man benytter indlimede gauge, se afsnit 5.6.2, kan der opstå skævheder ved oprulningen af armeringsstangen, således at rillen ikke bliver parallel med stangens længderetning. Den eneste måde, hvorved man kan eliminere denne opsummerede usikkerhed er at foretage en kalibrering. Dette gøres ved et enakset træk/trykforsøg, hvor sammenhængen mellem kraft og V_{ref} optegnes for armeringsstangen med påsat gauge, idet V_{ref} er givet ved formel (6.4). Herved opnås en kurve, der i udseende følger arbejdslinien for armeringsstangen, d.v.s et retlinet stykke op til ca. 80 % af flydekraften og dernæst en svag krumning indtil flydning, se figur 6.3.



Figur 6.3 : Typisk kalibreringskurve for armeringsgauge.

Kraften, F , i armeringstangen findes af

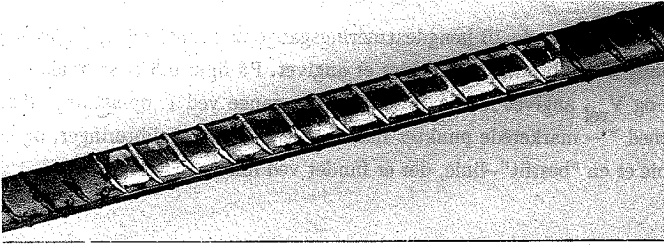
$$F \approx K V_{\text{ref}} \quad , \quad F \leq F_y \quad (6.7)$$

, hvor K er en proportionalitetsfaktor, kaldet kalibreringsfaktoren, for gaugen.

K , der bestemmes som hældningen af den optegnede kurve, har enheden Newton [N]. V_{ref} bestemmes af (6.4), og F_y er flydekraften i armeringsstangen.

6.3.2.1 Kalibrering af længdearmeringsgauge

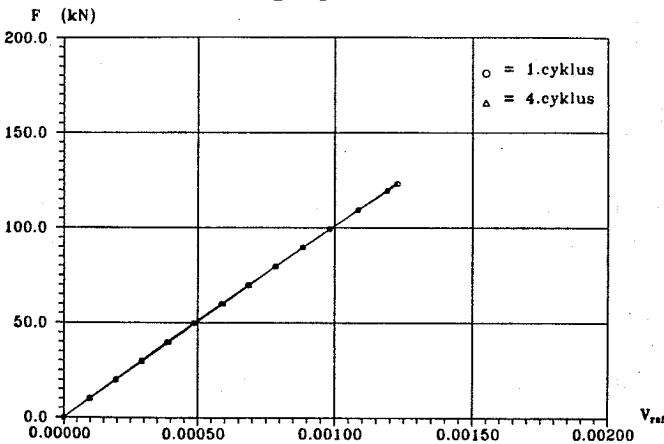
Der er foretaget en kalibrering af 16 indrillede længdearmeringsgauge. Disse er fordelt på 8 armeringstænger hver af længden 3.5 m , idet der er påsat 2 indrillede gauge pr. stang, se afsnit 5.6.2 . De kalibrerede stænger indgår som en del af armeringen for bjælkerne B30.2 og B30.3. Da de kalibrerede armeringsstænger skal bruges i bjælkerne, er det vigtigt, at kammene ikke bliver beskadiget ved forsøgene. Derfor er der mellem pressens kæber og armeringsstangen anbragt en aluminiumsbeskyttelse. På billede 6.2 ses en armeringsstang efter kalibrering.



Billede 6.2 : Ubeskadiget kamme efter kalibrering.

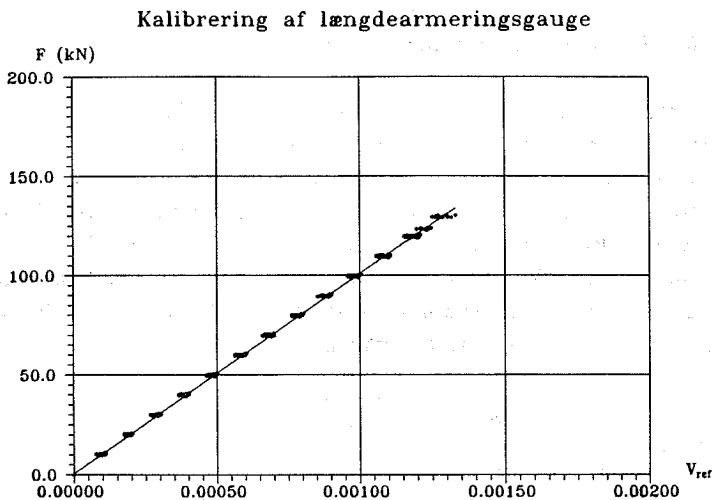
Som det ses på billedet, har aluminiumsbeskyttelsen været effektiv, og kammene er intakte efter kalibreringen. Hver stang er belastet til ca. 80% af flydekraften for at undgå blivende deformationer. Der er belastet i 4 lastcykler for at undersøge, om stålet evt. har en egenspændingstilstand, som kan bevirke, at 1. og 4. lastcyklus viser forskellige resultater. Som det fremgår af figur 6.4, der viser en repræsentativ kalibreringskurve, er dette imidlertid ikke tilfældet, d.v.s. målingerne fra 1. oplastning kan regnes at gælde. Det bemærkes, at for de armeringsstænger, som ikke er blevet kalibreret, svarer selve vriddningsforsøget netop til 1. oplastning.

1. og 4. lastcyklus
for gauge nr. 10



Figur 6.4 : Typisk kalibreringskurve for en gauge ved oplastning i 1. og 4. lastcyklus.

Kalibreringskurverne for de 16 længearmningsgauge er samlet i [91.1], hvor en nærmere beskrivelse af kalibreringen ligeledes er angivet. På figur 6.5 er sammenhængen mellem kraft og V_{ref} angivet for de 16 kalibrerede gauge ved 1. oplastning. På figuren udgør de med * - markerede punkter målingerne fra de 16 kalibreringer, og den fuldtotrukne linie er en "bestfit"-linie, der er fundet ved lineær regression.



Figur 6.5 : Kalibreringsmålinger for længearmningsgauge.

Af figur 6.5 fremgår det, at der er en klar lineær sammenhæng, og på den baggrund er kalibreringsfaktoren for længearmningen bestemt ved lineær regression til

$$K_l = 1 \cdot 10^8 \text{ N}$$

Spredningen på kalibreringsmålingerne i forhold til regressionslinien er bestemt til 1.09 kN.

Da spredningen er lille, er det acceptabelt at benytte denne kalibreringsfaktor til

bestemmelse af længdearmeringsspændingerne i alle bjælkerne og videre kalibrering skønnes derfor ikke nødvendig.

Vurderes den udførte kalibrering i forhold til ikke kalibrerede stænger fås, jnf. formel (6.6) og (6.7) .

$$\text{Gaugefaktor oplyst fra fabrikant} : k_g = 2.02 \pm 1 \%$$

$$\text{Gaugefaktor fundet ved kalibrering} : k_g = \frac{4E_s A_s}{K \ell} = 2.14$$

, d.v.s. , kalibreringen har gjort målingerne på længdearmeringsgaugene mere nøjagtige.

For E_s er benyttet middelværdien af de målte elasticitetsmoduler bestemt ud fra de optegnede arbejdskurver til bestemmelse af flydespændingen, hvilket gav

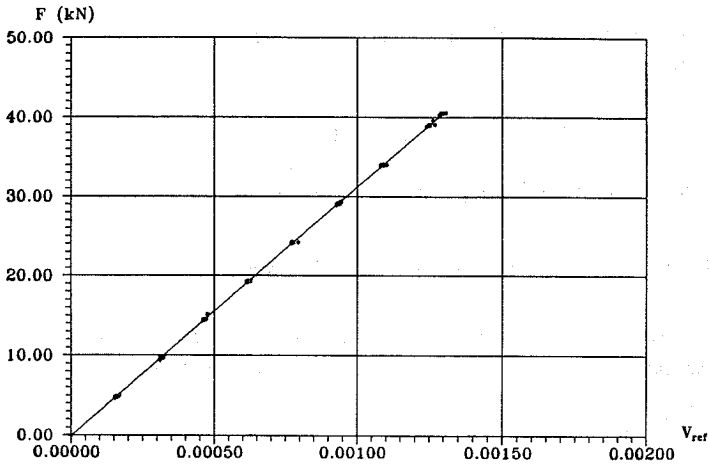
$$E_s = 2.1 \cdot 10^5 \text{ MPa.}$$

6.3.2.2 Kalibrering af bøjlearmeringsgauge

En kalibrering af de i forsøgsserien benyttede bøjlegauge har af praktiske årsager ikke været muligt. Dette skyldes, at en kalibrering ville kræve, at gaugene påsættes før bøjlerne bukkes, og da gaugenes placering i forhold til bøjleens krumning gør, at disse vil blive beskadiget ved bukningen, er en sådan kalibrering ikke udført. Derimod er der af rester fra bøjlearmeringen tildannet 5 prøvestænger af længden 600 mm, hvorpå 2 gauge er pålimet diamentralt modsat hinanden midt på stangen. Ved kalibreringen er stængerne trækprøvet til flydning, og sammenhængen mellem kraft og gaugesignal er målt. De 5 stænger er belastet i 3 lastcykler til 80 % af flydekraften, og en 4. lastcyklus helt til flydning. Signalerne fra de 2 gauge er midlet for at eliminere evt. spændingsbidrag fra bøjning i stangen. Som tilfældet var med længdearmeringen, gav 1. og 4. lastcyklus det samme resultat, og 1. oplastning kan derfor regnes at gælde.

På figur 6.6 er sammenhængen mellem kraft og V_{ref} vist for de 5 kalibrerede stænger ved 1. oplastning.

Kalibrering af bøjlearmeringsgauge



Figur 6.6 : Kalibreringsmålinger for bøjlearmeringsgaugene.

Det ses, at der også her er en klar lineær sammenhæng mellem kraft og V_{ref} , og på den baggrund er der ligeledes for bøjlearmeringen foretaget en lineær regression. Kalibreringsfaktoren for bøjlearmeringen er herved bestemt til

$$K_w = 3.125 \cdot 10^7 \text{ N}$$

Spredningen på kalibreringsmålingerne i forhold til regressionslinien er bestemt til 0.18 kN.

Da spredningen er lille, er det acceptabelt at benytte denne kalibreringsfaktor til bestemmelse af bøjlearmeringsspændingerne i alle bjælkerne, og videre kalibrering skønnes heller ikke her nødvendig.

Vurderes den udførte kalibrering med ikke kalibrerede stænger fås

Gaugefaktor oplyst fra fabrikant : $k_g = 2.02 \pm 1 \%$

Gaugefaktor fundet ved kalibrering : $k_g = \frac{4E_s \cdot A_s}{K_w} = 2.11$

, d.v.s. , kalibreringen har gjort målingerne på bøjlearmeringsgaugene mere nøjagtige.

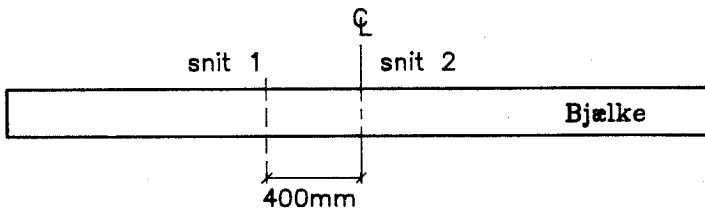
For E_s er benyttet middelværdien af de målte elasticitetsmoduler bestemt ud fra de optegnede arbejdskurver til bestemmelse af flydespændingen, hvilket gav

$$E_s = 2.1 \cdot 10^5 \text{ MPa} .$$

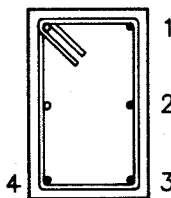
I [91.1] er kalibreringskurverne for alle stænger vist.

6.3.3 Længdearmeringsspænding

Længdearmeringsspændingen i den effektive vridningszone er fastlagt i to snit af bjælken, og i hvert snit er spændingerne bestemt i 4 stænger, se figur 6.7 .



• Indrillede gauge pr. snit:

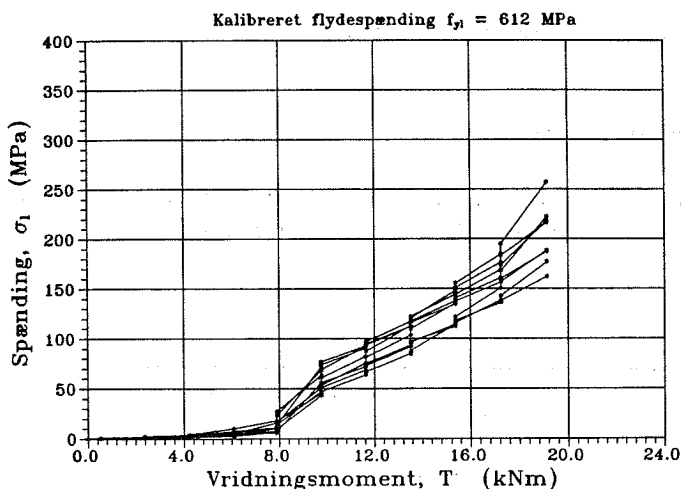


Figur 6.7 : Placering af længdearmeringsgauge.

Kraften i armeringsstangen bestemmes, som beskrevet i afsnit 6.3.2, ved at

multiplisere kalibreringsfaktoren, K_f givet i afsnit 6.3.2.1, med referenceværdien V_{ref} efter formel (6.4), hvorefter armeringsspændingen kan bestemmes, idet der regnes med hele armeringsstangens tværsnitsareal, d.v.s. uden reduktion m.h.t. oprulningen. I figur 6.8 er typiske kurver for længdearmeringsspændingerne i både snit 1 og 2 vist som funktion af det vridende moment.

Spænding i længdearmering for B50.3



Figur 6.8 : Typisk kurve for længdearmeringsspændingerne i en bjælke.

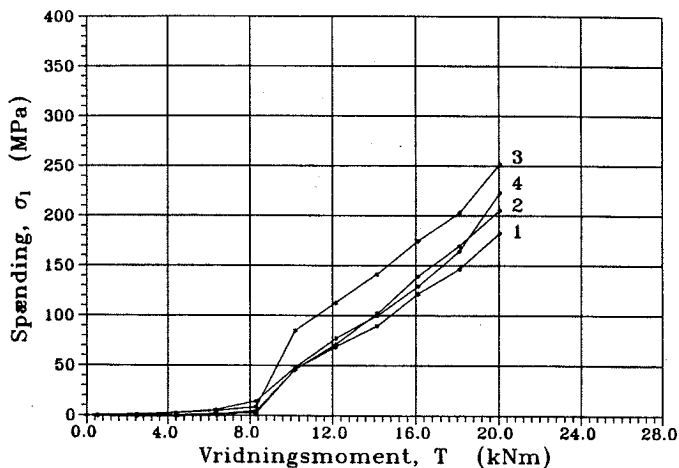
Det ses på figur 6.8, at armeringen ikke optager nogen væsentlig last indtil et vist lastniveau, i dette tilfælde ca. 8.0 kNm, hvorefter spændingerne stiger med øget belastning. Dette lastniveau svarer til revnelasten, d.v.s. det lasttrin, hvor de første diagonalrevner dannes. I det elastiske stadium, hvor betonen ikke er revnet, vil betonen og armering i fællesskab optage de i bjælken forekommende trækspændinger. Når betonens trækstyrke overskrides, revner betonen, og armeringen skal herefter alene optage trækspændingerne. Belastningsniveauet, svarende til revnelasten, vil således ligge tæt på den uarmerede bjælkes bæreevne.

Forskellen i de målte spændinger mellem armeringsstængerne skyldes lokale spændingsforhold, der opstår, når en revne krydser i nærheden af, hvor en gauge er indlimet.

Under hvert lasttrin stiger armeringsspændingerne fra start til slut, hvilket skyldes, at bjælken langsomt deformeres sig under den konstante last. Deformationerne opstår, fordi revnerne udvider sig, selv om lasten holdes konstant. Derved opstår der en lille spændingstilvækst i armeringen, se figur 6.8 .

På figur 6.9 er vist en typisk spændingsvariation i et snit, idet middelspændingen pr. lasttrin er angivet.

Middelspænding pr. lasttrin for længdearmering B70.1, snit 2



Figur 6.9 : Spændingsvariation i et snit. Variationen skyldes lokale spændingsforhold omkring revner.

Den ovenfor beskrevne spændingsvariation gør, at en vurdering af forskellen i spændinger mellem stængerne i tværsnittet er noget usikker. Usikkerheden taget i betragtning, viser forsøgsserien dog, at armeringsstængerne placeret i hjørnerne, d.v.s. stængerne 1,3 og 4, ikke optager en større del af belastningen end armeringsstængerne placeret i tværsnittets vandrette tyngdepunktslinie. Dette resultat fremgår af tabel 6.3 højre kolonne, hvor stængerne er opstillet efter voksende armeringsspændinger, således at stangen længst mod højre er hårdest belastet. Ved armeringsudformninger behøver man derfor ikke at placere al den langsgående armering i hjørnerne. Det bemærkes, at

en vis del af længdearmeringen altid bør fordeles langs tværsnittets rande til begrænsning af revnevidderne i brugstilstanden.

Som det fremgår af tabel 6.3 er tre længdearmeringsgauge gået tabt, hvilket er konstateret at være sket i forbindelse med støbningen, idet alle gaugeene er kontrolleret både før og efter støbningen.

Forsøgsserien viser ligeledes, at der ikke er nogen væsentlig forskel i spændingerne mellem snit 1 og 2, hvorfor de målte længdearmeringsspændinger kan regnes gældende i hele den effektive vridningszone. I tabel 6.3 er også angivet den maksimale og minimale målte længdearmeringsspænding ved brud for hver bjælke.

Bjælke	Maksimal (MPa)	Minimal (MPa)	Snit 1 min → max	Snit 2 min → max
B30.1	239	147	3,4,2	2,4,3
B30.2	227	158	1,4,3,2	1,2,4,3
B30.3	253	140	2,1,3,4	1,2,3,4
B50.1	285	148	1,4,3,2	2,1,3,4
B50.2	308	133	4,3,1,2	2,3,1,4
B50.3	257	162	1,4,3,2	1,2,3,4
B70.1	261	146	1,4,3,2	1,2,4,3
B70.2	235	148	1,3,4,2	2,1,3,4
B70.3	283	168	1,4,3,2	1,2,4,3
B110.1	367	170	1,4,3,2	3,1,2,4
B110.2	370	217	1,4,2,3	2,1,3,4
B110.3	325	233	1,3,2	2,4,3,1

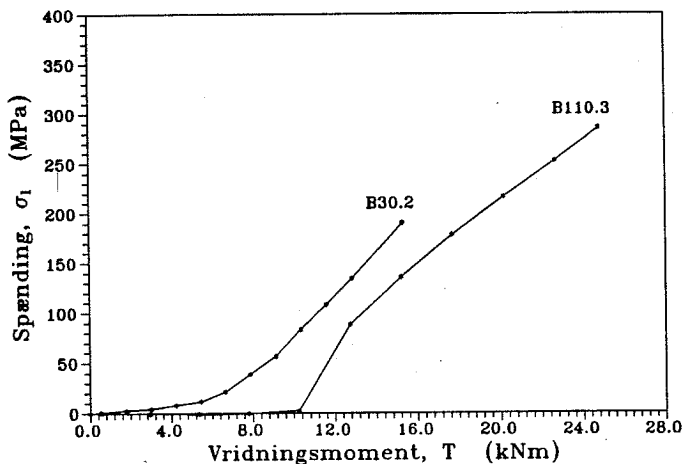
Tabel 6.3 : Venstre kolonne : De maksimale og minimale målte spændinger.

Højre kolonne : Fordeling af spændinger mellem

længdearmeringsstænger. Armeringsspændingerne stiger fra venstre mod højre.

Som det fremgår af tabellen, stiger armeringsspændingerne ved brud fra styrkeklasse B30 til styrkeklasse B110, men ingen af armeringsspændingerne nærmer sig flydespændingen, der ligger omkring 620 MPa.

På figur 6.10 er en typisk spændingskurve for en armeringsstang fra hhv. styrkeklasse B30 og B110 vist.



Figur 6.10 : Generelt spændingsforløb for en bjælke fra styrkeklasse B30 og B110.

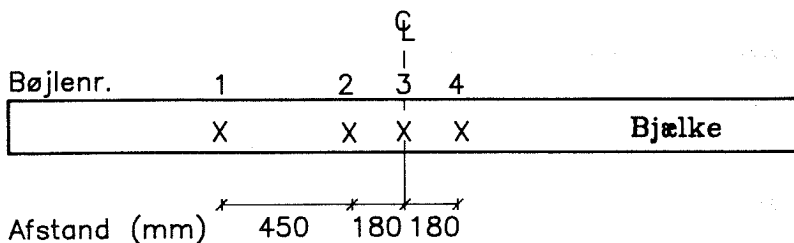
Det ses, at spændingstilvæksterne lige efter revnelasten er større for B110 end for B30, hvilket skyldes den forholdsvise sprøde revnedannelse, der opstår, når højstyrkebeton revner, se afsnit 6.4.

Figuren viser også, at for samme vridningsmoment er armeringsspændingerne mindre for højstyrkebeton end for normalstyrkebeton. Altså kan der for et givet vridningsmoment anvendes mindre armering ved anvendelse af højstyrkebeton.

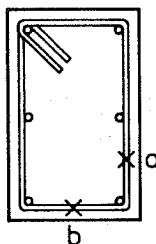
I [91.1] er spændingskurverne for de enkelte bjælker givet.

6.3.4 Bøjlearmeringsspænding

Bøjlearmeringsspændingen i den effektive vridningszone er bestemt på fire bøjler, og på hver bøjle er spændingerne bestemt 2 steder, a og b, se figur 6.11.



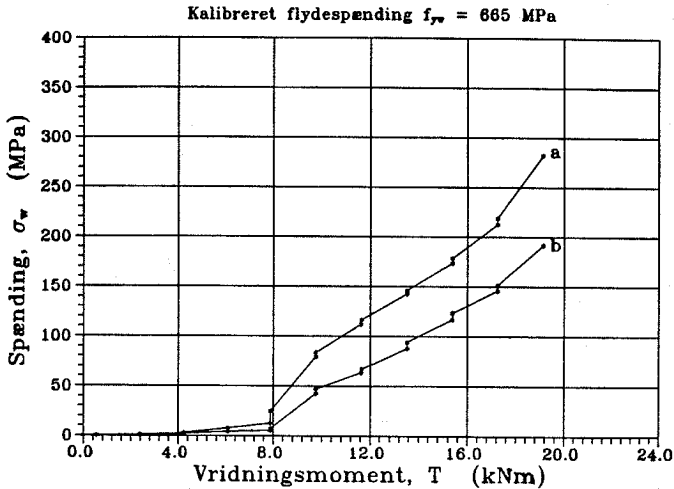
gaugepositioner på bøjle:



Figur 6.11 : Placering af bøjlearmeringsgauge.

Kraften i en bøjle bestemmes ved at multiplicere den beregnede kalibreringsfaktor, K_w givet i afsnit 6.3.2.2, med referenceværdien V_{ref} efter formel (6.4). På figur 6.12 er vist karakteristiske kurver for bøjlespændingen som funktion af det vridende moment.

Spænding i bøjle 1 for B50.3



Figur 6.12 : Repræsentative kurver for bøjlearmeringsspændingen.

Det ses af figuren, at spændingen i bøjlen får en relativ stor tilvækst, når bjælken revner, her ved ca. 8.0 kNm. På grund af tværsnittets form, vil forskydningspændingerne efter en elastisk beregning være størst langs tværsnittets længste side. Forsøgsserien bekræfter denne sammenhæng, og på figur 6.12 ses det, at spændingen også er størst ved tværsnittets længste side (a) i det revnede stadium. Ovenstående vurdering er gjort, til trods for, at man også for bøjlearmeringen må forvente en spændingsvariation p.g.a. revner i nærheden af bøjlegaugene. Der er ikke konstateret nogen væsentlig forskel i spændinger fra gaugebøjle til gaugebøjle, hvorfor bøjlearmeringsspændingerne er sammenlignelige.

I tabel 6.4 er angivet den maksimale og minimale målte bøjlearmeringsspænding ved brud for hver bjælke.

Bjælke	a max. (MPa)	a min. (MPa)	b max. (MPa)	b min (MPa)
B30.1	275	222	224	147
B30.2	277	212	204	162
B30.3	263	213	188	165
B50.1	294	242	259	195
B50.2	338	252	293	233
B50.3	282	228	237	192
B70.1	353	287	281	248
B70.2	339	304	263	228
B70.3	374	279	338	266
B110.1	452	362	433	333
B110.2	485	370	457	305
B110.3	471	381	392	337

Tabel 6.4 : De maksimale og minimale målte bøjlearmeringsspændinger i hhv. position a og b.

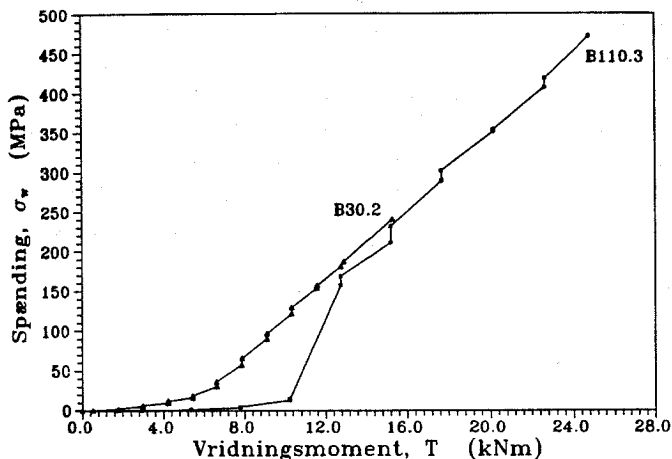
Det ses af tabellen, at bøjlearmeringsspændingen ved brud stiger fra styrkeklasse B30 til styrkeklasse B110, men ingen af armeringsspændingerne er i nærheden af flyde-spændingen, som ligger omkring 660 MPa. Sammenlignes ovenstående tabel 6.4 med tabel 6.3 s. 120, ses det, at bøjlearmeringsspændingerne ved brud er større end længde-armeringsspændingerne, hvilket skyldes, at armeringsgraden i længderetningen er ca. 3 gange større end i bøjleretningen. Sammenligningen viser også, at forholdet mellem bøjle- og længdearmeringsspændingen stiger for stigende betonstyrker, således er forholdet ved brud ca. 1.25 for styrkeklasse B30 og ca. 1.50 for styrkeklasse B110.

Følgende søges der givet en forklaring på dette resultat :

For højstyrkebeton er vedhæftningen mellem betonen og armeringen bedre p.g.a. den tættere beton. Dette medfører, at den lodrette komposant af betontrykket bedre

kan overføres til bøjlearmeringen, d.v.s. bøjlearmeringen optager en relativ større del af belastningen for højstyrkebetonbjælker. Den ringere vedhæftning mellem bøjlen og betonen i normalstyrkebetonbjælker betyder, at en vis del af betontrykkets lodrette komponent optages som bøjning i længdearmeringen.

Udtages en repræsentativ kurve fra hhv. styrkeklasse B30 og B110, som beskriver spændingerne i position a, fås den på figur 6.13 viste sammenligning.



Figur 6.13 : Typisk kurve for spændingsforløbet i position a for en bjælke fra hhv. styrkeklasse B30 og B110.

Som det var tilfældet for længdearmeringen, er spændingstilvæksterne i bøjlen lige efter revnedannelsen større for B110 end for B30, hvilket, som tidligere nævnt, skyldes den forholdsvis sprøde revnedannelse for højstyrkebetonbjælkerne.

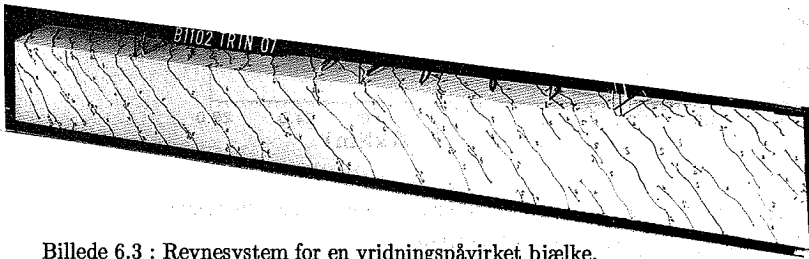
Figur 6.13 viser ligeledes, at for en given belastning er bøjlearmeringsspændingerne mindre for højstyrkebeton end for normalstyrkebeton, med andre ord kan armeringsmængden reduceres ved brug af højstyrkebeton. Dog er forskellen ikke så markant som for længdearmeringsspændingerne, se figur 6.10, hvilket skyldes, at bøjlearmeringen optager en relativ større del af belastningen for B110 end for B30, som omtalt ovenfor.

6.4 Revneudvikling

6.4.1 Revnedannelse

På baggrund af observationerne ved forsøgene gives der i dette afsnit en beskrivelse af revneudviklingen. En sådan beskrivelse af revnerne og deres forløb kan have stor betydning for en vurdering af en konstruktion i brugstilstanden.

Når betonens trækstyrke overskrides, revner betonen, og revnerne dannes i snittene med træk hovedspændinger. På grund af det skrå betontryk er de førstdannede revner diagonalrevner, og disse opstod ved forsøgene først ved tværsnittets længste sider, hvilket er i overensstemmelse med elasticitetsteorien, da forskydningsspændinger er størst på denne side. Under stadig oplastning udvider revnerne sig, og samtidig dannes der nye diagonalrevner, ikke kun ved tværsnittets længste sider, men nu også ved de korte. Derved opstår den på billede 6.3 viste karakteristiske revnespiralform, som fremkommer i vridningspåvirkede bjælker.

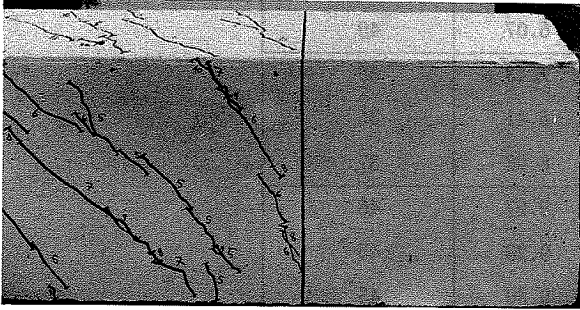


Billede 6.3 : Revnesystem for en vridningspåvirket bjælke.

Mellem diagonalrevnerne dannes der mindre revner parallelt med diagonalrevnerne, og endvidere opstår der enkelte små lodrette revner ved bjælkens under- og overside. På grund af den mindre bøjleafstand, er revnerne generelt mere lodrette ved understøtningerne. I [91.1] er der givet en komplet billedserie for hver bjælke, der viser revneforløbet fra begyndelsen af belastningen til brud.

I det område ved understøtningerne, hvor vridningsmomentet overføres via de massive stålkodser, se figur 5.5 s. 86 og billede 5.5 s. 88, hindres betonen i at revne

p.g.a. det koncentrerede tryk, der opstår ved kraftoverførslen, og som virker i to retninger. De trykspændinger, der herved opstår, er langt større end trækspændingerne i betonen hidrørende fra det vridende moment. På billede 6.4 ses det, at revnerne går helt ud til understøtningerne, hvilket viser, at den ovennævnte randeffekt ikke har nogen indflydelse på spændingsforholdene i den effektive vridningszone.



Billede 6.4 : Revner helt ud til understøtningen.

Da oplastningen er foregået i trin er den nøjagtige revnelast ikke altid mulig at angive, og revnelasten er da bestemt som en middelværdi af de to lasttrin, der omslutter revnelasten. Hermed opnås en konsekvent metode til fastlæggelse af revnelasten. I tabel 6.5 er denne middelværdi, samt middelværdien i % af den målte brudlast angivet.

Bjælke	Revnelast (kNm)	% af brudlast
B30.1	7.18	43
B30.2	6.05	40
B30.3	6.07	40
B50.1	7.43	38
B50.2	6.41	35
B50.3	6.98	37
B70.1	9.27	46
B70.2	9.28	45
B70.3	9.30	45
B110.1	11.46	46
B110.2	9.05	38
B110.3	11.50	46

Tabel 6.5 : Revnelast for bjælkerne i kNm samt i % af den målte brudlast.

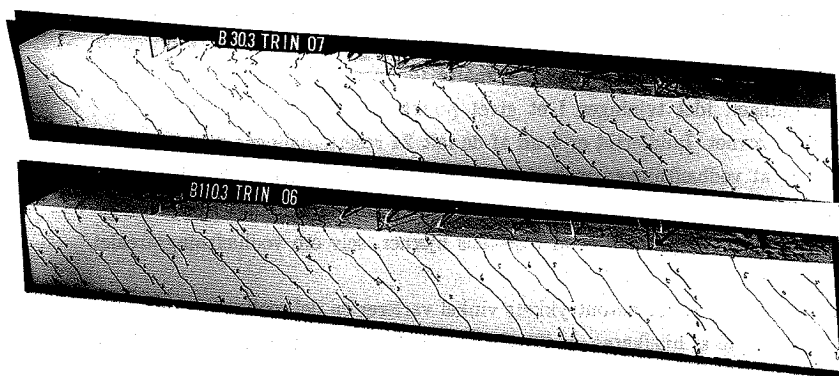
Denne måde at definere revnelasten på gør bestemmelsen en smule usikker, hvilket bl.a. bjælke B110.2 viser, idet denne bjælke revnede umiddelbart før et lasttrin, og derfor er middelværdien en del mindre end den virkelige revnelast. Man kan dog alligevel på baggrund af tabel 6.5 slutte, at revnelasten i % af brudlasten er nogenlunde den samme for normalstyrkebetonbjælker som for højstyrkebetonbjælker, og forsøgene viser, at revnelasten er omkring 40 % af brudlasten.

Ved brug af højstyrkebeton opnås således den fordel, at revnelasten er større sammenlignet med revnelasten for normalstyrkebeton, idet brudlasten alt andet lige øges for stigende betontrykstyrker (se tabel 6.13 side 158).

Derimod forløber revnedannelsen ikke ens, idet revnedannelsen er mere sprød, jo stærkere betonene er, p.g.a. den større energi, der udløses. Dette skyldes, at for højstyrkebeton er det ikke kun cementpastaen, men også tilslaget, der spaltes, og herved

opstår den sprøde revnedannelse. Denne sprødhed blev ligeledes observeret ved spalte-trækforsøgene med højstyrkebetonerne.

Antallet af revner lige efter revnelasten, og under oplastningen til brud, er omtrent det samme for alle styrkeklasser. Højstyrkebetonbjælker påvirket til vridning får således ikke flere revner end bjælker af normalstyrkebeton, men derimod er diagonalrevnerne mere retlinede for højstyrkebetonerne. Sidstnævnte forhold skyldes, at revnerne i normalstyrkebeton dannes i cementpastaen, d.v.s. uden om tilslaget, hvorimod revnerne for højstyrkebeton også skærer igennem tilslaget, og revnerne bliver dermed mere retlinede, se billede 6.5 . For begge bjælker i billede 6.5 svarer revnesystemet til en belastning på ca. 60 % af brudlasten.



Billede 6.5 : Mere retlinede diagonalrevner for højstyrkebeton.

Når belastningen nærmer sig brudlasten, opstår der et nyt revnesystem. Revneretningerne indstiller sig efter en optimal udnyttelse af materialerne, d.v.s. , at revnerne ligger sig ned, idet bjælkerne indeholder en del mere længdearmring end bøjlearmring. Som det senere beskrives, se afsnit 6.6.2 , er dette revnesystem ikke nødvendigvis sammenfaldende med brudlinieforløbet.

De benyttede plasticitetsteoretiske løsninger bestemmer ikke betontrykkets vinkel med vandret i brugstilstanden, men kun i brudøjeblikket. For at vurdere betontrykkets vinkel under belastningsforløbet, er denne målt v.h.a. to middeltøjningsrosetter placeret i nærheden af bjælkens midte, se afsnit 5.6.4 . Da begge middeltøjningsrosetter er placeret i brudzonen, er de afmonteret lige før brud ved de første 6 forsøg for at undgå,

at de skulle gå itu i tilfælde af kraftig dæklagsafskalning ved brud. Da der imidlertid ikke forekom noget eksplosivt brud (se herom i afsnit 6.6.2), er middeltøjningsrosetterne ikke afmonteret ved de sidste 6 forsøg, d.v.s. for bjælkerne i styrkeklasserne B70 og B110.

I [91.1] er de beregnede værdier af rosettemålingerne givet for samtlige bjælker, idet vridningsmomentet T , hovedtøjningerne ϵ_1 og ϵ_2 , samt betontrykkets vinkel, θ , med bjælkens længdeakse er angivet. ϵ_1 er her den algebraisk største hovedtøjning, d.v.s. træk hovedtøjningen, mens ϵ_2 er trykhovedtøjningen i betonen. ϵ_1 , ϵ_2 og θ er beregnet v.h.a. formlerne (5.3) – (5.5) side 97.

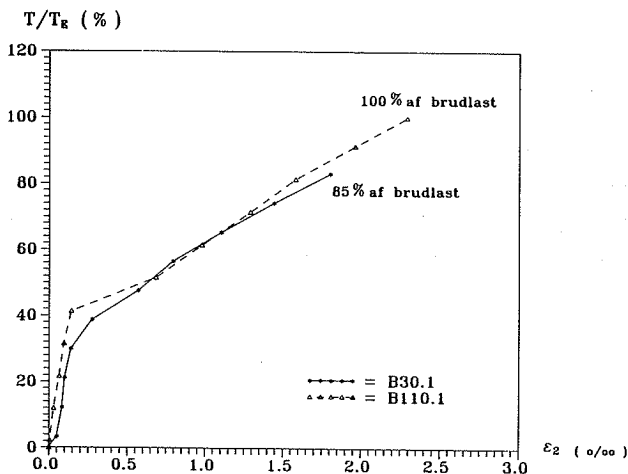
Da de anvendte rosetter måler over et forholdsvis stort område, se afsnit 5.6.4, er det revnernes indflydelse på betontrykkets hældning, der måles, idet antallet af revner, der krydser rosetten, vil variere. Den herved bestemte vinkel vil således være en repræsentativ værdi for bjælken som helhed. De målte tøjninger skal derfor også opfattes som middeltøjninger, idet tøjningen i et givet punkt naturligvis varierer betydeligt, efter betonen er revnet. Imidlertid er 4 ud af de ialt 24 rosettemålinger gået tabt. Årsagen er enten, at vedhæftningen mellem rosetten og betonoverfladen ikke har været tilstrækkelig fra forsøgets begyndelse, eller at der på et tidligt tidspunkt i belastningsforløbet er gået en revne gennem et af rosettens hjørner, selv om vedhæftningsarealet her kun er 10 x 10 mm.

De beregnede værdier for betontrykkets vinkel varierer en del mellem de to undersøgte snit for de fleste af bjælkerne, se [91.1]. Den maksimale forskel mellem vinklerne i de to snit er således ca. 19° (bjælke B110.2). Resultaterne af målingerne viser, at der ikke er nogen generel tendens til, at vinklen er størst ved det ene snit. Denne forskel i vinklen mellem snittene skyldes hovedsageligt, at revnesystemet langs bjælken ikke er fuldstændigt homogent.

Rosettemålingerne viser, at betontrykkets hældning før revnelasten varierer betydeligt, hvilket kan forklares ved, at målingerne i dette lastområde er usikre p.g.a. de meget små tøjninger i betonen. Fra revnelasten til brud ændres betontrykkets vinkel kun lidt, og efter brud falder vinklen en smule. Middelværdien for vinklen er ca. 45° i styrkeklasserne B30 og B50 ved omkring 85 % af brudlasten, og for bjælkerne i styrkeklasserne B70 og B110 er den ca. 40° ved brud. Det bemærkes, at de målte vinkler svarer godt overens med den teoretisk fundne brudvinkel i det totalt overarmerede område, som er 45°.

Ved revnelasten er trækhoovedtøjningen i betonen omkring $0.3 - 0.5 \text{ ‰}$ for alle bjælker. Det bemærkes, at denne tøjning i størrelsesorden svarer til trækbrudtøjningen for beton under enakset træk, se [85.1], og på den baggrund forekommer resultaterne rimelige. Efter revnelasten er trækhoovedtøjningen derimod ret vilkårlig p.g.a. den før omtalte inhomogenitet i revnesystemet langs bjælken, og derfor er det ikke muligt at vurdere forskellen i træktøjninger mellem normalstyrkebeton og højstyrkebeton.

På figur 6.14 er sammenhængen mellem trykhoovedtøjningen ϵ_2 , og forholdet T/T_E vist for en bjælke i hhv. B30 og B110, idet T/T_E angiver den aktuelle lasts relative værdi af den målte brudlast.



Figur 6.14 : Trykhoovedtøjningen som funktion af den relative værdi af brudlasten for en bjælke i styrkeklasse B30 hhv. B110.

Det ses, at der ved revnedannelsen for højstyrkebetonbjælker sker en kraftig forøgelse af trykhoovedtøjningen, mens overgangen fra det urevne til det revnede stadium er mere jævn for bjælken af normalstyrkebeton.

Af figuren fremgår det endvidere, at for et givet lastniveau er trykhoovedtøjningen nogenlunde ens for de to bjælker. Forklaringen på dette kan findes ved at betragte betonens arbejdslinje ved enakset tryk for hhv. normal- og højstyrkebeton, se figur 2.6 s. 14 . Højstyrkebetonen er således karakteriseret ved en højere elasticitetsmodul, og den lineære del af arbejdskurven er relativ længere sammenlignet med normalstyrke-

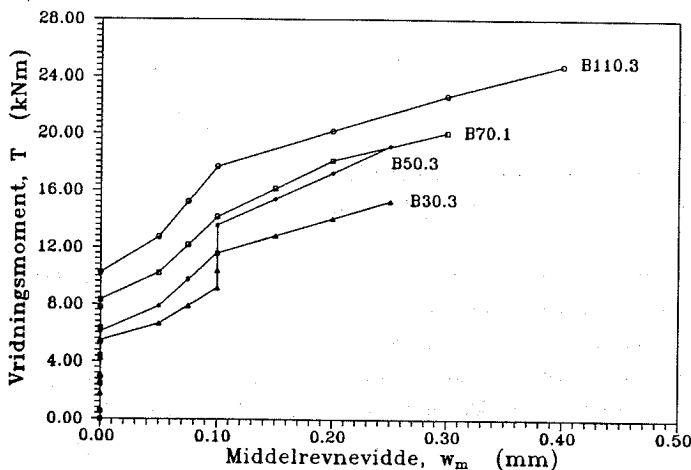
beton, se figur 2.6 . Betontryktøjningen ved brud, som er målt for B70 og B110, ligger omkring 2.5 ‰ , som forekommer rimeligt, idet betonarbejdsliniens toppunkt for højstyrkebeton under enakset tryk er næsten konstant og svarer til en tryktøjning på omkring 2 ‰ , se [88.1] .

Målingerne viser, at middeltøjningsrosetten giver ganske gode resultater til at kunne vurdere tøjningsforholdene i bjælken og til bestemmelse af betontrykkets hældning. Rosettemålingerne kan imidlertid ikke bruges til at give en detaljeret beskrivelse af lokale tøjningsforhold. En sådan beskrivelse kræver nemlig mange små målerosetter, idet man samtidig registrerer antallet af revner ved hver rosette under forsøget.

6.4.2 Revnevidder

For alle bjælker undtagen B30.1 og B30.2, er middelrevnevidden målt i.h.t. afsnit 5.6.7 . Målingerne er samlet i [91.1] .

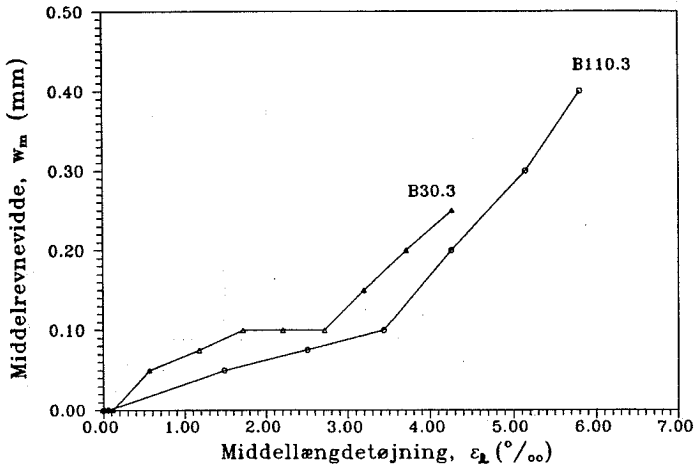
Under oplastningen til brud udvider revnerne sig p.g.a. en forøgelse af hele tværsnittets tøjning. Betragtes et typisk revneviddeforløb for en bjælke fra hver styrkeklasse, fås det på figur 6.15 viste forløb.



Figur 6.15 : Typisk middelrevneviddeforløb for en bjælke fra hver styrkeklasse.

Som det ses, øges revnevidden ved brud for stigende betonstyrker, således at der ved brud er en revneviddeforøgelse på ca. 0.15 mm fra styrkeklasse B30 til styrkeklasse B110. Figuren viser, at ved anvendelse af højstyrkebeton bliver revnevidderne mindre for et givet vridningsmoment, end tilfældet er for normalstyrkebeton. De mindre revnevidder for en given belastning betyder, at ved brug af højstyrkebeton nedsættes risikoen for korrosion af armeringen.

På figur 6.16 er sammenhængen mellem middelrevnevidden og middellængdetøjningen for bjælken afbildet. Middellængdetøjningen er tøjningen af hele bjælken, se nærmere herom i afsnit 6.5.2 .



Figur 6.16 : Middelrevnevidden som funktion af middellængdetøjningen.

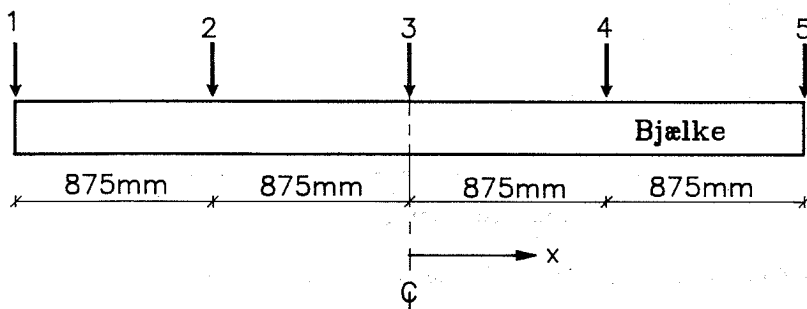
Som det fremgår af figuren, har kurven for normalstyrkebetonbjælken et vandret plateau ved revnevidden 0.1 mm, mens dette ikke er tilfældet for højstyrkebetonbjælken.

6.5 Bjælkernes deformationer

I dette afsnit vil der blive foretaget en analyse af bjælkeelementernes virkemåde, d.v.s. en beskrivelse af vinkeldrejningen, rotationen samt længdeændringen af bjælkerne. Disse deformationsstørrelser er ikke parametre, der indgår i selve beregningen af vridningsbæreevnen, men er målt for at kunne beskrive bjælkernes deformationsforhold i brugstilstanden.

6.5.1 Vinkeldrejning og rotation

Der er som beskrevet i afsnit 5.6.1 målt vinkeldrejninger i 5 positioner langs bjælken. Målepositionerne fremgår af figur 6.17 .



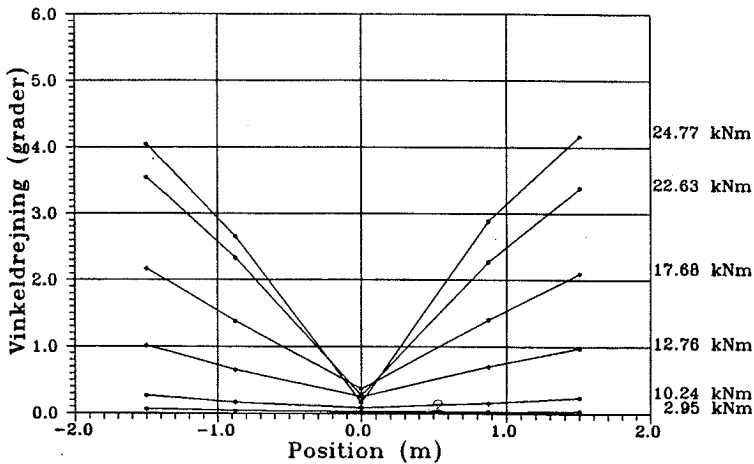
Figur 6.17 : Målepositioner til bestemmelse af bjælkens vinkeldrejning.

Da det vridende moment påføres ved begge understøtninger, får begge bjælkeender en vinkeldrejning i forhold til udgangsstillingen. Dette medfører, at der i et snit omkring bjælkens midte ikke vil være nogen vinkeldrejning. Snittets beliggenhed afhænger af forskellen i de to bjælkeenders vinkeldrejning.

Da lasten påføres af to hydrauliske presser, som er parallelforbundet til samme styreenhed, betyder det, at der ikke er forskel på olietrykket i de to presser til et givet tidspunkt. På trods af dette, opstod der under oplastningen en lille forskel mellem de to bjælkeenders vinkeldrejning, hvilket er et udtryk for forskellen i friktion i hhv. lejer og presser. For at styre bjælkeendernes deformationer bedst muligt, er rammernes lodrette nedbøjning målt ved oplastningen mellem to lasttrin. Styringen af nedbøjningerne er foretaget ved brug af små 5 og 10 kg lodder. Det skal bemærkes, at den her beskrevne styring af bjælkens vinkeldrejning ikke er foretaget for bjælke B30.1. En evt. forskel i bjælkeendernes vinkeldrejninger har dog ingen indflydelse på værdien af det vridende moment, idet systemet hele tiden er i ligevægt.

På figur 6.18 er en typisk vinkeldrejningskurve for en bjælke vist. Vinkeldrejningen ved bjælkeenderne er henført til understøtningerne, da det yderste stykke af bjælken (250 mm) er ubelastet, se figur 5.4 s. 84.

Vinkeldrejning som funktion af last og position for B110.3



Figur 6.18 : Typisk kurve for en bjælkes vinkeldrejning målt i 5 positioner.

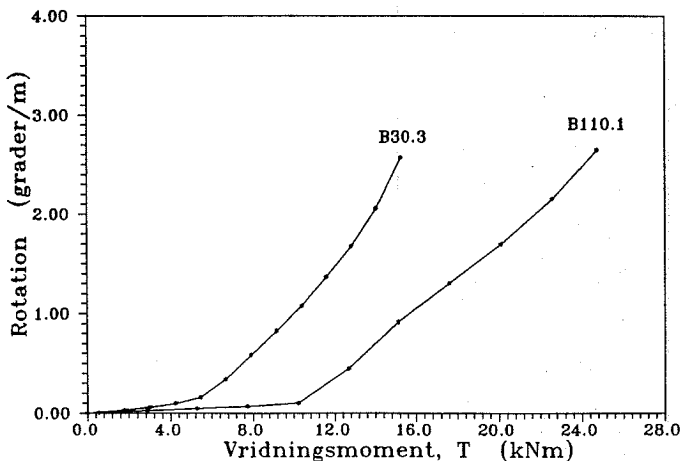
Figur 6.18 viser, at vinkeldrejningskurven er næsten symmetrisk omkring bjælkens midte, hvor den er tilnærmelsesvis lig nul. Det ses også, at vinkeldrejningen ved bjælkens midte falder omkring brud, hvilket generelt er karakteristisk for forsøgene, se [91.1]. Grunden til faldet er, at omkring brud øges deformationerne kraftigt, og dermed overvindes friktionskraften i begge lejer. Dette medfører, at den tidligere forskel i friktion mellem lejerne ikke længere har betydning, og nulpunktet for vinkeldrejningen vil derfor af symmetri grunde flytte sig ind mod midten af bjælken.

Det vridende moment er påsat i en afstand på 250 mm fra hver bjælkeende, og derfor forekommer der kun deformationer i bjælken over en strækning på ialt 3 m, d.v.s. mellem understøtningerne. Bjælkens rotation er derfor bestemt som bjælkens totale vinkeldrejning divideret med afstanden mellem understøtningerne. Den totale vinkeldrejning af bjælken er summen af vinkeldrejningerne ved understøtningerne. I tabel 6.6 er rotationen ved brud angivet for alle bjælker.

Bjælke	Rotation (grader/m)
B30.1	3.0
B30.2	2.9
B30.3	2.6
B50.1	2.5
B50.2	3.1
B50.3	2.6
B70.1	2.4
B70.2	2.3
B70.3	2.7
B110.1	2.6
B110.2	2.9
B110.3	2.7

Tabel 6.6 : Rotationen ved brud.

Som det fremgår af tabellen, er bjælkernes rotation ved brud nogenlunde den samme for alle styrkeklasser, og forsøgene viser, at den ligger omkring 2.7 grader/m. Forklaringen på dette ligger i, at højstyrkebetonbjælkerne får en større vridningsstivhed p.g.a. den stigende elasticitetsmodul, men samtidig kan bjælkerne optage et større vridningsmoment, således at disse to forhold opvejer hinanden. Udtages en karakteristisk rotationskurve fra hhv. styrkeklasse B30 og B110 fås følgende rotationsforløb.



Figur 6.19 : Typisk forløb af rotationskurven for en bjælke i styrkeklasse B30 og B110.

Det ses, at bjælkerne indtil et vist lastniveau ikke har nogen særlig deformation. Dette lastniveau svarer til revnelasten, og det ses af figuren, at efter revnelasten deformerer bjælkerne sig kraftigere. I figuren er det middelværdien af vinkeldrejningen pr. lasttrin, der er angivet. Af figur 6.19 fremgår det, at rotationstilvæksten lige efter revnelasten er kraftigere for højstyrkebetonbjælker end for normalstyrkebetonbjælker, d.v.s. jo stærkere betonerne er, jo mere sprød er revnedannelsen. Før revnelasten er der en lineær sammenhæng mellem last og rotation, hvilket er i overensstemmelse med elasticitetsteorien. For både B30 og B110 gælder det, at efter revnelasten vokser hældningen af rotationskurven, se figur 6.19, som er et udtryk for, at vridningsstivheden mindskes.

Af figur 6.19 ses det, at højstyrkebetonbjælker har en større vridningsstivhed sammenlignet med normalstyrkebetonbjælker, d.v.s. rotationen er mindre for højstyrkebetonbjælker for et givet vridningsmoment.

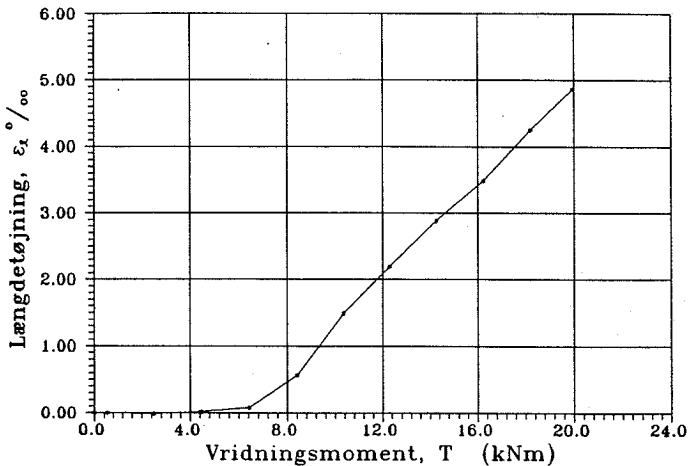
I [91.1] er kurverne for hhv. vinkeldrejning og rotation angivet for alle forsøgsbjælker.

6.5.2 Længdeændring

Når betonen revner, forlænger bjælken sig. Denne længdeændring er målt, undtagen for B70.2, idet den ene transducer svigtede undervejs i forsøget.

Bjælken revner kun mellem understøtningerne, og derfor bestemmes bjælkens længdetøjning, som den totale længdeændring divideret med afstanden mellem understøtningerne, d.v.s. 3 m. På figur 6.20 er sammenhængen mellem vridningsmomentet og middellængdetøjningen vist for en repræsentativ bjælke. Middellængdetøjningen er bestemt som en middelværdi af længdetøjningen ved start og slut af det pågældende lasttrin.

Middellængdetøjning for B50.1



Figur 6.20 : Typisk kurve for middellængdetøjningen som funktion af vridningsmomentet.

Det ses, at bjælken får en kraftig tøjningstilvækst ved revnelasten, hvorefter kurven er tilnærmelsesvis retlinet indtil brud. Ved bestemmelsen af længdeændringen er

referencescannet ikke henført til nullasten. Dette skyldes, at ved fjernelse af rammernes understøtninger ved den ubelastede bjælke, berøres rammene, således at der opstår små rystelser i bjælken, som påvirker længdeændringsmålingerne. Derfor er referencescannet henført til scannet efter, at rammernes understøtninger er fjernet.

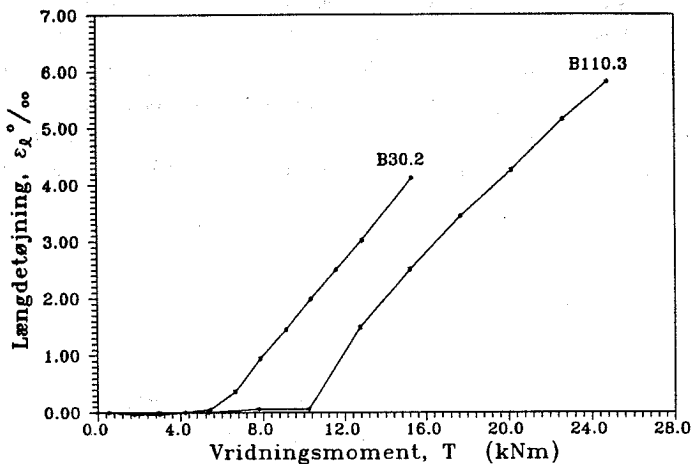
I tabel 6.7 er bjælkernes længdetøjning ved brud angivet.

Bjælke	Længdetøjning ϵ_l (‰)
B30.1	5.1
B30.2	4.1
B30.3	4.3
B50.1	4.9
B50.2	4.8
B50.3	4.9
B70.1	5.1
B70.2	—
B70.3	5.3
B110.1	5.8
B110.2	6.5
B110.3	5.8

Tabel 6.7 : Længdetøjningen ved brud.

Det ses, at længdetøjningen ved brud stiger jo stærkere betonerne er, ca. 35 % fra B30 til B110. Som omtalt i afsnit 6.4 er antallet af revner for normal – og højstyrkebetonbjælkerne nogenlunde det samme, men derimod stiger revnevidden med stigende betonstyrker, og herved får højstyrkebetonbjælkerne en større længdeændring ved brud. Som det også er omtalt i afsnit 6.4, er revnedannelsen mere sprød, jo stærkere betonerne er, d.v.s., tilvæksten i længdeændringen lige efter revnelasten bliver større.

for stigende betonstyrker. Dette er vist på figur 6.21 , idet en typisk middeltøjningskurve fra styrkeklasse B30 og B110 er vist.



Figur 6.21 : Typisk forløb af middellængdetøjningen for en bjælke i styrkeklasse B30 og B110.

Det fremgår af figur 6.21 , at for et givet vridningsmoment er længdeændringen for en højstyrkebetonbjælke ca. 50 % mindre end for en normalstyrkebetonbjælke. Dette har en væsentlig betydning f.eks. i samlinger, som ikke tillader for store bevægelser.

Forløbet af middellængdetøjningen for hvert forsøg er vist i [91.1] .

6.6 Vridningsbæreevnen

Til vurdering af bjælkernes bæreevner, er det ikke kun brudmomentets numeriske værdi, der har interesse, men også den ved forsøgene observerede brudform har stor betydning. I den forbindelse er det vigtigt at vide, om den efter teorien antagne brudform svarer til brudformen ved forsøgene. Endvidere er det vigtigt at bestemme en eksperimentel værdi af ν_t for højstyrkebeton, idet plasticitetsteorien for armeret beton baseres på denne faktor, og i tilfældet ren vridning kan ν_t kun bestemmes ved forsøg. I dette afsnit skal der derfor på baggrund af de udførte forsøg gives en beskrivelse af de ovenstående forhold.

6.6.1 Definition af brudlast

Brudlasten er defineret ved den maksimale last, som er påført bjælken under forsøget, og er ved alle 12 forsøg fastlagt v.h.a. computerregistrerede lastdata, som er opsamlet fra en datalogger. Umiddelbart efter brudlasten var nået, blev der konstateret et fald i lasten på ca. 20 %, og samtidig hermed en kraftig øgning af bjælkens rotation. For alle bjælker skete bruddet i den effektive vridningszone, enten meget tæt på eller i bjælkens lodrette symmetrisnit. Dette betyder, at de i vridningszonen gældende værdier for geometri og materialeparametre skal benyttes i vurderingen af de opnåede resultater.

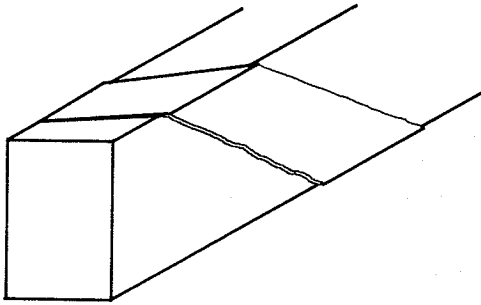
Friktionen i vuggelejet, se figur 5.5 side 86, vil med en friktionskoefficient på ca. 0.05 kun give anledning til en ubetydelig reduktion af vridningsmomentet i bjælken. Derfor er der set bort fra denne reduktion ved bestemmelsen af brudlasten. Egenvægten af den asymmetriske del af rammerne er derimod inkluderet i brudlasten. Erfaringsmæssigt vides, at usikkerheden på kraftsignalet fra de benyttede presser er lille ($\pm 1\%$), hvorfor denne usikkerhed ikke tages i regning.

6.6.2 Brudform

I dette afsnit vil den ved forsøgene observerede brudfigur blive beskrevet, og brudformer fra andre forsøg vil ligeledes blive inddraget i analysen.

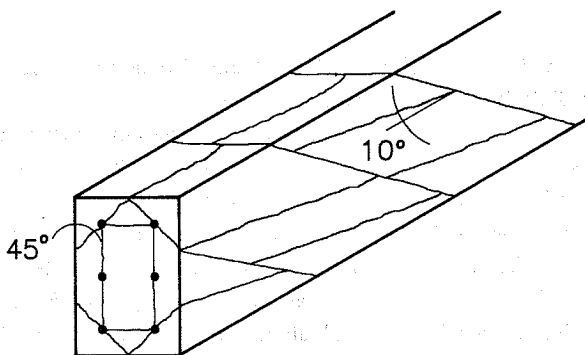
Under oplastning til brud blev der jævnlgt banket på bjælkens overflade med en hammer, både langs tværsnittets sider og omkring hjørnerne. En visuel iagttagelse, eller en hul lyd ved denne banken, kunne afsløre en dæklagsafskalning.

For alle forsøgene gælder det imidlertid, at under oplastningen helt til brud er der ikke konstateret nogen form for dæklagsafskalning. I nærheden af brudlasten begynder planerne omkring de førstdannede diagonalrevner langsomt at forskyde sig fra hinanden, og i brudøjeblikket bliver denne forskydning kraftigere, som det ses på figur 6.22 .



Figur 6.22 : Forskudte planer ved brud.

Bruddet i alle forsøgsbjælkerne skete omkring midten af bjælken i 2 – 3 af de førstdannede diagonalrevner. Brudområdet havde typisk en udstrækning på ca. 0.5 m . Udover bruddet i de førstdannede diagonalrevner, opstår der et karakteristisk brudlinienforløb, som vist på figur 6.23 .



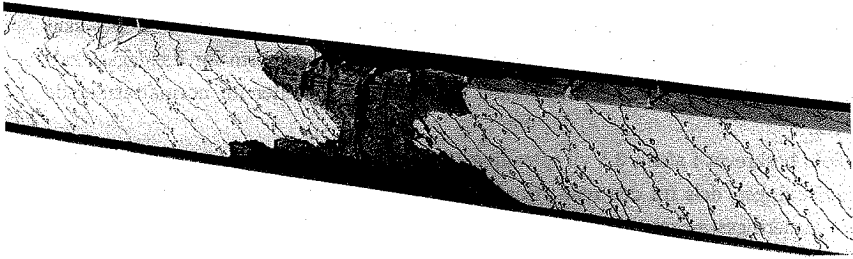
Figur 6.23 : Observeret brudfigur.

Som det ses af figuren, dannes der i brudøjeblikket brudlinier mellem de langsgående armeringsstænger, og når bjælken deformerer sig yderligere, efter at brudlasten er nået, dannes der brudlinier omkring tværsnittets hjørner. Brudlinierne i hjørnerne ligger under en vinkel på omkring 45° med siderne i et snit af bjælken, se figur 6.23 , og krydser de langsgående armeringsstænger. Hjørnebrudlinierne danner en vinkel på ca. 10° med bjælkens længderetning, se figur 6.23 .

Forskydningen af planerne ved brud er kraftigere og mere sprød for stigende betonstyrker, uden at der dog er tale om et eksplosivt brud. Grunden til det forholdsvise rolige brud skyldes den meget store mængde armering, der holder sammen på betonen. Brudlinieforløbet vist på figur 6.23 betyder, at dæklaget ved brud skubbes ud, og ved den efterfølgende kraftige deformation af bjælken falder hjørnedæklaget af.

Der er således ud fra forsøgene intet, der tyder på, at dæklaget ikke optager en del af belastningen indtil brud.

Billede 6.6 viser bjælke B50.3 efter brud, idet dæklaget er pillet af ved håndkraft.



Billede 6.6 : Bjælke efter brud. På grund af brudlinier mellem de langsgående armeringsstænger kan dæklaget uden videre skrælles af.

En tidligere undersøgelse af dæklagets indflydelse på bæreevnen er foretaget af John Sander Nielsen [83.3]. Denne undersøgelse viser, at for bjælker, der ved forsøg er målt totalt overarmeret, har dæklagstykkelsen ingen indflydelse på vridningsbæreevnen. Det er vigtigt, at man gør sig klart, at der er tale om forsøg med totalt overarmerede bjælker, idet det i [83.3] er vist, at brudfiguren er forskellig for bjælker, der ved forsøg er målt hhv. normalt armeret og overarmeret. Ligesom for brudfiguren vist i figur 6.23, viser forsøgsserien [83.3], at der ved forsøg med overarmerede bjælker dannes spaltebrudlinier mellem de langsgående armeringsstænger, hvorimod disse brudlinier ikke forekommer for normalt armerede bjælker. Det skal bemærkes, at der i [83.3] er

benyttet ens tværsnit, således at det kun er flydespændingen, der varierer. Det skal endvidere bemærkes, at der i [83.3] ikke er konstateret nogen form for dæklagsafskalning under belastningen til brud, hverken for overarmerede eller for normalarmerede bjælker.

Som beskrevet i afsnit 3.5 vil spændingstilstanden i tværsnittet være sammensat af to påvirkninger, dels fra den rene vridningspåvirkning, og dels fra de i hjørnerne beliggende armeringsstængers tryk på betonen. Sidstnævnte forhold kan således have stor indflydelse på bruddet for overarmerede bjælker, idet trykket på betonen vil danne en spaltebrudlinie mellem armeringsstængerne. Er en overarmeret bjælkes bæreevne således bl.a. styret af styrken i et snit mellem armeringsstængerne, kan dette være forklaringen på, at dæklagstykkelsen ikke har indflydelse på bæreevnen. Den herved givne brudbeskrivelse betyder, at dæklaget helt op til brud er aktivt i spændingsoptagelsen, indtil spaltstyrken overskrides, hvorved der opstår en spændingsomlejring, der medfører, at hele belastningen skal optages inden for spaltebrudlinierne. Da det yderste af et tværsnit optager en stor del af belastningen ved vridning, bliver spændingsforøgelsen inden for spaltelinierne temmelig stor, når spaltebruddet indtræffer. Dette resulterer i, at betonens trykstyrke overskrides, og derved fremkommer det endelige brud i bjælken.

D. Mitchell og M. P. Collins [74.3] har undersøgt indflydelsen af dæklaget ved sammenligning af to ens normalarmerede bjælker, hvor den ene bjælke havde et dæklag på ca. 40 mm, mens den anden kun havde et dæklag på ca. 2 mm. Undersøgelsen viste, at de to bjælker havde samme vridningsbæreevne, og på bjælken med det store dæklag blev der observeret dæklagsafskalning. Forfatterne har ikke oplyst, hvornår dæklagsafskalningen fandt sted. Ud fra denne sammenligning ser det ud til, at dæklaget heller ikke for normalarmerede bjælker har indflydelse på bæreevnen, men det skal understreges, at der kun er tale om to forsøg.

For at kunne give en mere detaljeret beskrivelse af brudformen ved vridning kræves der et nærmere studium af tidligere udførte forsøg.

6.6.3 Målte bæreevner

I nedenstående tabel 6.8 er aktuelle dimensioner og materialedata for de 12 forsøgsbjælker angivet.

Bjælke	h (mm)	b (mm)	c (mm)	i #	d_{ℓ} (mm)	d_w (mm)	a_w (mm)	f_c (MPa)	$f_{y\ell}$ (MPa)	f_{yw} (MPa)
B30.1	275	160	15	6	18.1	10.1	90	41.7	620	665
B30.2	275	160	15	6	18.1	10.0	90	38.2	638	669
B30.3	275	160	15	6	18.1	10.0	90	36.3	605	672
B50.1	275	160	15	6	18.1	10.0	90	61.8	612	665
B50.2	275	160	15	6	18.1	10.0	90	57.1	614	665
B50.3	275	160	15	6	18.1	10.0	90	61.7	612	665
B70.1	275	160	15	6	18.1	10.0	90	77.3	617	658
B70.2	275	160	15	6	18.1	10.0	90	76.9	614	656
B70.3	275	160	15	6	18.1	10.0	90	76.2	617	663
B110.1	275	160	15	6	18.0	10.0	90	109.8	618	655
B110.2	275	160	15	6	18.0	10.0	90	105.0	634	660
B110.3	275	160	15	6	18.1	10.0	90	105.1	629	655

Tabel 6.8 : Geometriske mål og materialeparametre i forsøgsserien.

Det ses af tabel 6.8 , at det kun er betonstyrken, der varierer gennem serien. Den lille variation i armeringens flydespænding skyldes alene spredningen inden for stålleverancen. De målte brudmomenter for bjælkerne, T_E , der er defineret og målt som beskrevet i afsnit 6.6.1 , er samlet i tabel 6.9 .

Bjælke	f_c (MPa)	T_E (kNm)
B30.1	41.7	16.62
B30.2	38.2	15.29
B30.3	36.3	15.25
B50.1	61.8	19.95
B50.2	57.1	18.46
B50.3	61.7	19.13
B70.1	77.3	20.06
B70.2	76.9	20.74
B70.3	76.2	20.96
B110.1	109.8	24.72
B110.2	105.0	23.62
B110.3	105.1	24.77

Tabel 6.9 : Opnåede middelbetonstyrker og vridningsbæreevner.

Som det fremgår af tabel 6.9 , stiger vridningsbæreevnen for stigende betonstyrker, men den procentvise bæreevneforøgelse styrkeklasserne imellem er dog mindre end stigningen i betonstyrken. Dette resultat viser, at betonens plastiske egenskaber er mindre udtalt for de høje betonstyrker, d.v.s. ν_t -værdien, som korrigerer for betonens manglende plasticitet, må falde for stigende værdier af betonstyrken. Af tabel 6.9 ses det endvidere, at variationen på de målte vridningsbæreevner inden for de enkelte styrkeklasser er meget lille, idet det også tages i betragtning, at betonstyrken varierer lidt inden for styrkeklasserne. At bæreevnerne ligger så tæt inden for hver styrkeklasse, må tilskrives en kombination af gode blanderecepter, ensartede udstøbninger og komprimering af bjælkeelementerne, samt en velfungerende forsøgsopstilling.

6.6.4 Bestemmelse af effektivitetsfaktoren ud fra de udførte forsøg

Generelt gælder det, at effektivitetsfaktoren er tæt knyttet til den anvendte teori, således at der til forskellige teorier hører forskellige ν_t -funktioner. I dette afsnit gives der på baggrund af de udførte forsøg en sammenhæng mellem effektivitetsfaktoren ν_t og betonstyrken f_c , idet nedenstående tilfælde behandles.

a) Beregning uden dæklag

Teorien givet i afsnit 3.2 anvendes, idet dæklaget ikke medregnes til det effektive tværsnit.

b) Beregning med dæklag

Teorien givet i afsnit 3.2 anvendes, idet hele dæklaget medregnes til det effektive tværsnit.

c) Simplificeret beregningsmetode med dæklag

Den optimerede beregningsmetode beskrevet i afsnit 3.3 benyttes, og hele dæklaget medregnes.

Det tilsigtes, at teori og forsøg skal stemme overens. Derfor bestemmes den forsøgs-mæssige værdi af ν_t , benævnt ν_E , ved indsættelse af de opnåede vridningsbæreevner i teoriens ligninger.

Som det fremgår af afsnit 5.6 er armeringsspændingerne bestemt v.h.a. strain gauge målinger, og disse målinger viser, jnf. afsnit 6.3, at både bøjle- og længdearmringsspændingerne ved brud er langt fra flydespændingen. Det kan derfor med sikkerhed siges, at alle forsøgsbjælkerne er målt som værende totalt overarmerede, og dette betyder, at der i den efterfølgende bestemmelse af ν_E skal benyttes ligningerne for armeringstilfældet (OAT).

a) Beregning uden dæklag

Den forsøgsmæssige værdi af ν_t bestemmes efter formel (3.37) side 32, idet den optimerede skivetykkelse β_l er lig $\frac{1}{2}$ i armeringstilfældet (OAT). Herved fås

$$\begin{aligned} \nu_E &= \frac{4t_E}{(k - \frac{1}{3})} \\ &= \frac{4T_E}{(b - 2c)^3 f_c (k - \frac{1}{3})} \end{aligned} \quad (6.8)$$

, idet $b_e = b - c_v - c_h = b - 2c$ for bjælkerne, og $k = \frac{h_e}{b_e}$. Med bjælkernes parametre givet i tabel 6.8 og de opnåede vridningsbæreevner i tabel 6.9, får man ved brug af formel (6.8) følgende sammenhørende værdier af ν_E og f_c .

Bjælke	f_c (MPa)	ν_E
B30.1	41.7	0.468
B30.2	38.2	0.470
B30.3	36.3	0.493
B50.1	61.8	0.379
B50.2	57.1	0.379
B50.3	61.7	0.364
B70.1	77.3	0.305
B70.2	76.9	0.317
B70.3	76.2	0.323
B110.1	109.8	0.264
B110.2	105.0	0.264
B110.3	105.1	0.277

Tabel 6.10 : Beregning uden dæklag. Sammenhørende værdier af ν_E og f_c .

På figur 6.24 er sammenhængen mellem ν_E og f_c vist grafisk. På figuren er der endvidere indtegnet en regressionskurve, som er fremkommet ved benyttelse af mindste kvadraters metode på de opnåede resultater, idet funktionsudtrykket

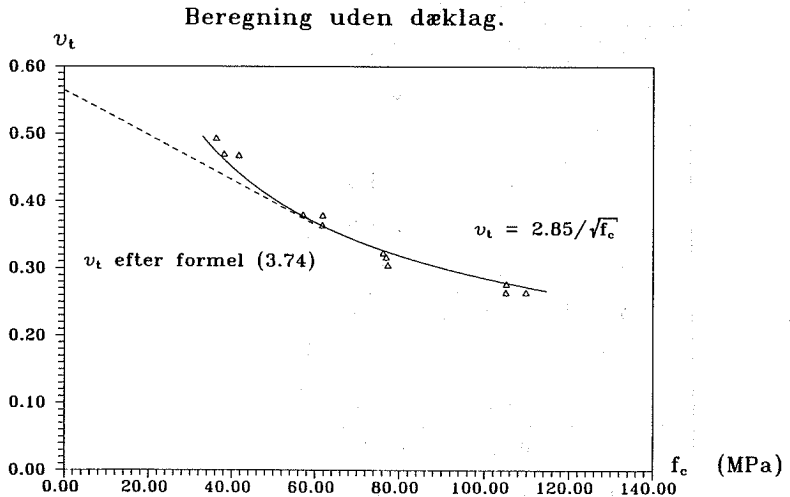
$\nu_t = \frac{k}{\sqrt{f_c}}$ er anvendt. Dette funktionsudtryk blev valgt, fordi en undersøgelse af

forskellige ν_t -funktioner på formen $\nu_t = k \cdot f_c^a$ viste, at spredningen var mindst for

$$a = -\frac{1}{2}.$$

Regressionskurvens funktionsudtryk er givet ved

$$\nu_t = \frac{2.85}{\sqrt{f_c}} \quad \text{for} \quad 36 \text{ MPa} \leq f_c \leq 110 \text{ MPa} \quad (6.9)$$



Figur 6.24 : Beregning uden dæklag. Sammenhæng mellem ν_E og f_c .

Det ses af figur 6.24 , at ν_t aftager for stigende betonstyrker, men kurven flader dog en del ud for betonstyrker større end ca. 90 MPa.

b) Beregning med dæklag

Her skal $b_e = b$ og $k = \frac{h}{b}$ i stedet indsættes i formel (6.8) , d.v.s. ν_E bestemmes i dette tilfælde af

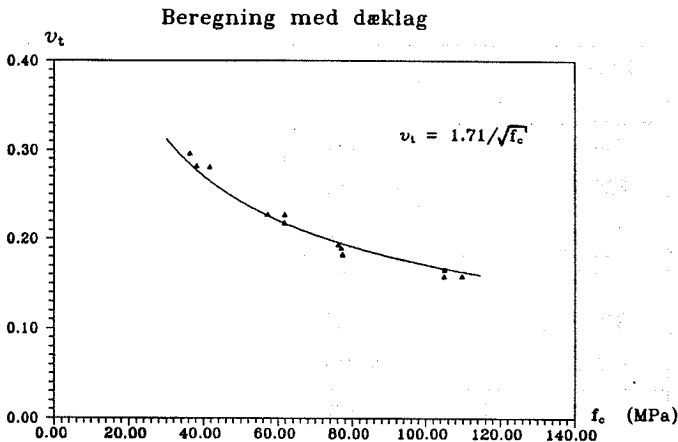
$$\nu_E = \frac{4T_E}{b^3 f_c (k - \frac{1}{3})} \quad (6.10)$$

Med de målte vridningsbæreevner får man de i tabel 6.11 sammenhørende værdier af ν_E og f_c .

Bjælke	f_c (MPa)	ν_E
B30.1	41.7	0.281
B30.2	38.2	0.282
B30.3	36.3	0.296
B50.1	61.8	0.228
B50.2	57.1	0.228
B50.3	61.7	0.219
B70.1	77.3	0.183
B70.2	76.9	0.190
B70.3	76.2	0.194
B110.1	109.8	0.159
B110.2	105.0	0.159
B110.3	105.1	0.166

Tabel 6.11 : Beregning med dæklag. Sammenhørende værdier af ν_E og f_c .

På figur 6.25 er sammenhængen mellem ν_E og f_c vist grafisk, og der er igen indtegnet en regressionskurve, idet mindste kvadraters metode er anvendt.



Figur 6.25 : Beregning med dæklag. Sammenhæng mellem ν_E og f_c .

Regressionskurvens funktionsudtryk er

$$\nu_t = \frac{1.71}{\sqrt{f_c}} \quad \text{for} \quad 36 \text{ MPa} \leq f_c \leq 110 \text{ MPa} \quad (6.11)$$

c) Simplificeret beregningsmetode med dæklag

Idet den optimale løsning benyttes, jnf. tabel 3.2 side 50 , bestemmes den forsøgs-
mæssige værdi af effektivitetsfaktoren ν_E , i armeringstilfældet (OAT) af

$$\nu_E = \frac{T_E}{b^3 f_c (1 - \beta_w)(k - \beta_w)\beta_w} \quad (6.12)$$

, hvor

$$\beta_w = \frac{(k - \sqrt{k^2 - k + 1} + 1)}{3} \quad (6.13)$$

og

$$k = \frac{h}{b} \quad (6.14)$$

Med de aktuelle bjælkeparametre fås $k = 1.719$, og dermed $\beta_w = 0.4079$. Indsættes de opnåede bæreevner i formel (6.12), kan følgende tabel, der viser sammenhængen mellem ν_E og f_c , udarbejdes.

Bjælke	f_c (MPa)	ν_E
B30.1	41.7	0.307
B30.2	38.2	0.309
B30.3	36.3	0.324
B50.1	61.8	0.249
B50.2	57.1	0.249
B50.3	61.7	0.239
B70.1	77.3	0.200
B70.2	76.9	0.208
B70.3	76.2	0.212
B110.1	109.8	0.174
B110.2	105.0	0.173
B110.3	105.1	0.182

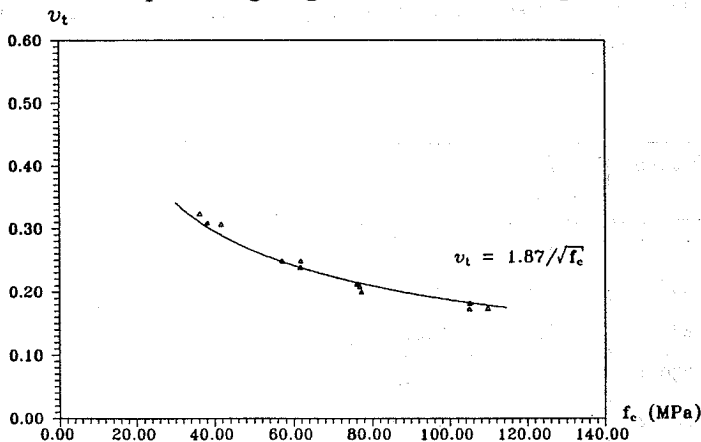
Tabel 6.12 : Simplificeret ber. med dæklag. Sammenhørende værdier af ν_E og f_c .

På figur 6.26 er de opnåede resultater indtegnet sammen med en regressionskurve, der er fremkommet ved anvendelse af mindste kvadraters metode.

Funktionsudtrykket for regressionskurven er

$$\nu_t = \frac{1.87}{\sqrt{f_c}} \quad \text{for} \quad 36 \text{ MPa} \leq f_c \leq 110 \text{ MPa} \quad (6.15)$$

Impl. beregningsmetode m. dæklag

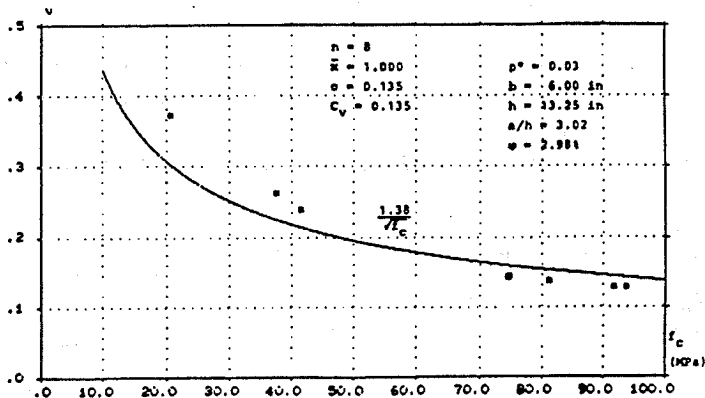


Figur 6.26 : Simplificeret beregning med dæklag. Sammenhæng mellem ν_E og f_c .

Ved at sammenholde teori og forsøg viser det sig således, at en ν_t -funktion på formen $\nu_t = \frac{k}{\sqrt{f_c}}$ beskriver de i denne forsøgsserie opnåede resultater på udemærket vis.

Det kan nævnes, at H. Exner [79.1] ved sammenligning af den virkelige og den ideal-plastiske arbejdskurve for beton under enakset tryk har fundet en lignende sammenhæng mellem effektivitetsfaktoren og betonens trykstyrke.

Endvidere har man ved forskydningsforsøg med ikke forskydningsarmerede højstyrkebetonbjælker eksperimentelt fundet en potensmæssig sammenhæng mellem ν og f_c , se figur 6.27. I disse forsøg, hvor der kun er længdearmering i bjælken, sker bruddet ved overskridelse af betonens trykstyrke i diagonalerne, d.v.s. et rent betonbrud.



Figur 6.27 : Forskydningsforsøg med bjælker uden bøjlearmering [90.5].

Da spændingsfordelingen ved vridning minder en del om forskydning, p.g.a. det skrå betontryk (diagonaltryk), forekommer det rimeligt, at der også for vridning er en potensmæssig sammenhæng mellem ν_t og f_c .

6.6.5 Teori vurderet ved de udførte forsøg

I dette afsnit skal der på baggrund af forsøgsresultaterne foretages en vurdering af teorierne beskrevet i afsnit 3. Dette gøres ved at sammenligne de numeriske værdier af de målte vridningsbæreevner med de teoretisk beregnede, idet der ved beregningen anvendes de forsøgsbestemte ν_t -funktioner, se afsnit 6.6.4. Beregningen af bjælkerne foretages v.h.a. programmerne "SIMPL", "TEORIM" og "TEORIU" i [91.1], hvor programkørslerne også er angivet. I tabel 6.13 er resultaterne af denne beregning vist.

Bjælke	Ber. u. dæklag		Ber. m. dæklag		Simpl. ber m. dæk.		Forsøg T_E (kNm)
	T_p (kNm)	Armt.	T_p (kNm)	Armt.	T_p (kNm)	Armt.	
B30.1	15.68	OAL	15.67	OAT	15.66	OAT	16.62
B30.2	15.01	OAT	14.99	OAT	14.99	OAT	15.29
B30.3	14.63	OAT	14.62	OAT	14.61	OAT	15.25
B50.1	18.85	OAL	19.07	OAT	19.06	OAT	19.95
B50.2	18.19	OAL	18.33	OAT	18.32	OAT	18.46
B50.3	18.84	OAL	19.06	OAT	19.05	OAT	19.13
B70.1	20.74	OAL	21.32	OAL	21.32	OAT	20.06
B70.2	20.69	OAL	21.26	OAL	21.27	OAT	20.74
B70.3	20.64	OAL	21.17	OAL	21.17	OAT	20.96
B110.1	23.90	OAL	25.11	OAL	25.32	OAL	24.72
B110.2	23.52	OAL	24.63	OAL	24.80	OAL	23.62
B110.3	23.49	OAL	24.62	OAL	24.80	OAL	24.77

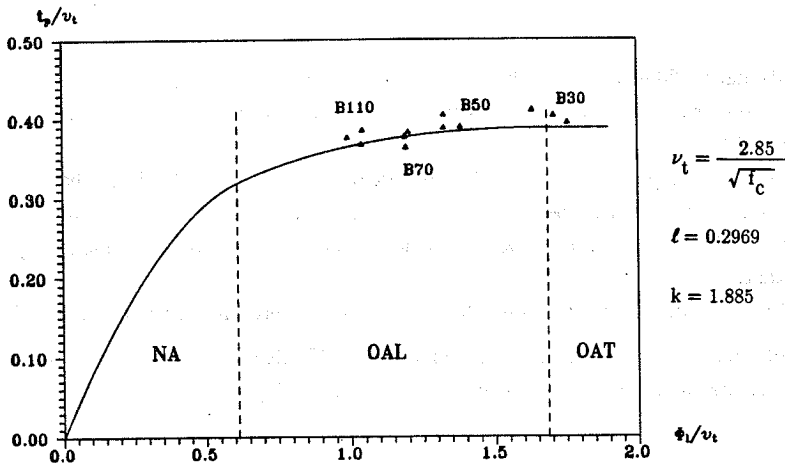
Tabel 6.13 : Beregnede bæreevner og armeringstilfælde for de udførte forsøg, idet de fundne ν_t -funktioner givet i afsnit 6.6.4 er anvendt.

På figur 6.28 – 6.33 er forskellen mellem teori og forsøg vist grafisk for de tre behandlede teorier, idet der hører to figurer til hver teori, og ν_t er bestemt i henhold til afsnit 6.6.4 .

Den første figur viser de målte bæreevners beliggenhed i forhold til den beregnede bæreevnekurve, idet der i beregningen er anvendt en middelværdi af l i forsøgsserien. Da l maksimalt varierer ca. 5 %, kan denne parameter med god tilnærmelse regnes konstant.

På den anden figur afbildes de absolutte vridningsbæreevner for hhv. teori og forsøg, idet der samtidig er indlagt en ret linie under 45° . Ligger bæreevnepunktet således under denne linie, er bæreevnen på den sikre side, d.v.s. $T_E > T_p$.

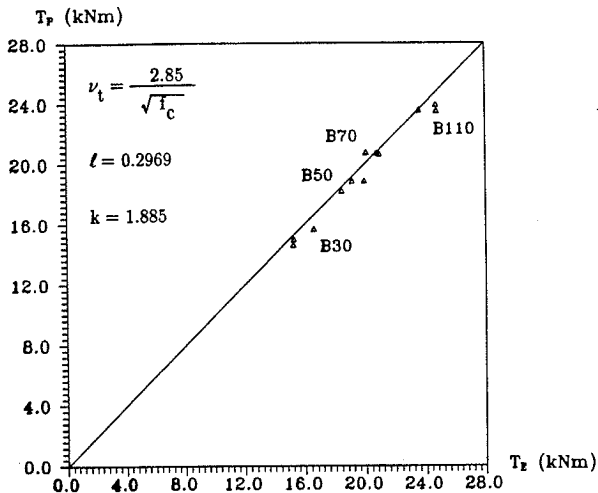
Beregning uden dæklag



Figur 6.28 : Teori vurderet ud fra de udførte forsøg.

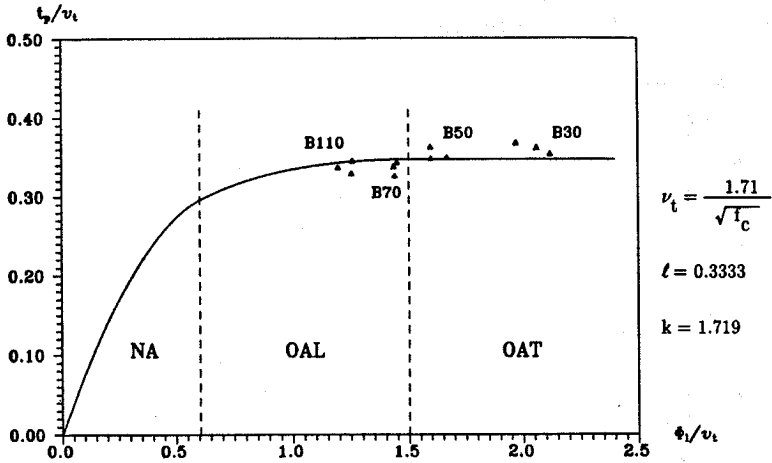
$$0.2884 \leq \ell \leq 0.3077$$

Beregning uden dæklag



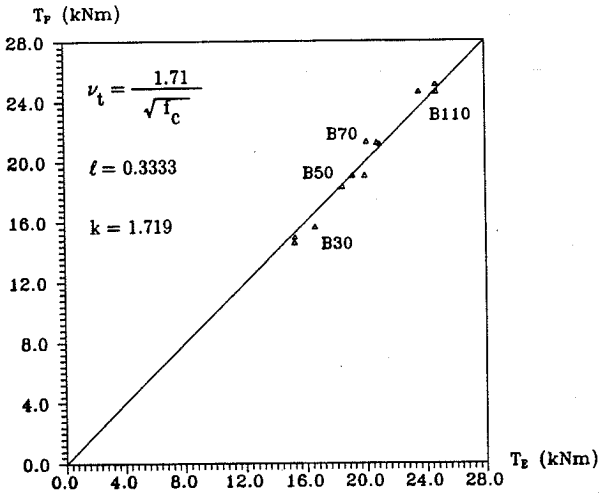
Figur 6.29 : Teori vurderet ud fra de udførte forsøg. Sammenligning på absolutte vridningsbæreevner.

Beregning med dæklag



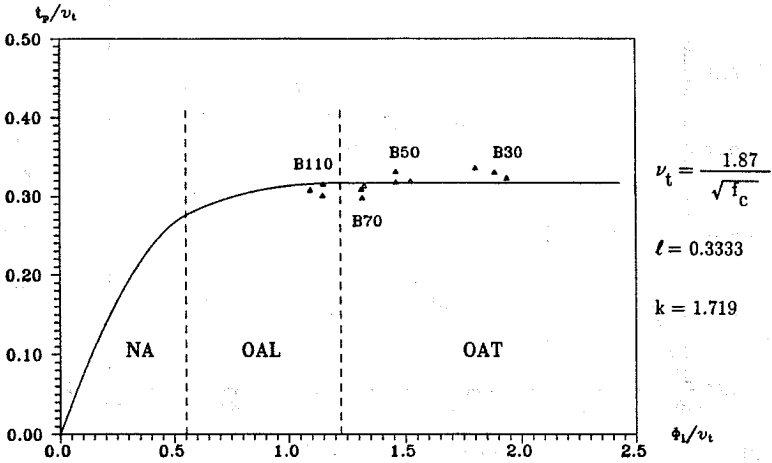
Figur 6.30 : Teori vurderet ud fra de udførte forsøg.
 $0.3260 \leq \ell \leq 0.3453$.

Beregning med dæklag



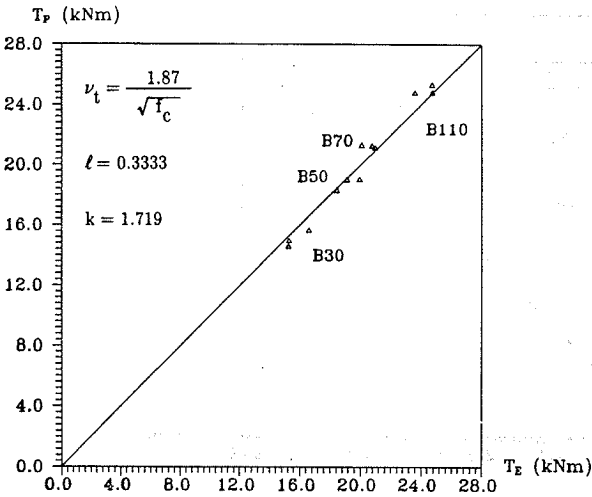
Figur 6.31 : Teori vurderet ud fra de udførte forsøg. Sammenligning på absolutte vridningsbæreevner.

Simpl. beregningsmetode m. dæklag



Figur 6.32 : Teori vurderet ud fra de udførte forsøg.
 $0.3260 \leq \ell \leq 0.3453$.

Simpl. beregningsmetode m. dæklag



Figur 6.33 : Teori vurderet ud fra de udførte forsøg. Sammenligning på absolutte vridningsbæreevner.

Det ses på figurene 6.28 – 6.33 , at der med de fundne ν_t -funktioner er opnået en god overensstemmelse mellem de beregnede vridningsbæreevner og de ved forsøgene målte bæreevner for alle tre behandlede teorier. Det bemærkes også, at den simplificerede beregningsmetode med dækklag giver armeringstilfælde, der passer godt med den målte armeringstilstand i de 12 bjælker, idet forsøgsbjælkerne er målt totalt overarmeret, mens armeringstilfældene ved beregning uden dækklag generelt ikke passer med forsøgene.

6.7 Sammenfatning over de udførte forsøg

I den her foreliggende undersøgelse af vridning i armerede højstyrkebetonbjælker er betontrykstyrken varieret mellem 36 MPa og 110 MPa. Med disse styrker er der opnået en god dækning af højstyrkebetonområdet, samtidig med, at forskellen mellem normal- og højstyrkebeton har været mulig at beskrive.

Ved støbning af højstyrkebeton er det vigtigt, at udstøbningen sker hurtigt, da bearbejdelighedstiden, på trods af et sætmål på omkring 150 mm , kun er ca. 20 min. for en bjælke med en betonstyrke på omkring 110 MPa. Det er endvidere vigtigt, at komprimeringen udføres omhyggeligt specielt for højstyrkebetonbjælker.

Armeringsspændingerne er målt ved brug af kalibrerede strain gauge, og målingerne viser det tilstræbte nemlig, at der ikke forekom flydning i armeringen. Dette betyder, at alle bjælker er målt totalt overarmeret ved forsøgene.

Den i projektet udviklede forsøgsopstilling har vist sig at fungere godt, således at bjælkerne har været påvirket til ren vridning.

Ved forsøgene er det observeret og målt, at alle bjælker revnede ved samme relative belastning af brudlasten, men at revnedannelsen var mere kraftig og sprød for de stærkeste betoner. Det har vist sig, at højstyrkebetonbjælker ikke får flere revner end normalstyrkebetonbjælker, men derimod stiger middelrevnevidden ved brud for stigen- de betonstyrker, således at højstyrkebetonbjælkernes totale længdetøjning bliver større ved brud. Rotationen ved brudlasten er nogenlunde ens for alle bjælker. Dette skyldes, at højstyrkebetonbjælkerne får en øget vridningsstivhed p.g.a. en stigning i elasticitetsmodulen, men den øgede stivhed modsvares af en større bæreevne for højstyrkebetonbjælkerne.

Den teoretisk antagne brudform i det overarmerede tilfælde, hvor betontrykkstyrken overskrides i de skrå trykdiagonaler er observeret ved forsøgene. Samtidig er der ved forsøgene konstateret spaltebrudlinier mellem de langsgående armeringsstænger, hvilket også er set ved andre udførte forsøg med overarmerede bjælker. Indflydelsen fra længdearmeringsstængerne tryk på betonen, som opstår p.g.a. trækraften i bøjlerne, kan således have stor betydning for tøjningstilstanden i tværsnittet. Forklaringen på uoverensstemmelsen mellem de beregnede og de målte armeringstilfælde ved vridning kan derfor være, at bæreevnen for overarmerede bjælker er bestemt af betonens spaltestyrke i snittet mellem længdearmeringsstængerne.

Det primære formål med forsøgsprogrammet har været at fastlægge effektivitetsfaktoren ν_t for højstyrkebeton, da denne faktor kun kan bestemmes v.h.a. forsøg. Den forsøgsmæssige værdi af ν_t er bestemt ved indsættelse af de opnåede bæreevner i teoriernes styrende ligninger for totalt overarmeret bjælker, hvorved teori og forsøg tilpasses.

Forsøgsserien viser, at ν_t er en aftagende funktion af betonens trykstyrke f_c , for trykstyrker helt op til 110 MPa. Sammenhængen mellem ν_t og f_c kan ud fra forsøgene bedst beskrives ved et funktionsudtryk på formen

$$\nu_t = \frac{K}{\sqrt{f_c}} \quad (6.16)$$

, hvor K er en konstant.

Generelt har forsøgsserien påpeget fordele ved anvendelsen af højstyrkebeton. Det er således set, at for et valgt tværsnit og for et givet vridningsmoment har højstyrkebetonbjælker følgende fordele fremfor normalstyrkebeton

- Mindre revnevidder, d.v.s. mindre risiko for korrosion af armeringen.
- Mindre rotation p.g.a. større vridningsstivhed.
- Mindre armeringsspændinger, d.v.s. man kan nøjes med mindre armeringsmængder

— Mindre længdeændringer, d.v.s. mindre bevægelser i f.eks. samlinger.

Ved benyttelse af højstyrkebetonbjælker opnås derudover, at bjælken revner ved en senere belastning, samtidig med, at der opnås en større bæreevne i forhold til normalstyrkebetonbjælker.

Der kræves naturligvis flere end de her forelagte 9 højstyrkebetonforsøg for at kunne konkludere noget endeligt vedrørende vridningsbæreevnen af højstyrkebetonbjælker samt til fastlæggelse af ν_t . Forsøgene har imidlertid vist en klar tendens til, at ν_t aftager for stigende betonstyrker, idet spredningen på vridningsbæreevnerne inden for de enkelte styrkeklasser er lille.

7 Vridningsbæreevnen vurderet ved forsøg

For at kunne få en tilstrækkelig god vurdering af de behandlede teorier skal der naturligvis inddrages resultater fra andre forsøgsserier. De fundne ν_t -funktioner, se afsnit 6.6.4, skal afprøves på andre forsøg, hvor ikke kun betonstyrken varierer, men også andre parametre såsom højde-breddeforholdet, de mekaniske armeringsgrader, flydespændingen af bøjle- og længdearmeringen og dæklagstykkelsen.

Til denne undersøgelse er der samlet resultater fra 11 forskellige forsøgsserier med vridningspåvirkede armerede betonbjælker med massivt, rektangulært tværsnit. I de undersøgte serier optræder samtlige mulige armeringstilfælde, og derudover varierer geometri og materialeparametre betydeligt, således at serierne under ét repræsenterer et bredt spektrum af forekommende bjælker. Ialt er der samlet 119 forsøg inklusive forsøgene i dette projekt.

En sammenligning mellem disse forsøgsdata og beregninger i.h.t. den danske norm for betonkonstruktioner, DS 411 og den fælleseuropæiske norm for betonkonstruktioner, EC2 vil blive foretaget i afsnit 7.3.

Som tidligere nævnt har det ikke været muligt at finde vridningsforsøg med armerede, rektangulære bjælker, hvor betonstyrken overstiger 50 MPa. Derfor er det alene forsøgsserien udført i dette projekt, der omfatter forsøg med højstyrkebetonbjælker.

7.1 Beskrivelse af tværsnitsudformninger

I det følgende gives der en kort beskrivelse af bjælkernes geometriske udformning samt materialemæssige forhold.

Bjælkernes data er tabelleret i [91.1] under hver forsøgsserie. I nogle af de undersøgte forsøgsserier forekom det, at enkelte bjælker brød ved revnelasten p.g.a. for stor bøjleafstand. Disse bjælker er helt udeladt i denne undersøgelse.

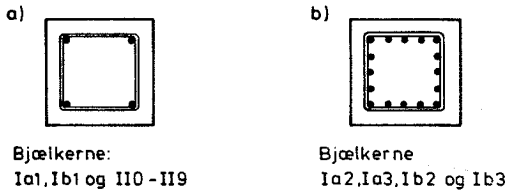
Som reference for betonstyrken er cylindertykstyrken for en 150 x 300 mm cylinder benyttet. Referencecylinderen er ikke benyttet i alle serier, og i en del af serierne er det ikke angivet, hvilke betontrykleger der er anvendt. I de tilfælde, hvor betontryklegerne er kendte, er omregningsfaktoren angivet.

7.1.1 Forsøg af J. S. Nielsen [83.2] , [83.3] og [84.3].

Antal undersøgte bjælker = 25 .

[83.2] og [83.3] :

Der er udført forsøg med 16 bjælker med kvadratiske tværsnit. Bjælketværsnittene fremgår af figur 7.1.

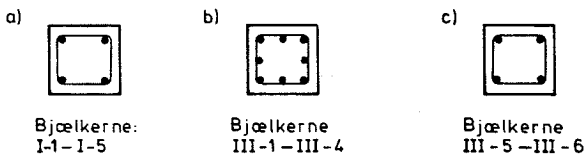


Figur 7.1 : Bjælkerens tværsnitsudformning.

For bjælkerne II0 – II9 er det specielt dæklaget, der varierer, og det bemærkes, at alle disse bjælker er målt som værende totalt overarmeret. Betonstyrken er bestemt på 150 x 300 mm cylindre.

[84.3] :

Der er udført forsøg med 9 kvadratiske bjælker. Længdearmeringens placering fremgår af figur 7.2.



Figur 7.2 : Bjælkerens tværsnitsudformning.

7.1.2 Forsøg af F. Leonhardt et al. [74.1] .

Antal undersøgte bjælker = 25 .

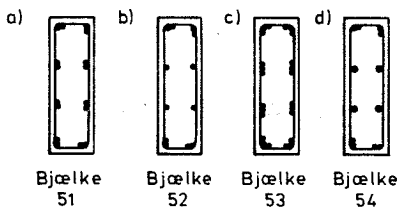
I alle bjælker er længdearmeringen jævnt fordelt langs randene, dog således at der altid er en langsgående stang i hvert hjørne.

Betontrykstyrken er bestemt ved forsøg med prismer (100 x 100 x 530). Betontrykstyrken er ikke omregnet, idet det skønnes, at den kun afviger minimalt fra cylindertrykstyrken.

7.1.3 Forsøg af R. A. Swann [70.1] .

Antal undersøgte bjælke = 12 .

For bjælkerne 11–18 gælder, at alle de langsgående armeringsstænger ligger symmetrisk om den vandrette tyngdepunktslinie med lige store arealer i hjørnerne. Den langsgående armerings placering for bjælkerne 51–54 fremgår af figur 7.3.



Figur 7.3 : Tværsnitsudformning for bjælkerne 51–54 .

I tabellen for bjælkeres data, se [91.1] , er der for bjælker, hvor diameteren af længdearmeringsstængerne varierer i tværsnittet, anvendt ækvivalente værdier for det totale antal længdearmeringsstænger, i og diameteren, d_ℓ . F.eks. er der for bjælke 13 anvendt parametrene $i = 4$ og $d_\ell = 17.1$, idet tværsnittet består af ialt 8 længdearmeringsstænger, fordelt med 2 stænger med hhv. $d_\ell = 15.9$ mm og $d_\ell = 6.3$ mm i hvert hjørne. Denne ækvivalente omregning er foretaget, således at man kan sammenligne forskellige bjælker forsøgsserierne imellem. Det bemærkes, at det samlede areal af længdearmeringen ikke ændres ved omregningen.

Betonstyrken er i denne serie bestemt med terninger (200 x 200 x 200). Som omregningsfaktor er benyttet 0.8.

7.1.4 Forsøg af G. S. Pandit [70.2] .

Antal undersøgte bjælker = 10 .

Længdearmeringen er placeret i bjælkens overside- og undersiden. Da ikke alle bjælker har samme mængde langsgående armering i over- og undersiden, er kun den om tyngdepunktet symmetrisk beliggende armering medregnet.

Forfatteren har ikke opgivet, hvilke betontryklegemer der er benyttet. Styrken anføres derfor uden omregning.

7.1.5 Forsøg af P. Lampert et al. [68.2] .

Antal undersøgte bjælker = 2 .

Bjælkerne har forholdsvis store tværsnitsdimensioner, 500 x 500 mm. Den langsgående armerings placering er som vist på figur 7.1.b .

Betontrykstyrken er bestemt på terninger (200 x 200 x 200), og som omregningsfaktor er anvendt 0.8.

7.1.6 Forsøg af A. E. McMullen et al. [78.1] .

Antal undersøgte bjælker = 10 .

Al længdearmring er placeret i hjørnerne. Da betontryklegemerne ikke kendes, anføres betonstyrkerne uden omregning.

7.1.7 Forsøg af N. Jackson et al. [71.1] .

Antal undersøgte bjælker = 12 .

Al længdearmring er placeret i hjørnerne. Kun den om tyngdepunktet symmetrisk beliggende længdearmring er medregnet.

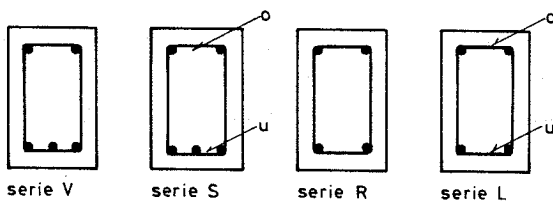
Som betontryklegemer er benyttet 152 x 305 cylindre, hvilket omtrent svarer til referencecylinderstyrken.

7.1.8 Forsøg af K. T. S. R. Iyengar et al. [68.3] og [74.2] .

Antal undersøgte bjælker = 11 .

[68.3] :

6 rektangulære bjælker er belastet til brud. Bjælkernes tværsnit ses i figur 7.4.

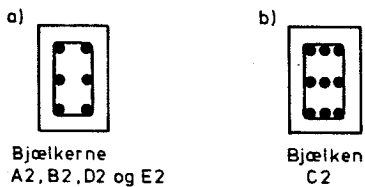


Figur 7.4 : Bjælkets tværsnit.

Kun den om tyngdepunktet symmetrisk beliggende længdearmring er medregnet. Som betontryklegemer er der anvendt terninger, men terningernes sidelængde er ikke oplyst. Der er benyttet en omregningsfaktor på 0.8 .

[74.2] :

5 bjælker er belastet til brud. Bjælkernes tværsnit er vist i figur 7.5.



Figur 7.5 : Bjælkernes tværsnitsudformning.

Til bestemmelse af betonens trykstyrke er der benyttet 152 x 305 mm cylindre, hvilket omtrent svarer til referencecylinderstyrken.

7.2 Teori vurderet ved andre forsøg

I det følgende vil teorierne gennemgået i afsnit 3.2 og 3.3 blive vurderet ved en sammenligning med opnåede vridningsbæreevner ved forsøg. Teorien i afsnit 3.2 er en optimal nedreværdiløsning, som vil blive vurderet ud fra en beregning, hvor dæklaget ikke medregnes i vridningsoptagelsen (afsnit 7.2.1).

Teorien i afsnit 3.3 er en simplificeret beregningsmetode på den sikre side, og denne teori vurderes ved en beregning, hvor dæklaget regnes effektivt ved vridningsoptagelsen (afsnit 7.2.2). Det bemærkes, at denne metode svarer til beregningsprincippet for vridning i DS 411 og EC 2, dog sættes der ingen begrænsninger på det tyndfligede tværsnits vægtykkelse i denne fremstilling.

I [91.1] er både de målte og de beregnede vridningsbæreevner angivet for alle forsøg i de undersøgte serier.

7.2.1 Beregning uden dæklag

En beregning efter teorien givet i afsnit 3.2 med to forskellige ν_t -funktioner foretages i det følgende:

- 1) ν_t -funktionen bestemt ved formel (3.74) side 60 benyttes:

$$\nu_t = \begin{cases} 0.50 + \frac{k}{20} + \frac{d_\ell}{200k} - \frac{f_c}{300} - \frac{f_y}{8000} & \text{for } k \leq 4 \\ 0.74 - \frac{f_c}{300} - \frac{f_y}{8000} & \text{for } k > 4 \end{cases} \quad (7.1)$$

Dette udtryk for effektivitetsfaktoren er hentet fra [90.1] og omfatter kun bjælker for hvilke $f_c \leq 60$ MPa, $d_\ell \leq 30$ mm og $f_y \leq 1000$ MPa. For f_y anvendes en middelværdi af f_{yw} og $f_{y\ell}$.

2) En tilsvarende beregning efter teorien i afsnit 3.2, idet den i projektet forsøgsbestemte ν_t -funktion ved formel (6.9) side 152 anvendes. Denne ν_t -funktion er givet ved

$$\nu_t = \frac{2.85}{\sqrt{t_c}} \quad (7.2)$$

På figur 7.6 og 7.7 er resultaterne af beregningerne uden dæklag vist grafisk. Hvert punkt (T_E, T_P) på figurene repræsenterer bæreevnepunktet for et enkelt forsøg. Det bemærkes, at ligger bæreevnepunktet over den indtegnede linie $T_E = T_P$, er bæreevnen på den usikre side. På figurene ses det, at forsøg og teori svarer ganske godt overens, hvis man ikke medregner dæklaget til det effektive tværsnit. For samtlige de indtegnede forsøgs punkter i figur 7.6 og 7.7 er middelværdien af forholdet $\frac{T_P}{T_E}$ samt spredningen beregnet. Resultatet af denne beregning er

1) ν_t efter formel (7.1), se figur 7.6 :

$$\text{Antal forsøg} = 111$$

$$\left(\frac{T_P}{T_E} \right) = 0.942$$

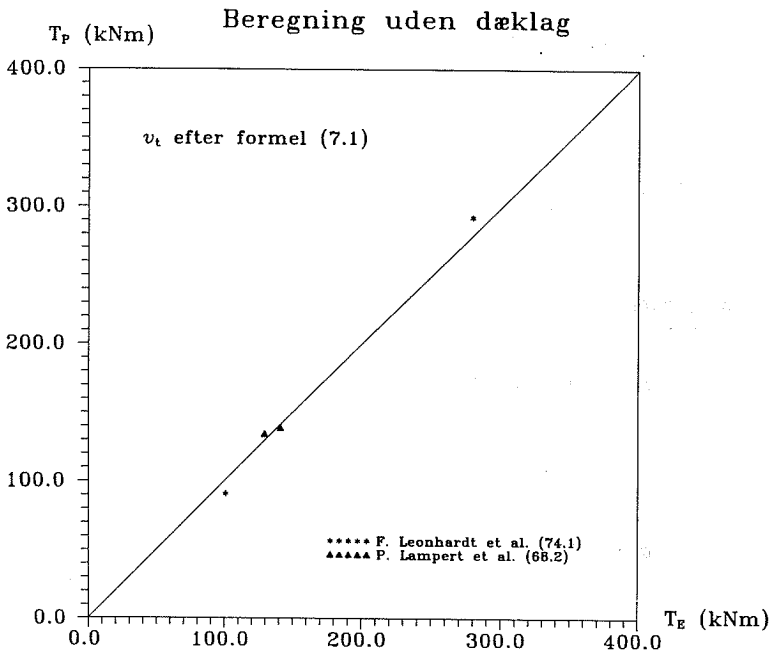
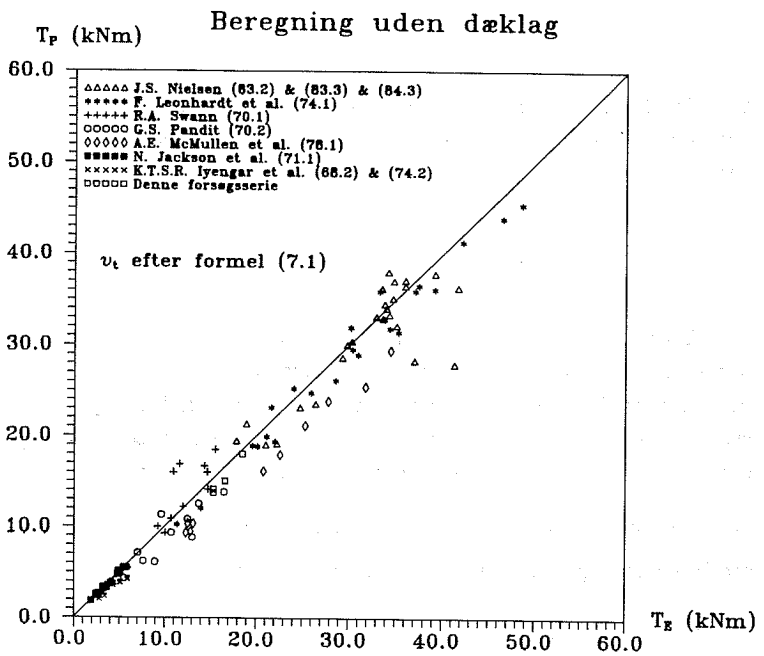
$$\sigma = 0.1339$$

2) ν_t efter formel (7.2), se figur 7.7 :

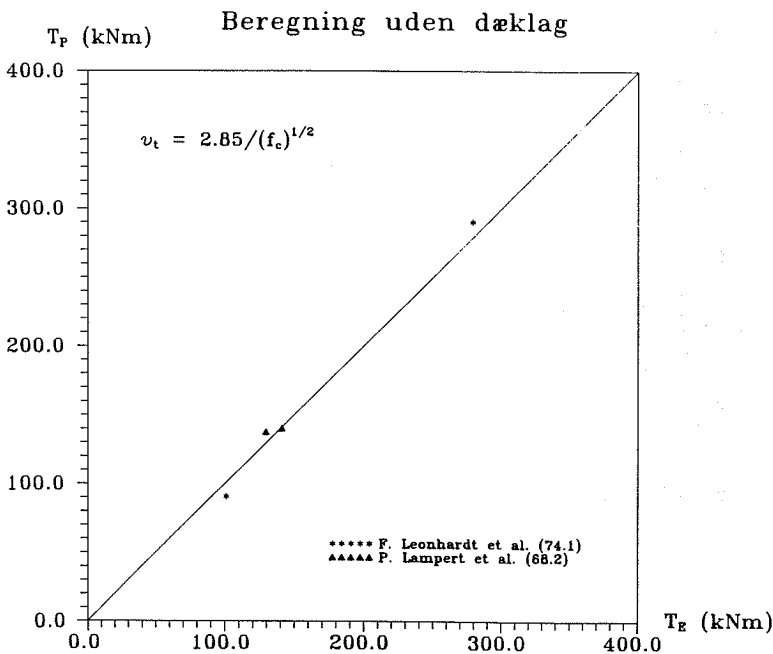
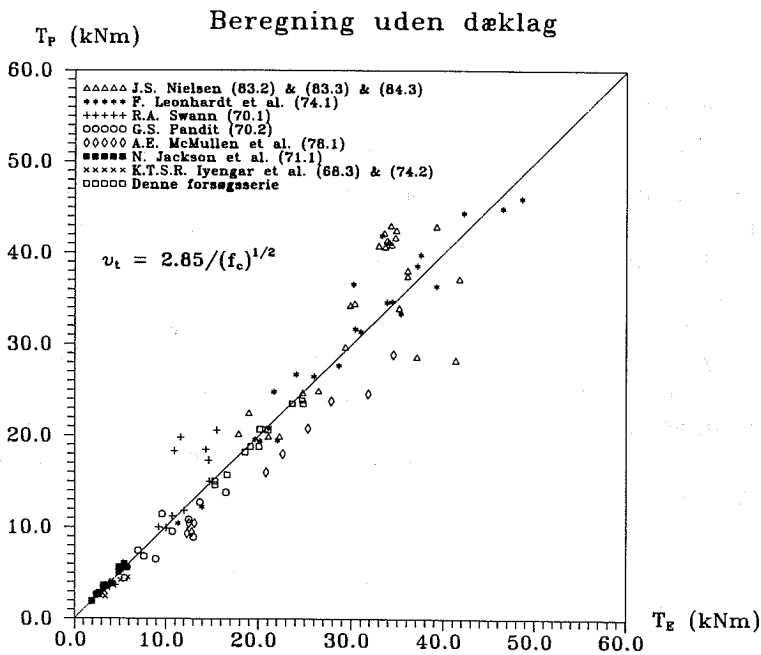
$$\text{Antal forsøg} = 119$$

$$\left(\frac{T_P}{T_E} \right) = 1.005$$

$$\sigma = 0.1660$$



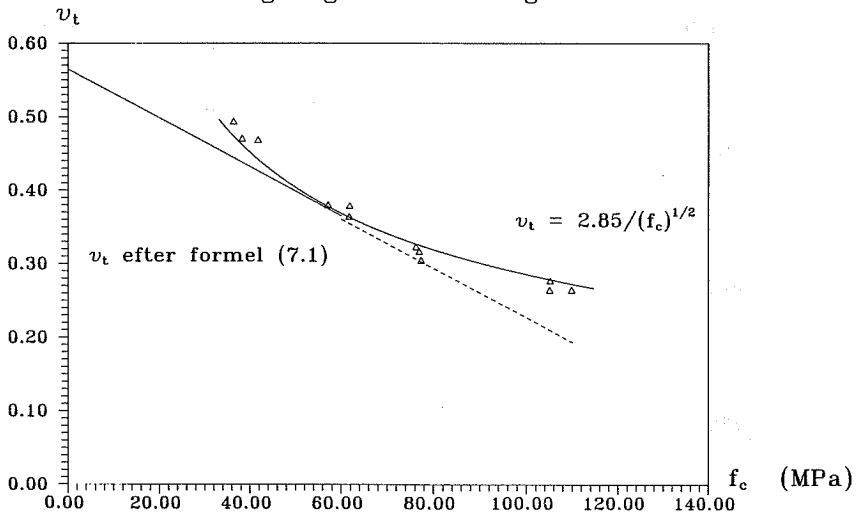
Figur 7.6 : Teori vurderet ved forsøg. Sammenligning på absolutte bæreevner.
 v_t efter (7.1).



Figur 7.7 : Teori vurderet ved forsøg. Sammenligning på absolutte bæreevner.
 v_t efter (7.2).

ν_t efter formel (7.1) giver således den mindste spredning i % af middelværdien, ca. 2 % mindre end for $\nu_t = 2.85/\sqrt{f_c}$, men det skal dog tilføjes at antallet af undersøgte forsøg for ν_t givet ved (7.1) er mindre end for $\nu_t = 2.85/\sqrt{f_c}$. Det mindre antal forsøg for ν_t givet ved (7.1) skyldes kravet til maksimal betontrykstyrke, $f_c \leq 60$ MPa. Det bemærkes, at spredningerne ligger på et helt acceptabelt niveau for forsøg med beton. Selv om den i projektet forsøgsbestemte ν_t -funktion kun afhænger af betonens trykstyrke, og endvidere er ret simpel, ses det på baggrund af resultaterne fra de andre forsøg, at man opnår en ganske god overensstemmelse mellem teori og forsøg for et bredt udpluk af forekommende bjælker, idet teorien beskrevet i afsnit 3.2 benyttes. Ekstrapoleres ν_t efter (7.1) helt op til $f_c = 110$ MPa, som det er gjort på figur 7.8, ses det, at dette udtryk for $f_c = 110$ MPa giver en ν_t -værdi, som er en del mindre end ν_E -værdierne for de udførte forsøg i styrkeklasse B110.

Beregning uden dæklag.



Figur 7.8 : ν_t -funktioner efter formel (7.1) og (7.2) .

7.2.2 Simplificeret beregningsmetode med dæklag

En beregning efter den simplificerede beregningsmetode angivet i afsnit 3.3 med den i projektet forsøgsbestemte ν_t -funktion ved formel (6.15) side 156 :

$$\nu_t = \frac{1.87}{\sqrt{I_c}} \quad (7.3)$$

På figur 7.9 er beregningen med ovenstående ν_t -værdi sammenholdt med forsøgsresultaterne. Af figuren fremgår det, at de beregnede bæreevner generelt er på den usikre side i forhold til forsøgene, idet middelværdi og spredning er hhv. :

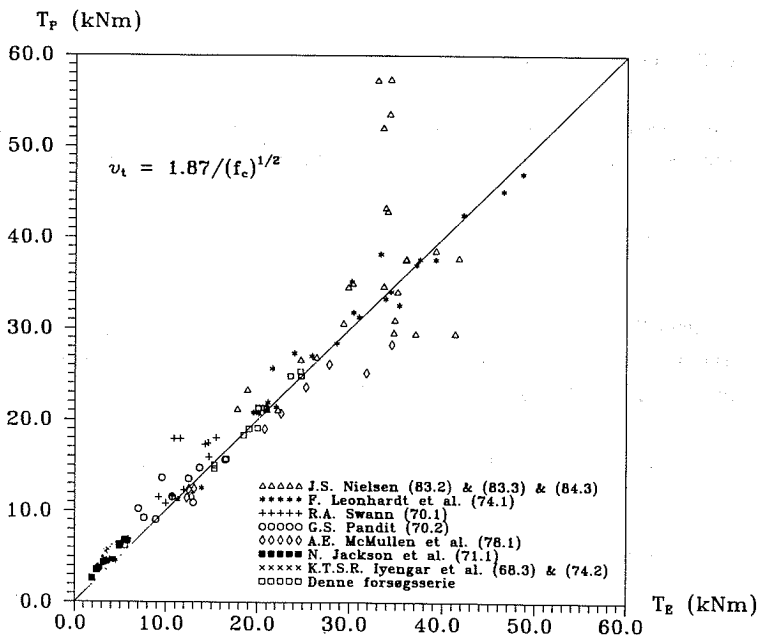
$$\text{Antal forsøg} = 119$$

$$\left(\frac{T_P}{T_E}\right) = 1.119$$

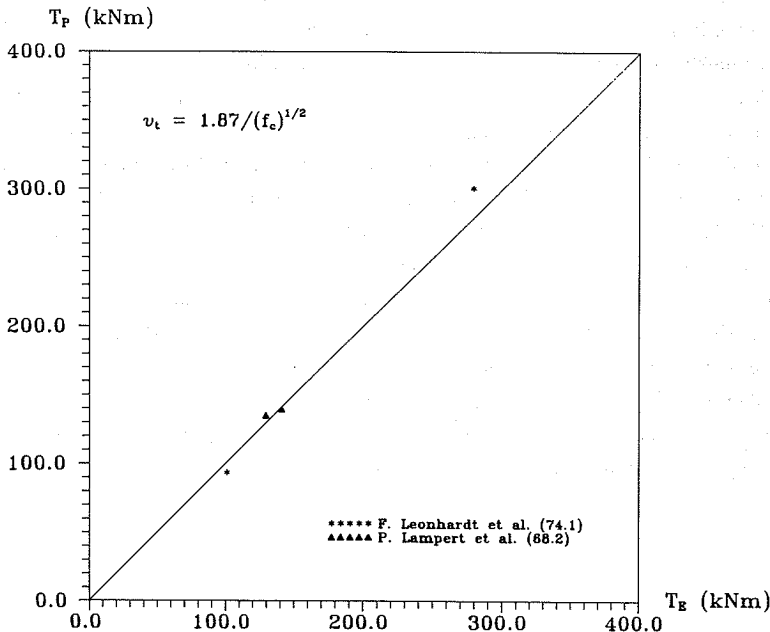
$$\sigma = 0.2095$$

Selv om de udvalgte serier ikke dækker alle vridningsforsøg, der er udført gennem tiderne, indikerer de 119 forsøg fra de 12 forskellige forsøgsserier klart, at beregningen, hvor dæklaget regnes effektivt, er på den usikre side, hvis man, som det er statistisk tilfældigt, optimerer bæreevnen ved benyttelse af den optimerede skivetykkelse. Det bemærkes, at spredningen er noget større end for beregningerne uden dæklag. Det ses endvidere på figur 7.9, at specielt for bjælkerne II-4 til II-9 fra forsøgsserien [83.3] er der en markant forskel mellem de beregnede vridningsbæreevner og de målte. Karakteristisk for disse bjælker er, at de alle er målt som værende totalt overarmerede ved forsøgene, og endvidere er dæklagstykkelsen forholdsvis stor (21-41 mm) sammenlignet med de øvrige forsøg i samtlige undersøgte forsøgsserier. Som nævnt i afsnit 6.6.2, kan forklaringen på, at vridningsbæreevnen ikke stiger med øget dæklagstykkelse skyldes, at bruddet i overarmerede bjælker i en vis grad er bestemt af spaltstyrken i snittet mellem længdearmeringsstængerne, og denne styrke er uafhængig af dæklagstykkelsen. På figur 7.10 er resultater fra forsøgsserierne [83.2] og [83.3] vist, idet bæreevneforholdet T_P/T_E er afbildet som funktion af dæklaget, c .

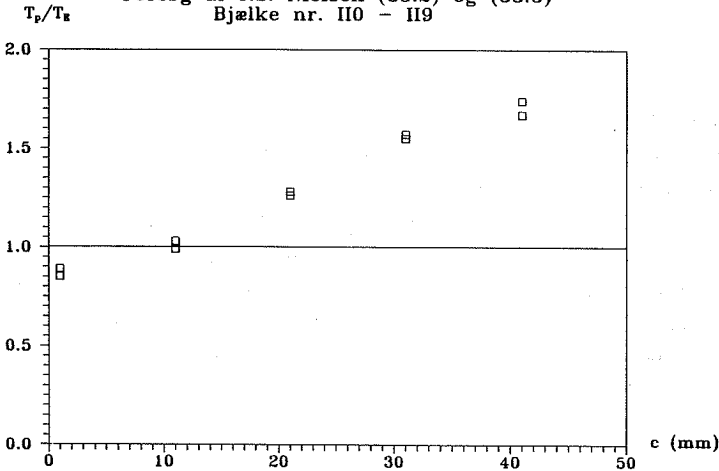
Simpl. beregningsmetode m. dæklag



Simpl. beregningsmetode m. dæklag



Figur 7.9 : Teori vurderet ved forsøg. Sammenligning på absolutte bæreevner.
 v_t efter (7.3).



Figur 7.10 : T_p/T_E som funktion af dæklaget, c.

Det ses, at de beregnede bæreevner for $c \leq 10$ mm ligger godt i forhold til de målte bæreevner. Derimod er den beregnede vridningsbæreevne en del større end den faktiske bæreevne for dæklagstykkelser omkring 40 mm .

Da således både forsøgsserien [83.3] og forsøgsserien i dette projekt har vist, at der dannes spaltebrudlinier mellem længdearmeringsstængerne for overarmerede bjælker, kan der gives en fysisk forklaring på resultaterne fra bjælkeforsøgene II-4 til II-9 i [83.3] , og man bør derfor ikke udelade disse 6 forsøg i den samlede vurdering.

Om vridningsbæreevnen også er uafhængig af dæklagstykkelsen for normaltarmerede bjælker, vides ikke, hvilket hovedsageligt skyldes, at for de få forsøg, der er udført med bjælker med store dæklag, er det ikke særlig godt beskrevet, om dæklaget skallede af under forsøget, og hvornår en evt. dæklagsafskalning fandt sted.

For at kunne give en bedre vurdering af dæklagets betydning for vridningsbæreevnen, kræves der flere forsøg, både med normaltarmerede- og overarmerede bjælker, hvor dæklaget varierer betydeligt, f.eks. fra 0 mm til 50 mm . I den forbindelse kan det bemærkes, at kravet til dæklagstykkelse i aggressiv miljøklasse i.h.t. DS 411 er 45 mm incl. tolerancetillæg.

Ønsker man at medregne dæklaget som en del af det effektive tværsnit, skal der for at opnå en bedre overensstemmelse med forsøg, indføres en ν_t -funktion, som tager højde for, at hele dæklaget ikke kan regnes aktivt ved bæreevneberegningen, specielt for store dæklag (over 20 mm). Den begrænsede mængde forsøg, der til dato er udført med henblik på at vurdere betydningen af dæklaget, udgør imidlertid et for spinkelt grundlag til fastlæggelse af en sådan ν_t -funktion for beregning med dæklag.

7.2.3 Samlet vurdering af teorierne ud fra andre forsøg

På baggrund af resultaterne fra afsnit 7.2.1 og 7.2.2 konkluderes det, at den bedste overensstemmelse mellem teori og forsøg fås ved at se bort fra dæklaget i vridningsberegningen. Indtil et bedre kendskab til dæklagsproblematikken er opnået v.h.a. forsøg, bør man derfor højst regne det effektive tværsnit fra bøjleyderside til bøjleyderside. Den i projektet forsøgsbestemte ν_t -funktion ved beregning uden dæklag givet ved (7.2) er simpel og dækker endvidere forsøg med bjælker, hvor betontrykstyrken er op til 110 MPa. Funktionsudtrykket (7.2) kan naturligvis ikke anvendes for lave betonstyrker, idet man da vil få uendelige store ν_t -værdier. Prøves der derfor med en ν_t -funktion på formen

$$\nu_t = 0.67 - \frac{f_c}{250} \quad , \quad f_c < 25 \text{ MPa} \quad (7.4)$$
$$\nu_t = \frac{2.85}{\sqrt{f_c}} \quad , \quad f_c \geq 25 \text{ MPa}$$

får man bæreevnediagrammerne vist på figur 7.11 . Middelværdi og spredning for

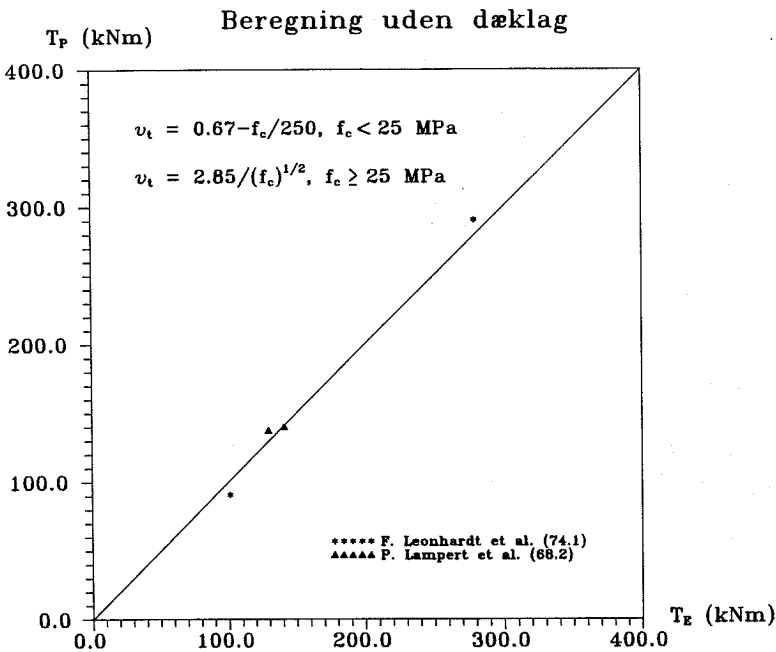
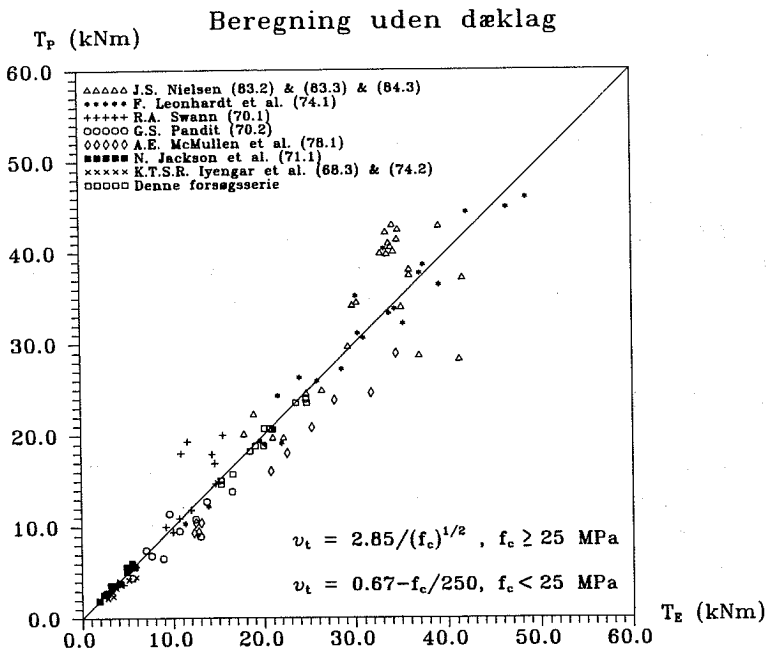
$$\left(\frac{T_P}{T_E} \right) \text{ er}$$

$$\text{Antal forsøg} = 119$$

$$\left(\frac{T_P}{T_E} \right) = 0.995$$

$$\sigma = 0.1618$$

Med ovenstående ν_t -funktion (7.4) er der opnået en god overensstemmelse mellem teori og forsøg. Funktionen benyttes ved en vridningsberegning, hvor der ses bort fra dæklaget.



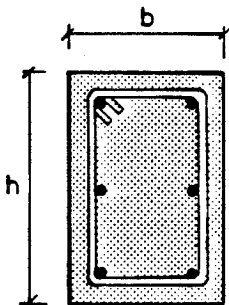
Figur 7.11 : Teori vurderet ved forsøg. Sammenligning på absolutte bæreevner.
 ν_t efter (7.4).

7.3 Normer vurderet ved andre forsøg

I det følgende foretages der en sammenligning mellem de opsamlede forsøg inkl. forsøgene præsenteret i denne rapport og hhv. den danske norm for betonkonstruktioner, DS 411 og den fælleseuropæiske norm for betonkonstruktioner, EC 2.

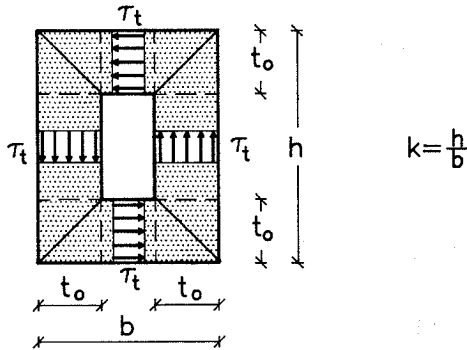
7.3.1 Beregningsprincip

Bæreevnen af en bjælke med rektangulært tværsnit og en armeringsudformning som vist på figur 7.12 bestemmes i princippet på samme måde i DS 411 og EC 2. Den eneste forskel består i de begrænsninger, der lægges på tykkelsen af det tyndfligede tværsnit.



Figur 7.12 : Bjælkens tværsnit.

Den karakteristiske bæreevne i.h.t. DS 411 og EC 2 bestemmes som den mindste bæreevne af hhv. betonen og armeringen.



Figur 7.13 : Effektivt tyndfliget tværsnit.

Med de på figur 7.13 anvendte betegnelser er den formelle forskydningspænding, τ_t bestemt ved

$$\tau_t = \frac{T_p}{2A_o t_o} \quad (7.5)$$

(7.5) benævnes Bredt's formel. A_o er arealet, der omslutes af det tyndfligede tværsnits midtlinie, $A_o = (h-t_o)(b-t_o) = b^2(k-\beta)(1-\beta)$.

Indføres den dimensionsløse bæreevne $t_p = \frac{T_p}{b^3 f_c}$ stilles der følgende fire krav :

1) Krav til betonen :

$$\sigma_c = \left(\kappa + \frac{1}{\kappa}\right) \tau_t \leq \nu_t f_c \quad \Leftrightarrow$$

$$\tau_t \leq \frac{\kappa}{1 + \kappa^2} \nu_t f_c \quad (7.6)$$

, hvor $\kappa = \cot \theta$

Indsættes τ_t givet ved (7.5) i (7.6) fås

$$\begin{aligned} \frac{T_p}{2A_o t_o} &\leq \frac{\kappa}{1 + \kappa^2} \nu_t f_c \Leftrightarrow \\ t_{pc} &= \frac{T_p}{b^3 f_c} = \frac{2A_o t_o}{b^3 f_c} \frac{\kappa}{1 + \kappa^2} \nu_t f_c \Leftrightarrow \\ t_p \leq t_{pc} &= 2 \frac{\kappa}{1 + \kappa^2} (1 - \beta)(k - \beta)\beta \nu_t \end{aligned} \quad (7.7)$$

2) Krav til længdearmeringen :

$$u_o t_o = 2(h + b - 2t_o)t_o = 2b^2(1 + k - 2\beta)\beta$$

$$\tau_t \leq \frac{1}{\kappa} \frac{A_\ell f_{y\ell}}{u_o t_o} \Leftrightarrow$$

$$t_{pl} = \frac{2A_o t_o}{b^3 f_c} \frac{1}{\kappa} \frac{A_\ell f_{y\ell}}{u_o t_o} \Leftrightarrow$$

$$t_p \leq t_{pl} = \frac{1}{\kappa} \frac{(1 - \beta)(k - \beta)k \nu_t \eta_\ell}{(1 + k - 2\beta)} \quad (7.8)$$

, hvor

$$\eta_\ell = \frac{A_\ell f_{y\ell}}{h b f_c \nu_t}$$

3) Krav til tværarmeringen :

$$\tau_t \leq \frac{A_w f_{yw}}{a_w t_o} \kappa \Leftrightarrow$$

$$t_p \leq t_{pw} = \kappa(1 - \beta)(k - \beta)\nu_t \eta_w \quad (7.9)$$

, hvor
$$\eta_w = \frac{2A_w f_{yw}}{a_w \nu_t f_c b}$$

4) Krav til vægtykkelsen :

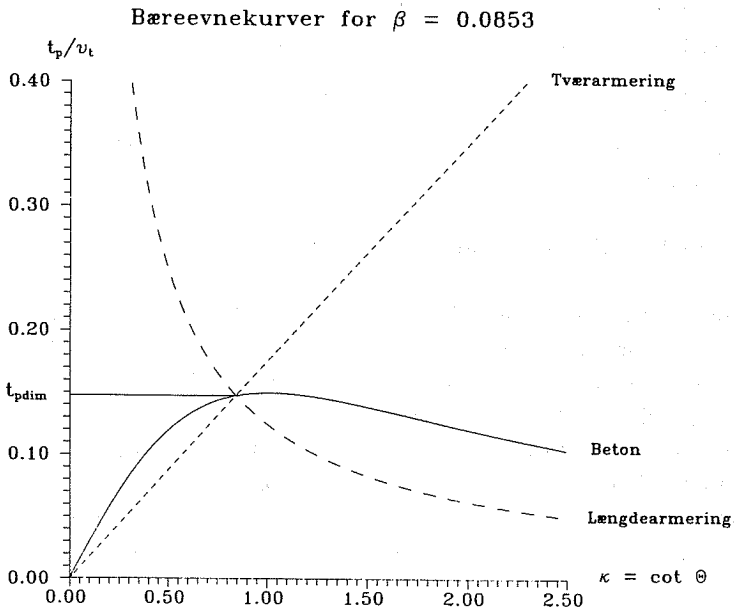
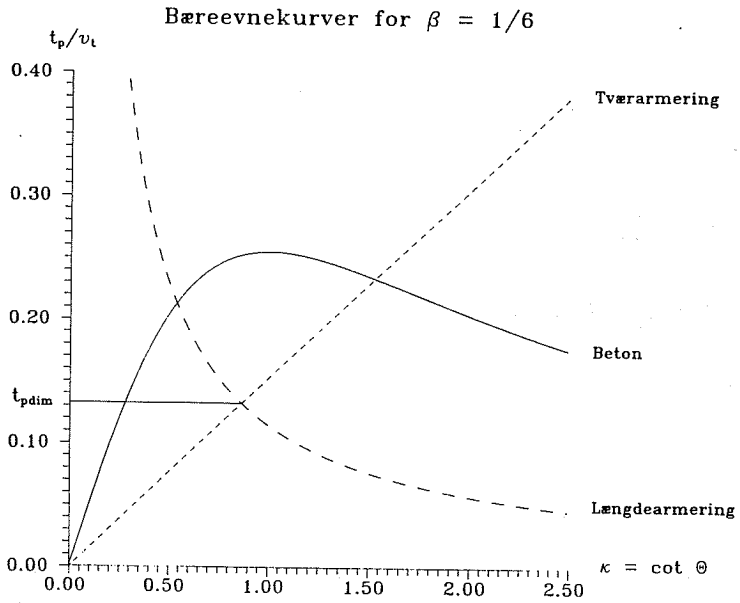
$$\text{DS 411 : } t_o \leq \frac{b}{6} \text{ , d.v.s. } \beta \leq \frac{1}{6}$$

$$\text{EC 2 : } 2c' \leq t_o \leq \frac{A}{u} \text{ , d.v.s. } \frac{2c'}{b} \leq \beta \leq \frac{1}{2(\frac{1}{k} + 1)}$$

Som det ses af (7.7), (7.8) og (7.9) udgør den dimensionsløse vægtykkelse, β , samt betontrykkets vinkel med længdeaksen, θ , de frie parametre, idet armeringen, materialestyrker samt ydre dimensioner, herunder dæklagstykkelsen forudsættes kendte. Den kombination af (β, θ) som giver den maksimale bæreevne bestemmes ved brug af tabel 3.2 side 50. Enhver anden kombination af (β, θ) vil give en mindre bæreevne (konserverativ vridningsbæreevne). Ligger β uden for intervallet $0 \leq \beta \leq \frac{1}{6}$ (DS 411) eller $\frac{2c'}{b} \leq \beta \leq \frac{1}{2(\frac{1}{k} + 1)}$ (EC 2), sættes β lig den nærmeste grænse. Den maksimale bæreevne med denne grænseværdi for β findes derefter af (7.7), (7.8) og (7.9), idet $\cot \theta$ varieres inden for de tilladelige grænser :

$$0.5 \leq \cot \theta \leq 2 \quad (\text{DS 411}) \quad \text{og} \quad 0.4 \leq \cot \theta \leq 2.5 \quad (\text{EC 2})$$

Eksempler på bæreevnekurver fremkommet ved formlerne (7.7), (7.8) og (7.9) for en given dimensionsløs tykkelse, et givet højde/bredde - forhold samt givne effektive mekaniske armeringsgrader er vist på figur 7.14. Parametrene, $\eta_t = \eta_w = 0.1$ og $k = 2$, er valgt, således at bæreevnekurverne svarer til en normalt armeret bjælke. Figur 7.14 (øverst) svarer til det tilfælde, hvor betonens bæreevne ikke udnyttes, mens figur 7.14 (nederst) illustrerer det tilfælde, hvor betonen udnyttes fuldt ud, d.v.s. den maksimale bæreevne er fundet. Ved valg af den optimale β -værdi opnår man i dette tilfælde en bæreevneforøgelse på ca. 11 % sammenlignet med beregningen, hvor $\beta = 1/6$.



Figur 7.14 : Eksempler på bæreevnekurver for beton og armering.
 Givne parametre : $\eta_\ell = \eta_w = 0.1$ og $k = 2$.

7.3.2 Beregning i.h.t. DS 411

I dette afsnit foretages der en sammenligning mellem vridningsbæreevnen beregnet efter den danske norm for betonkonstruktioner, DS 411 og forsøgsresultaterne fra de undersøgte forsøg. Med de kendte tværsnitsdata og materialeparametre kan den beregnede bæreevne findes af udtrykkene givet i forrige afsnit 7.3.1 . Som øvre grænse for den dimensionsløse vægtykkelse benyttes som tidligere nævnt $\beta_{\max} = 1/6$ (jvf. afsnit 4.1). Den anvendte ν_t -funktion i DS 411 er givet ved

$$\nu_t = 0.7 \left(0.7 - \frac{f_c}{200} \right) \quad , \quad f_c \leq 50 \text{ MPa} \quad (7.10)$$

På figur 7.15 er den beregnede vridningsbæreevne i.h.t. DS 411 sammenholdt med de eksperimentelle bæreevner. Af figuren ses det, at der er en tilsyneladende god overensstemmelse mellem beregningen i.h.t. DS 411 og forsøg, idet middelværdi og spredning er hhv. :

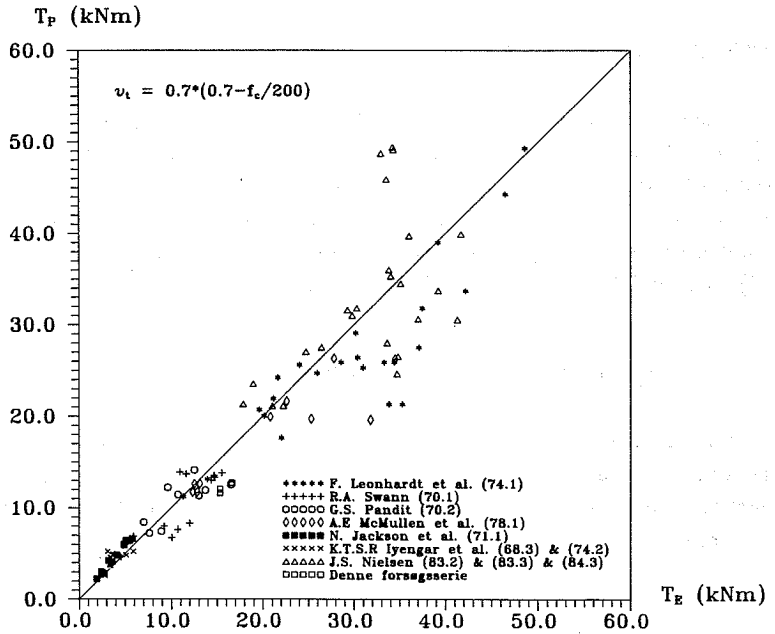
$$\text{Antal forsøg} = 110$$

$$\left(\frac{T_P}{T_E} \right) = 1.006$$

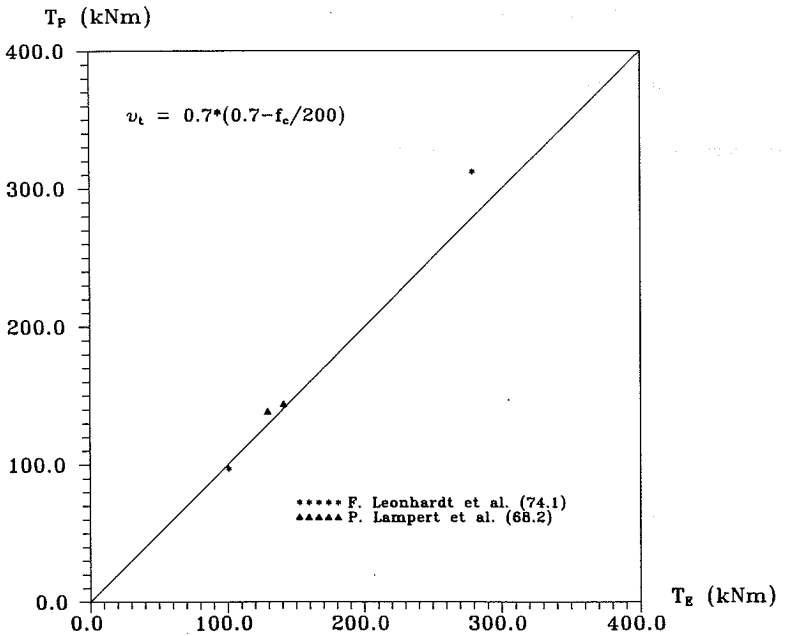
$$\sigma = 0.2006$$

Det bemærkes dog, at spredningen er relativ stor.

Beregning i.h.t. DS 411



Beregning i.h.t. DS 411



Figur 7.15 : DS 411 vurderet ved forsøg. Sammenligning på absolutte bæreevner.

ν_t efter (7.10).

Det skal erindres, at de undersøgte forsøgsserier kun indeholder ganske få forsøg med bjælker, hvor dæklagstykkelsen er større end 20 mm . Selv med begrænsningen i DS 411 (1/6 – reglen), er bæreevnen for disse få forsøg med relativt stort dæklag klart på den usikre side. Den udførte sammenligning udsiger, at dimensioneringsgrundlaget i DS 411 fører til vridningsbæreevner, der er i rimelig god overensstemmelse med resultater fra forsøg, hvis vel at mærke, dæklagstykkelsen ikke er for stor (≤ 20 mm). For større dæklag, kan vridningsberegningen i.h.t. DS 411 være endog meget på den usikre side.

For bjælker med store armeringsgrader vil en dimensionering i.h.t. DS 411 give bedre overensstemmelse med forsøgsresultater sammenlignet med bjælker med små armeringsgrader. Dette skyldes, at for kraftigt armerede bjælker vil den dimensionsløse vægtykkelse, β , således være en del større end 1/6, og derfor vil en beregning, hvor den øvre grænse $\beta = 1/6$ anvendes "rette op" på usikkerheden, som indføres ved at regne dæklaget effektivt.

7.3.3 Beregning i.h.t. EC 2

I det følgende vurderes vridningsbæreevnen i.h.t. den fælleseuropæiske norm for betonkonstruktioner, EC 2, ud fra de indsamlede forsøgsdata. I EC 2 er der både en øvre og nedre grænse for den dimensionsløse vægtykkelse, idet der kræves, at

$$\frac{2c'}{b} \leq \beta \leq \frac{1}{2\left(-\frac{1}{k} + 1\right)} \quad (7.11)$$

Som det er diskuteret tidligere (se afsnit 4.2), medfører dobbeltuligheden (7.11), at der i et vist omfang tages hensyn til dæklagsproblematikken. I det tilfælde, hvor den nedre grænse i (7.11) overstiger den øvre grænse, tillades det således ikke at anvende det pågældende bjælketværsnit. Som ν_t -funktion benyttes i EC 2

$$\nu_t = 0.7\left(0.7 - \frac{f_c}{200}\right) \geq 0.35 \quad , \quad f_c \leq 50 \text{ MPa.} \quad (7.12)$$

På figur 7.16 er den beregnede bæreevne i.h.t. EC 2 (jvf. afsnit 7.3.1) sammenholdt med de eksperimentelle bæreevner. Resultatet af sammenligningen er i tal givet ved følgende middelværdi og spredning :

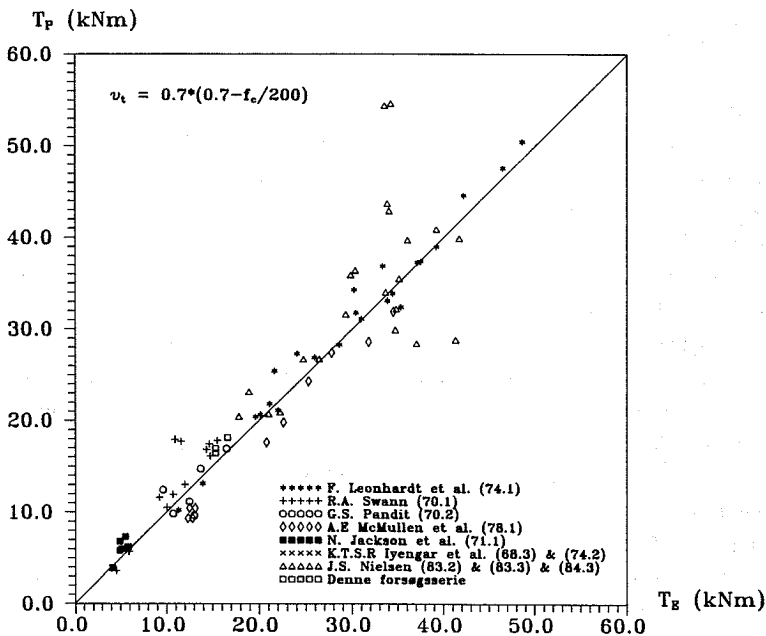
$$\text{Antal forsøg} = 87$$

$$\left(\frac{T_P}{T_E}\right) = 1.055$$

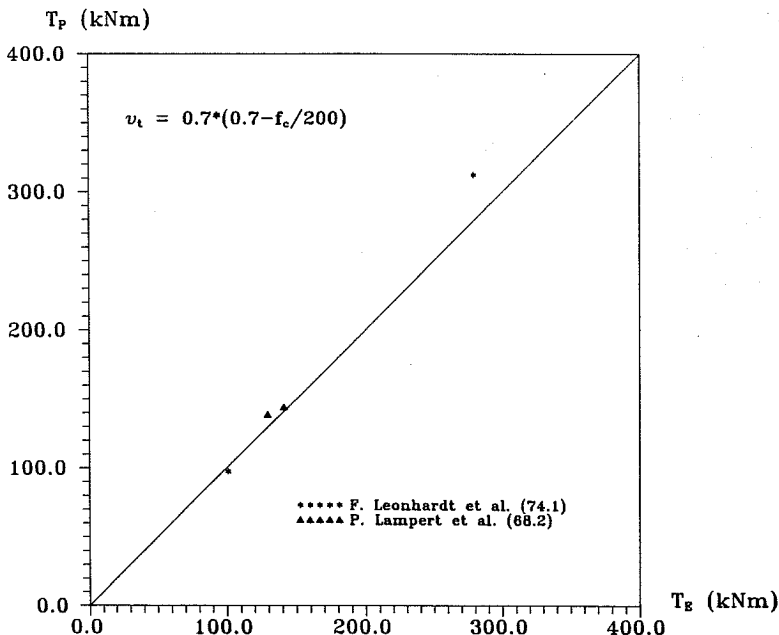
$$\sigma = 0.1816$$

Det kan heraf ses, at vridningsberegningen i.h.t. EC 2 er en smule på den usikre side på trods af, at 23 ud af de 110 undersøgte bjælketværsnit er taget ud af analysen, da de ikke opfylder kravet (7.11) og således ikke er tilladte. Kravet (7.11) i EC 2 sikrer, at bjælker, hvor arealet af dæklaget udgør mere end 45–50 % af det totale tværsnitsareal ikke anvendes, men kravet ses dog ikke at være tilstrækkeligt til at bringe bæreevneberegningen på den sikre side i forhold til forsøg.

Beregning i.h.t. EC2



Beregning i.h.t. EC2



Figur 7.16 : EC 2 vurderet ved forsøg. Sammenligning på absolutte bæreevner.

v_t efter (7.12).

8 Konklusion

Der er i dette projekt udført vridningsforsøg med overarmerede højstyrkebetonbjælker. Det primære formål med projektet var at bestemme sammenhængen mellem effektivitetsfaktoren ved vridning og betonens enaksede trykstyrke, idet plasticitetsteorien for armeret beton er anvendt.

Forsøgene har vist, at effektivitetsfaktoren ved vridning er en aftagende funktion af betonstyrken for styrker helt op til 110 MPa. Ud fra de udførte forsøg kan sammenhængen bedst beskrives ved en potensfunktion.

Der er angivet forskellige forslag til værdien af effektivitetsfaktoren, som afhænger af, om der regnes med eller uden dæklag. Analysen har vist, at den bedste overensstemmelse mellem teori og forsøg fås, hvis der ses bort fra dæklaget i vridningsberegningen. På baggrund af forsøgene er effektivitetsfaktoren fundet for beregning uden dæklag, som ved sammenligning med 11 andre forsøgsserier har vist sig at give en god overensstemmelse mellem teori og forsøg.

Resultaterne fra de 11 indsamlede forsøgsserier samt forsøgresultaterne fra dette projekt er ligeledes sammenholdt med vridningsberegninger i.h.t. den danske norm for betonkonstruktioner, DS 411 og den fælleseuropæiske norm for betonkonstruktioner, EC 2. De ialt 119 undersøgte armerede betonbjælker repræsenterer et bredt udpluk af forekommende bjælker, idet der optræder samtlige mulige armeringstilfælde, og derudover varierer geometri og materialeparametre betydeligt.

Undersøgelsen har vist, at med de forskellige begrænsninger, der sættes på tykkelsen af det tyndfligede tværsnit, i hhv. DS 411 og EC 2 opnås der en rimelig god overensstemmelse mellem den beregnede bæreevne og bæreevnen bestemt ved forsøg. Dog skal det tilføjes, at vridningsberegninger i.h.t. både DS 411 og EC 2 kan være endog meget på den usikre side for bjælker med store dæklag, d.v.s. for dæklagstykkelser større end ca. 25 mm. Dette betyder, at for de i praksis forekommende betonbjælker, hvor dæklagstykkelsen hovedsageligt er større end 25 mm, bør man være varsom ved anvendelsen af beregningsmetoderne i hhv. DS 411 og EC 2.

De i projektet udførte forsøg har vist, at man med fordel kan anvende højstyrkebeton. Udover en større bæreevne vil brugen af højstyrkebetonbjælker for et givet tværsnit og et givet vridningsmoment medføre større vridningsstivhed, mindre revnevidder og mindre armeringspændinger i brugstilstanden sammenlignet med normalstyrkebetonbjælker.

For at kunne opnå disse forbedrede egenskaber ved brug af højstyrkebeton, skal støbning og komprimering udføres hurtigt, men omhyggeligt.

Det har ikke været muligt at finde andre vridningsforsøg med armerede højstyrkebetonbjælker, d.v.s. bjælker med betonstyrker større end 50 MPa, og konklusionen vedrørende vridning af højstyrkebetonbjælker bygger alene på denne forsøgsserie.

Forsøgsserien har tillige påpeget områder, som bør undersøges bedre fremover, f.eks. brudformen for hhv. normaltarmerede- og overarmerede bjælker, uoverensstemmelsen mellem beregnet og målt armeringstilstand samt dæklagsproblematikken.

9 Dimensioneringsvejledning

Ved brug af den følgende dimensioneringsanvisning kan minimalarmeringen for en vridningspåvirket bjælke bestemmes. Interessen knytter sig specielt til de normalt-armerede bjælker.

Ved beregningen af massive eller tyndvæggede rektangulære bjælker påvirket til ren vridning, regnes med et effektivt tværsnit i form af et lukket, tyndfliget tværsnit. For tyndvæggede tværsnit begrænses skivetykkelsen af uligheden

$$t_0 \leq t_v - c \quad (9.1)$$

, hvor

t_0 er skivetykkelsen

t_v er den virkelige vægtykkelse

c er dæklagstykkelsen.

Armeringen udføres med længdearmeringen symmetrisk fordelt omkring tværsnitets tyngdepunkt samt lodrette, lukkede bøjler placeret så langt ud mod bjælkens rand, som muligt, idet krav om dæklag skal være opfyldt.

Den optimale skivetykkelse, d.v.s. den skivetykkelse, der giver den maksimale bæreevne bestemmes af ligningen

$$\frac{T}{2t_0 \left(\frac{4}{3} t_0^2 - (h_e + b_e) t_0 + h_e b_e \right)} \left(\sqrt{\lambda} + \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \right) = \nu_t f_c \quad (9.2)$$

, hvor

$$h_e = h - 2c \quad (\text{konstant dæklagstykkelse forudsættes})$$

$$b_e = b - 2c \quad (\text{konstant dæklagstykkelse forudsættes})$$

T er det vridende moment

og

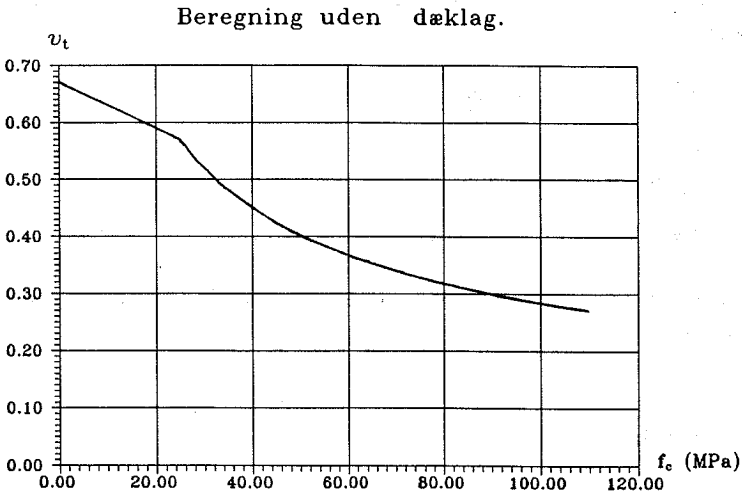
$$\lambda = \frac{f_y \ell}{f_{yw}}$$

(9.2) løses lettest ved en iterativ beregning. Det bemærkes, at formel (9.2) bestemmer tykkelsen af det effektive tværsnit, svarende til, at $\sigma_c = \nu_t f_c$.

Effektivitetsfaktoren ν_t kan bestemmes af følgende udtryk

$$\nu_t = \begin{cases} 0.67 - \frac{f_c}{250} & , f_c < 25 \text{ MPa} \\ \frac{2.85}{\sqrt{f_c}} & , 25 \text{ MPa} \leq f_c \leq 110 \text{ MPa} \end{cases} \quad (9.3)$$

, hvor f_c er betonens karakteristiske trykstyrke i MPa. Kurven svarende til formel (9.3) er indtegnet på figur 9.1 .



Figur 9.1 : Sammenhængen mellem ν_t og f_c efter formel (9.3) for $f_c \leq 110$ MPa.

Med skivetykkelsen t_0 fastlagt ved (9.2) kan armeringsmængden herefter bestemmes af

$$A_{wl} = \frac{1}{f_{yw} \sqrt{\lambda}} \frac{T}{2 \left[\frac{4}{3} t_0^2 - (h_e + b_e) t_0 + h_e b_e \right]} \quad (9.4)$$

$$A_\ell = \frac{\sqrt{\lambda}}{f_{yl}} \frac{T (h_e + b_e - 2t_0)}{\left[\frac{4}{3} t_0^2 - (h_e + b_e) t_0 + h_e b_e \right]} \quad (9.5)$$

, hvor

A_{wl} er bøjlearmeringsarealet pr. længdeenhed

og

A_ℓ er længdearmeringens samlede areal.

Benævnes arealet af en bøjle A_w , er $A_{wl} = \frac{A_w}{a_w}$, hvor a_w er bøjleafstanden.

Ved armeringsudformningen bør følgende konstruktive hensyn endvidere tages i betragtning

– Bøjleafstanden a_w skal opfylde uligheden

$$a_w \leq \gamma b_e \cot \theta$$

hvor θ er betontrykkets hældning. Sikkerhedsfaktoren γ sættes til 0.7 i DS 411.

– Der skal altid placeres længdearmering i tværsnittets hjørner til forankring af bøjlerne

– For at undgå uacceptable revner i brugstilstanden, vælges betontrykkets hældning i intervallet

$$\frac{1}{2} \leq \cot \theta \leq 2$$

10 Referenceliste

- [31.1] **E. Suenson.**
"Jærnbeton."
4. udgave, København 1931.
- [57.1] **G. S Ernst.**
"Ultimate Torsional Properties af Reinforced Concrete Beams."
Journal of the American Concrete Institute, Proceeding
Vol. 54, Oct. 1957, pp. 341 – 356.
- [57.2] **W. M. Murray & P.K. Stein.**
"Strain Gage Techniques."
University of California.
August 19–23, 1957, Part 2.
- [68.1] **Thomas T. C. Hsu.**
"Torsion of Structural Concrete—Behavior of Reinforced
Concrete Rectangular Members."
American Concrete Institute, Torsion of Structural Concrete,
Publication SP18, 1968, pp. 261–306.
- [68.2] **P. Lampert & B. Thürlimann.**
"Torsionsversuche an Stahlbetonbalken."
Institut für Baustatik, Eidgenössische Technische Hochschule.
Zürich, Bericht Nr. 6506–2, June 1968.
- [68.3] **K. T. S. R. Iyengar & B. V. Rangan.**
"Strength and Stiffness of Reinforced Concrete Beams Under Combined
Bending and Torsion."
American Concrete Institute, Torsion of Structural Concrete,
Publication SP18, 1968, pp. 403–440.

- [70.1] **R. A. Swann.**
 "Experimental Basis for a Design Method for Rectangular Reinforced Concrete Beams in Torsion."
 Cement and Concrete Association, Technical Report 42.452,
 London 1970.
- [70.2] **G. S. Pandit.**
 "Ultimate Torque of Rectangular Reinforced concrete Beams."
 Journal of the Structural Division, Vol. 96, No. st. 9,
 Sept. 1970, pp. 1987-1995.
- [71.1] **N. Jackson & R. A. Estanero.**
 "The Plastic Flow Law for Reinforced Concrete Beams Under Combined Flexure and Torsion."
 Magazine of concrete Research, Vol. 23, No. 77, Dec. 1971,
 pp. 169-180.
- [74.1] **F. Leonhardt & G. Schellig.**
 "Torsionsversuche an Stahlbetonbalken."
 Deutscher Ausschuss für Stahlbeton, H. 239, Berlin 1974.
- [74.2] **K. T. S. R. Iyengar & N. Ramprakash.**
 Combined Torsion and Flexure Tests on Reinforced Rectangular Concrete Beams.
 Journal of the American Concrete Institute, Proceedings
 Vol. 71, July 1974, pp. 362 - 367.
- [74.3] **D. Mitchell & M. P. Collins.**
 "The Behavior of Structural Concrete Beams in Pure Torsion."
 Publication 74 - 06, Department of Civil Engineering,
 University of Toronto, 1974.

- [76.1] **P. Müller.**
 "Failure Mechanisms for Reinforced Concrete Beams in Torsion and Bending."
 Bericht Nr. 65, Institut für Baustatik und konstruktion, ETH Zürich, september 1976.
- [77.1] **G. S. Pandit & S. P. Gupta.**
 "Tests for True Torsion Failure Mechanism of Concrete Beams."
 Journal of the Structural Engineering, India, Vol. 5, No. 1, April 1977, pp 39 – 51.
- [77.2] **P. Lange–Hansen.**
 "Generel plasticitetsteori I. Konstitutive ligninger for idealt plastiske konstruktioner. Entydighedssætninger."
 Forelæsningsnotat nr. F 55, 2. udgave, Afdelingen for Bærende Konstruktioner, Danmarks tekniske Højskole, Lyngby 1977.
- [77.3] **M. P. Nielsen, L. Pilegaard Hansen & A. Rathkjen.**
 "Rumlige spændings– og deformationstilstande."
 Mekanik 2.2, Del 1 og 2, 2. udgave, Afdelingen for Bærende Konstruktioner, Danmarks tekniske Højskole, 1977.
- [78.1] **A. E. McMullen & B. V. Rangan.**
 "Pure Torsion in Rectangular Sections."
 Journal of the American Concrete Institute, Proceeding Vol. 75, Oct. 1978, pp. 511 – 519.
- [79.1] **H. Exner.**
 "On the Effectiveness Factor in Plastic Analysis of Concrete."
 IABSE–colloquium, Plasticity in Reinforced Concrete, Copenhagen 1979, pp. 35 – 42.

- [81.1] **A. M. Neville.**
"Properties of Concrete."
Pitman, 3. udgave, 1981.
- [83.1] **B. Feddersen & M. P. Nielsen.**
"Effektivitetsfaktoren ved vridning af jernbetonbjælker."
Rapport R 174, Afdelingen for Bærende Konstruktioner,
Danmarks tekniske Højskole, Lyngby 1983.
- [83.2] **J. S. Nielsen.**
"A Theoretical and Experimental Study of Concrete Beams –
Especially Over-Reinforced Beams – Subjected to torsion
Part I. Theory."
Rapport R 170, Afdelingen for Bærende Konstruktioner,
Danmarks tekniske Højskole, Lyngby 1983.
- [83.3] **J. S. Nielsen.**
"A Theoretical and Experimental Study of Concrete Beams –
Especially Over-Reinforced Beams – Subjected to torsion
Part II. Experiments."
Rapport R 171, Afdelingen for Bærende Konstruktioner,
Danmarks tekniske Højskole, Lyngby 1983.
- [83.4] **M. P. Nielsen & B. Feddersen.**
"Effektivitetsfaktoren ved bøjning af jernbetonbjælker."
Rapport R 173, Afdelingen for Bærende Konstruktioner,
Danmarks tekniske Højskole, Lyngby 1983.
- [84.1] **M. P. Nielsen.**
"Limit Analysis and Concrete Plasticity."
Prentice-Hall 1984.

- [84.2] **Dansk Ingeniørforenings norm for betonkonstruktioner.**
"Dansk standard DS 411, 3. udgave, marts 1984."
- [84.3] **J. S. Nielsen.**
"The effect of Stirrup Spacing on the Ultimate Load of Reinforced concrete Beams Subjected to Pure Torsion."
Rapport R 180, Afdelingen for Bærende Konstruktioner, Danmarks tekniske Højskole, Lyngby 1984.
- [84.4] **B. Feddersen & M. P. Nielsen.**
"Plastic analysis of reinforced concrete beams in pure bending and torsion."
Bygningsstatistiske Meddelelser, Vol. LV, Nr. 2. Juni 1984.
- [85.1] **Beton—bogen.**
Cementfabrikkernes tekniske Oplysningskontor,
2. udgave 1985.
- [85.2] **T. C. Hansen.**
"Beton I Henhold Til DS 411—84."
Laboratoriet for Bygningsmaterialer, Danmarks tekniske Højskole. Teknisk rapport 146/86. 1985.
- [88.1] **M. B. Sørensen.**
"Højstyrkebetons Deformationsforhold."
Afdelingen for Bærende Konstruktioner,
Danmarks tekniske Højskole, Eksamensprojekt, 1988.
- [89.1] **L. Bigom.**
"Forskydningsbæreevnen Af Højstyrkebetonbjælker".
Afdelingen for Bærende Konstruktioner,
Danmarks tekniske Højskole, Eksamensprojekt, 1989.

- [90.1] **B. Feddersen.**
"Jernbetonbjælkens bæreevne – rene og kombinerede påvirkninger."
Rapport R 251, Afdelingen for Bærende Konstruktioner,
Danmarks tekniske Højskole, Lyngby 1990.
- [90.2] **N. H. Olsen.**
"Uniaxial Stress–Strain Curves of High Strength Concrete".
Rapport R 232, Afdelingen for Bærende Konstruktioner,
Danmarks tekniske Højskole, Lyngby 1990.
- [90.3] **N. H. Olsen.**
"The Strength of Overlapped Deformed Tensile Reinforcement
Splices in High Strength Concrete".
Rapport R 234, Afdelingen for Bærende Konstruktioner,
Danmarks tekniske Højskole, Lyngby 1990.
- [90.4] **C. B. Lehnert & N. P. Krogh.**
"Plasticitetsteoretisk beregningsmodel for ren vridning
samt kombineret bøjning og vridning."
Danmarks Ingeniørakademi i Lyngby.
Afgangsprojekt, Efterår 1990.
- [90.5] **C. Ganwei & M. P. Nielsen.**
"Shear Strength of Beams of High Strength Concrete."
Rapport R 258, Afdelingen for Bærende Konstruktioner,
Danmarks tekniske Højskole, Lyngby 1990.
- [90.6] **Eurocode No. 2 : Design of Concrete Structures, Part 1.**
General Rules and Rules for Buildings. Prepared for the
Commission of the European Communities, Revised Final Draft,
October 1990.

[91.1]

J. B. Ibsø & L. J. Rasmussen.

"Vridning af armerede højstyrkebetonbjælker."

Afdelingen for Bærende Konstruktioner,

Danmarks tekniske Højskole, Eksamensprojekt 1991.

AFDELINGEN FOR BÆRENDE KONSTRUKTIONER
DANMARKS TEKNISKE HØJSKOLE

Department of Structural Engineering
Technical University of Denmark, DK-2800 Lyngby

SERIE R

(Tidligere: Rapport)

- R 271. VILMANN, OLE: A Harmonic Half-Space Fundamental Solution. 1991.
R 272. VILMANN, OLE: The Boundary Element Method applied in Mindlin Plate Bending Analysis. 1991.
R 273. GANWAY, CHEN, ANDREASEN, B.S., NIELSEN, M.P.: Membrane Actions Tests of Reinforced Concrete Square Slabs. 1991.
R 274. THOUGÅRD PEDERSEN, NIELS, AGERSKOV, H.: Fatigue Life Prediction of Offshore Steel Structures under Stochastic Loading. 1991.
R 275. ANDREASEN, B.S., NIELSEN, M.P.: Arch Effect in Reinforced Concrete one-way Slabs. 1991.
R 276. ASKEGAARD, VAGN: Prediction of Initial Crack Location in Welded Fatigue Test Specimens by the Thermoelastic Stress Analysis Technique. 1991.
R 277. NIELSEN, KARSTEN: Analyse af Skråstagsbroers egenvægtstilstand, 1991.
R 278. NIELSEN, LEIF OTTO: Continuummechanical Lagrangian finite elements. 1991.
R 279. RIBERHOLT, H.: Limtræ af dansk træ, HQL-planker, Del 2.
R 280. RIBERHOLT, H., ENQUIST, B., GUSTAFSSON, P.J., JENSEN, RALPH BO: Timber beams notches at the support, December 1991.
R 281. RIBERHOLT, H., JOHANNESSEN, JOHANNES M.: Fingerskarrede ramme-hjørner i limtræ. 1992.
R 282. DAHL, KAARE K.B.: Uniaxial Stress-Strain Curves for Normal and High Strength Concrete. 1992.
R 283. DULÉVSKI, DAVID ENCHO: Global Structural Analysis of Steel Box Girder Bridges. 1992.
R 284. Resumeoversigt 1991 - Summaries of Papers 1991.
R 285. DAHL, KAARE K.B.: The Calibration and Use of a Triaxial Cell. 1992.
R 286. DAHL, KAARE K.B.: A Failure Criterion for Normal and High Strength Concrete. 1992.
R 287. DAHL, KAARE K.B.: A Constitutive Model for Normal and High Strength Concrete. 1992.
R 288. JENSEN, HENRIK ELGAARD: State-of-the-art Rapport for Højstyrkebetons Svind og Krybning. 1992.
R 289. JENSEN, HENRIK ELGAARD: Creep and Shrinkage of High-Strength Concrete; A testreport. 1992.
R 290. JENSEN, HENRIK ELGAARD: Creep and Shrinkage of High-Strength Concrete; A testreport; Appendix A. 1992.
R 291. JENSEN, HENRIK ELGAARD: Creep and Shrinkage of High-Strength Concrete; A testreport; Appendix B. 1992.
R 292. JENSEN, HENRIK ELGAARD: Creep and Shrinkage of High-Strength Concrete; A testreport; Appendix C. 1992.
R 293. JENSEN, HENRIK ELGAARD: Creep and Shrinkage of High-Strength Concrete; A testreport; Appendix D. 1992.
R 294. JENSEN, HENRIK ELGAARD: Creep and Shrinkage of High-Strength Concrete; An Analysis. 1992.
R 295. JENSEN, HENRIK ELGAARD: State-of-the-art Rapport for Revnet Betons Styrke. 1992.
R 296. IBSØ, JAN BEHRENDT & RASMUSSEN, LARS JUEL: Vridning af armerede normal- og højstyrkebetonbjælker. 1992.
R 297. RIBERHOLT, HILMER, JOHANNESSEN, JOHANNES MORSING & RASMUSSEN, LARS JUEL: Rammehjørner med indlimede stålstænger i limtræ. 1992.

Abonnement 1.7.1992 - 30.6.1993 kr. 130,-
Subscription rate 1.7.1992 - 30.6.1993 D.Kr. 130.-.

Hvis De ikke allerede modtager Afdelingens resumeoversigt ved udgivelsen, kan Afdelingen tilbyde at tilsende næste års resumeoversigt, når den udgives, dersom De udfylder og returnerer nedenstående kupon.

Returneres til
Afdelingen for Bærende Konstruktioner
Danmarks tekniske Højskole
Bygning 118
2800 Lyngby

Fremtidig tilsendelse af resumeoversigter udbedes af
(bedes udfyldt med blokbogstaver):

Stilling og navn:

Adresse:

Postnr. og -distrikt:

The Department has pleasure in offering to send you a next year's list of summaries, free of charge. If you do not already receive it upon publication, kindly complete and return the coupon below.

To be returned to:
Department of Structural Engineering
Technical University of Denmark
Building 118
DK-2800 Lyngby, Denmark.

The undersigned wishes to receive the Department's
List of Summaries:
(Please complete in block letters)

Title and name

Address.....

Postal No. and district.....

Country.....

1. The first part of the document is a list of names and addresses.

2. The second part of the document is a list of names and addresses.

3. The third part of the document is a list of names and addresses.

4. The fourth part of the document is a list of names and addresses.

5. The fifth part of the document is a list of names and addresses.

6. The sixth part of the document is a list of names and addresses.

7. The seventh part of the document is a list of names and addresses.

8. The eighth part of the document is a list of names and addresses.

9. The ninth part of the document is a list of names and addresses.

10. The tenth part of the document is a list of names and addresses.

11. The eleventh part of the document is a list of names and addresses.

12. The twelfth part of the document is a list of names and addresses.

13. The thirteenth part of the document is a list of names and addresses.

14. The fourteenth part of the document is a list of names and addresses.

15. The fifteenth part of the document is a list of names and addresses.

16. The sixteenth part of the document is a list of names and addresses.

17. The seventeenth part of the document is a list of names and addresses.

18. The eighteenth part of the document is a list of names and addresses.

19. The nineteenth part of the document is a list of names and addresses.

20. The twentieth part of the document is a list of names and addresses.

21. The twenty-first part of the document is a list of names and addresses.

22. The twenty-second part of the document is a list of names and addresses.

23. The twenty-third part of the document is a list of names and addresses.

24. The twenty-fourth part of the document is a list of names and addresses.

25. The twenty-fifth part of the document is a list of names and addresses.

26. The twenty-sixth part of the document is a list of names and addresses.

27. The twenty-seventh part of the document is a list of names and addresses.

28. The twenty-eighth part of the document is a list of names and addresses.

29. The twenty-ninth part of the document is a list of names and addresses.

30. The thirtieth part of the document is a list of names and addresses.